ইউনিট ১

সেট ও ফাংশন

ভূমিকা

সেটের ধারণা হল গণিতের ধারণার সর্বাপেক্ষা মৌলিক ভিত্তি। আধুনিক গণিতে সেটের বিশেষ ভূমিকা রয়েছে। গণিতে সকল প্রসঙ্গে ও প্রয়োগে সেটের ধারণা একটি আদিম বা সহজাত ধারণা বলে ধরা হয়। তাই আধুনিক গণিতের হাতিয়ার হিসেবে সেটের ব্যবহার ব্যাপক। জার্মান গণিতবিদ জর্জ ক্যান্টর (১৮৪৫-১৯১৮) সেট সম্বন্ধে প্রথম ব্যাখ্যা প্রদান করেন। তিনি অসীম সেটের ব্যাখ্যা প্রদান করেন যা গণিত শাস্ত্রে বিপুল আলোড়ন সৃষ্টি করে। তাঁর প্রদত্ত ব্যাখ্যা গণিত শাস্ত্রে যে নতুন শাখার জন্ম দেয়, তা সেট তত্ত্ব (Set Theory) হিসেবে পরিচিত। তাঁর উদ্ভাবিত সেট তত্ত্ব গণিতের বিভিন্ন শাখায় বর্তমানে ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হচ্ছে।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- *বিভিন্ন প্রকার সেট সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন এবং তাদের ব্যবহারিক প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন;*
- *সেটের কার্যবিধি সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন;*
- *ক্রমজোড় ও কার্তেসীয় গুণজের ব্যাখ্যা দিতে পারবেন;*
- *অন্বয় ও ফাংশন উদাহরণসহ ব্যাখ্যা করতে পারবেন;*
- *ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন;*
- *লেখচিত্রের সাহায্যে ফাংশনকে বর্ণনা করার দক্ষতা অর্জন করবেন।*

পাঠ ১ সেটের সংজ্ঞা ও ধারণা

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সেট কী তা জানতে পারবেন;
- বিভিন্ন প্রকার সেটের সংজ্ঞা জানতে পারবেন এবং তাদের ব্যবহারিক প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

সেট কী

দৈনন্দিন জীবনে বিভিন্ন বস্তুর সংগ্রহ বা দল বা গুচ্ছ বোঝাতে আমরা অনেক সময় সেট শব্দটি ব্যবহার করে থাকি। যেমন, এক সেট ফার্ণিচার, এক সেট দশম শ্রেণীর পুস্তক, এক সেট পোশাক ইত্যাদি। গণিতের বিভিন্ন আলোচনায়ও তেমনি বাস্তব জগত বা চিন্তা জগতের বস্তুর যেকোন সুনির্ধারিত সংগ্রহকে সেট বলা হয়। এখানে 'সুনির্ধারিত' বলতে আমরা বুঝব যে, সেটে কি অন্তর্ভুক্ত আছে আর কি অন্তর্ভুক্ত নেই, তা সুনির্দিষ্টভাবে নির্ধারণ করা। সুনির্ধারিত সংগ্রহ হওয়া ছাড়া সেটের ধারণার উপর আর কোন শর্ত নেই। অবশ্য কার্যক্ষেত্রে একই সেটের উপাদানসমূহ সাধারণতঃ একজাতীয় হয়ে থাকে।

"সুনির্ধারিত ও পরস্পর ভিন্ন বস্তুসমূহের যেকোন সংগ্রহকে সেট বলে।"

উদাহরণ ঃ ১। বাংলাদেশ উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের এইচ এস সি প্রোগ্রামের গণিত (প্রথম পত্র) বিষয়ের সকল শিক্ষার্থী।

২। বাংলাদেশে বাংলা ভাষায় প্রকাশিত সকল দৈনিক পত্রিকা।

৩। সার্কের (*SAARC*) অন্তর্ভুক্ত দেশসমূহ ইত্যাদি।

সেট এবং সেটের উপাদান

সেটে অন্তর্ভুক্ত বস্তুসমূহকে ঐ সেটের উপাদান (element) বা সদস্য (member) বলা হয়। অর্থাৎ যে সমস্ত বস্তু নিয়ে সেট গঠিত হয় সেগুলোকে সেটের উপাদান বলা হয়।

ইংরেজি বর্ণমালার বড় হাতের অক্ষর A, B, C, D, X, Y ---- ইত্যাদি দ্বারা সাধারণত সেটের নাম বা সেট প্রকাশ করা হয়। আর ইংরেজি ছোট হাতের অক্ষর $a, b, c, x, y,$ ------- ইত্যাদি দ্বারা সেটের উপাদান বা সদস্যকে প্রকাশ করা হয়।

সেটের সবগুলো উপাদান দ্বিতীয় বন্ধনী { } দ্বারা আবদ্ধ করতে হয় এবং উপাদানগুলোর একটিকে আর একটি থেকে কমার (,) দ্বারা পৃথক করা হয়।

উদাহরণস্বরূপ বলা যায় যে, যদি A একটি সেট হয় এবং এর উপাদান i, g, k, l, m হয় তবে আমরা লিখবঃ

$A = \{i, g, k, l, m\}$

কোন উপাদান, কোন একটি সেটের অন্তর্ভুক্ত হলে তা প্রকাশের জন্য $\in$ (epsilon) প্রতীকটি ব্যবহার করা হয়। আবার কোন উপাদান, কোন একটি সেটের অন্তর্ভুক্ত না হলে তা প্রকাশের জন্য $\notin$ (অর্থ উপাদান নয়) চিহ্নটি প্রয়োজন হয়।

মনে করুন, $A = \{x, y, z\}$ একটি সেট যেখানে x, y ও z A সেটটির উপাদান।

$\therefore$ আমরা পাই,

$x \in A$ (অর্থ x, A সেটের একটি উপাদান বা সদস্য)

$y \in A$ (অর্থ y, A সেটের একটি সদস্য)

$z \in A$ (অর্থ z, A সেটের একটি সদস্য)

আবার, $B = \{i, j, m\}$ অপর একটি সেট।

এখানে $i \in B$ (অর্থ i, B সেটের একটি সদস্য)

কিন্তু $n \notin B$ (অর্থ n, B সেটের সদস্য নয়)।

সেট বর্ণনা পদ্ধতি (Methods of describing a set)

সেটকে প্রকাশ করার দুটি পদ্ধতি প্রচলিত আছে।

১। তালিকা পদ্ধতি (Tabular Method or Roster method or Enumeration method or Listing Method)

২। বাছাই পদ্ধতি (Selector method or Property builder method or Rule method).

১। তালিকা পদ্ধতি

এই পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদানকে দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে আবদ্ধ করা হয় এবং প্রতিটি উপাদানকে কমা দ্বারা আলাদা করে লিখা হয়।

যেমন, $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$B = \{ a, e, i, o, u\}$

$C = \{1, 3, 5, 7, ., ., \}$, এখানে ডট (.) দ্বারা অনুল্লিখিত উপাদান বোঝানো হয়েছে।

২। বাছাই পদ্ধতি

এই পদ্ধতিতে সেটের উপাদানের সাধারণ ধর্মের উল্লেখ করে সেটকে বর্ণনা করা হয়। এখানে সেটের প্রতিনিধিত্বকারী কোন সদস্যকে লিখে তার পাশে তার গুণ বা ধর্ম লেখা হয়। স্বাভাবিক সংখ্যার সেটকে প্রকাশ করতে আমরা লিখব,

$A = \{x ঃ x \in N\}$

অথবা, $A = \{ x \mid x \in N\}$

এখানে, 'ঃ' চিহ্ন বা '|' চিহ্নের দ্বারা 'যেন' বোঝায়।

উপরের উদাহরণের $A = \{ xঃx \in N\}$ বা $A = \{x|x \in N\}$ এর অর্থ "A হল সকল x এর সেট যেন x স্বাভাবিক সংখ্যা N এর উপাদান"।

এ উদাহরণটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করলে হবে

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ., ., \}$

উদাহরণ ঃ সার্কভূক্ত দেশের সেটকে S বিবেচনা করে তালিকা পদ্ধতি ও সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।

সমাধান ঃ আমরা জানি, সার্কভুক্ত দেশগুলো হল ঃ বাংলাদেশ, ভূটান, নেপাল, ভারত, শ্রীলংকা, মালদ্বীপ, পাকিস্তান।

তালিকা পদ্ধতি ঃ

$S =$ {বাংলাদেশ, ভূটান, নেপাল, ভারত, শ্রীলংকা, মালদ্বীপ, পাকিস্তান}

সেট গঠন পদ্ধতি ঃ

$S = \{ x ঃ x$ সার্কের একটি দেশ }

বা, $S = \{x \mid x$ সার্কের একটি দেশ}

সেটের শ্রেণীকরণ

সেট বিভিন্ন প্রকারের হতে পারে। শ্রেণীকরণের ভিত্তি অনুযায়ী তাদের নির্দিষ্ট নাম আছে। নিচে এ ধরনের কতিপয় সেটের সংজ্ঞা ও উদাহরণ দেয়া হল।

সান্ত সেট বা সসীম সেট (Finite set)

যে সেটের সদস্য সংখ্যা সীমিত অর্থাৎ যে সেটের সদস্যগুলো গণনা করে শেষ করা যায় তাকে সান্ত বা সসীম সেট বলে। কোন সেটের সদস্যের সংখ্যা যত বেশীই হোক না কেন তা গণনার মধ্যে পড়লে অর্থাৎ কোনভাবে তাদের সংখ্যাসীমা নির্ধারিত থাকলে সেটটি সসীম হবে।

উদাহরণ ঃ ১। $A = \{ 1, 2, 3, 5, 9, 13\}$

এখানে S সেটের উপাদানগুলো গণনা করা যায়।

উপাদানের সংখ্যা = 6 টি

সুতরাং A একটি সান্ত সেট।

২। $B = \{ a, e, i, o, u\}$

এখানে B সেটে 5 টি উপাদান আছে। তাই এটি একটি সান্ত সেট।

অসীম বা অনন্ত সেট (Infinite set)

যে সেটের সদস্য সংখ্যা সীমিত নয় অর্থাৎ সদস্য সংখ্যা গণনা করে শেষ করা যায় না, তাকে অসীম বা অনন্ত সেট বলে।

যেমন, $A = \{ x : x \in R\}$ একটি অনন্ত সেট।

এখানে R হলো বাস্তব সংখ্যার সেট, R এর মধ্যে কতটি বাস্তব সংখ্যা আছে আমরা বলতে পারি না।

একক সেট (Unit set)

কেবলমাত্র একটি উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে একক সেট বলে। যেমন, $A = \{1\}$, এখানে শুধুমাত্র একটি উপাদান আছে। তাই এটি একটি একক সেট।

$B = \{ x \mid x$ মানুষ বসতিপূর্ণ একটি গৃহ।}

ফাঁকা সেট (*E*mpty set, *N*ull set or Void set)

যে সেটে কোন উপাদান থাকে না তাকে ফাঁকা সেট বা শূন্য সেট বলে। ফাঁকা সেটকে Φ (ওরি) অক্ষর দ্বারা প্রকাশ করা হয়। উল্লেখ্য, Φ ডেনিশ ভাষার একটি অক্ষর (গ্রীক অক্ষর 'ফাই' নয়)। এর উচ্চারণ 'ওরি'।

উদাহরণ ঃ $A = \{ x \mid x$ পাঁচ মাথাবিশিষ্ট জীবন্ত সকল মানুষ)

$B = \{ x \mid x$, 1971 থেকে 1990 পর্যন্ত বাংলাদেশের মহিলা প্রধানমন্ত্রীদের নাম}

উপরের দুটি উদাহরণের একটিতেও কোন সদস্য খুঁজে পাওয়া যাবে না। তাই এরা ফাঁকা সেট অর্থাৎ $A = \Phi$, $B = \Phi$। আবার

{ } একটি ফাঁকা সেট। এতে কোন উপাদান নেই, এমনকি শূন্যও নেই। {0} কোন ফাঁকা সেট নয়। শূন্য (0) এ সেটের একটি উপাদান।

সমান সেট (Equal Sets)

দুটি সেট A এবং B কে পরস্পর সমান সেট বলা হয় যদি A সেটের প্রতিটি উপাদান B সেটে থাকে এবং B সেটের প্রতিটি উপাদান A সেটে থাকে। যেমন, $A = \{a, b, c)$ এবং $B = \{b, a, c\}$ সেট দুটি পরস্পর সমান, কারণ উভয় সেটের উপাদান একই। সেটে অন্তর্ভুক্ত উপাদানসমূহের পূনর্বিন্যাসের ফলে সেটের কোন পরিবর্তন হয় না।

উপসেট (Subset)

যদি A সেটের প্রতিটি উপাদান B সেটেরও উপাদান হয় তবে A সেটকে B সেটের উপসেট বলে। স্পষ্টতই, A সেট B সেটের উপসেট হলে, যদি $x \in A$ হয় তবে অবশ্যই $x \in B$ হবে। A এবং B সেট দুটির এ সম্পর্ক $A \subset B$ সংকেত দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $A \subset B$ কে পড়া হয় A, B এর উপসেট}

মনে করুন, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12\}$ দুটি সেট।

লক্ষণীয় যে, A সেটের প্রত্যেক উপাদান B সেটে বিদ্যমান

$\therefore A \subset B$

"যদি একটি সেটের সকল সদস্য অপর একটি সেটের সদস্য হয়, তবে প্রথম সেটকে দ্বিতীয় সেটের উপসেট বলে। দ্বিতীয় সেটকে সুপার সেট বলা হয়।"

উপরের উদাহরণে A হল B সেটের উপসেট এবং B হল সুপারসেট।

উপসেটকে আবার প্রকৃত উপসেট (Proper Subset) এবং অপ্রকৃত উপসেট (Improper Subset) এ দুটি ভাগে বিভক্ত করা হয়েছে। নিম্নে এ বিষয়ে আলোচনা করা হল।

প্রকৃত উপসেট

A সেটের প্রত্যেক উপাদান যদি B সেটে বিদ্যমান থাকে এবং B সেটে অন্তত একটি উপাদান থাকে যা A সেটে নাই, তবে A সেটকে B সেটের প্রকৃত উপসেট বলে। একে $A \subset B$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ ঃ $A = \{1, 3, 5\}$ সেটটি $B = \{5, 6, 1, 3, 4\}$ সেটের একটি প্রকৃত উপসেট অর্থাৎ $A \subset B$

A সেটকে B সেটের প্রকৃত উপসেট বলা হয় যখন i) $A \subset B$ এবং (ii) A▫B হয়।

অপ্রকৃত উপসেট

A সেটের প্রত্যেকটি উপাদান যদি B সেটে থাকে এবং B সেটের প্রত্যেকটি উপাদান যদি A সেটে তাকে, তবে তাদের একটিকে অপরটির অপ্রকৃত উপসেট বলে। এক্ষেত্রে A এবং B সেট দুটি সমান সেট হয়।

উদাহরণ ঃ মনে করুন, $A = \{2, 5, 7\}$ এবং $B = \{5, 2, 7\}$ দুটি সেট। এখানে A এর সকল উপাদান B সেটের সকল উপাদানের সমান।

সুতরাং A সেটটি B সেটের অপ্রকৃত উপসেট।

প্রতীক দিয়ে লেখা হয় ঃ $A \subseteq B$ অর্থাৎ A সেটটি B সেটের অপ্রকৃত উপসেট।

মনে রাখতে হবে যে, প্রত্যেক সেটের শুধুমাত্র দুটি অপ্রকৃত উপসেট আছে। একটি হলো ফাঁকা সেট এবং অন্যটি হল ঐ সেটটি নিজেই। নিম্নের উদাহরণের মাধ্যমে ধারণাটি আরো পরিষ্কার হবে।

ধরুন $A = \{a, b, c\}$ একটি সেট।

A সেটের অপ্রকৃত উপসেট হল Φ, $(a, b, c\}$

উপরের আলোচনা থেকে আমরা নিচের দুটি উপসংহার দিতে পারিঃ

১। A সেটটি B সেটের প্রকৃত উপসেট হবে যদি $A \subset B$ এবং $A \neq B$ হয়।

২। A সেটটি B সেটের অপ্রকৃত উপসেটে হবে যদি $A \subset B$ এবং $A = B$ হয়।

সেটের উপাদান বা সদস্য প্রকাশের প্রতীক $\in$, সেটের সদস্য নয় প্রকাশের প্রতীক $\notin$, ফাঁক সেট প্রকাশের প্রতীক Φ বা { }, উপসেট প্রকাশের প্রতীক $\subset$, অপ্রকৃত উপসেট প্রকাশের প্রতীক $\subseteq$

কতিপয় সমাধানকৃত উদাহরণ

উদাহরণ-1 ঃ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ হলে, $\in$ বা $\notin$ প্রতীক দ্বারা ফাঁকা স্থান পূরণ করুন ঃ

(i) $5 \ \square \ A$ (ii) $8 \ \square \ A$ (iii) $4 \ \square \ A$ (iv) $0 \ \square \ A$

সমাধান ঃ (i) 5 সদস্যটি A সেটে বিদ্যমান।

$\therefore \ 5 \in A$

(ii) 8 সদস্যটি A সেটে বিদ্যমান নয়।

$\therefore \ 8 \notin A$

(iii) 4 সদস্যটি A সেটে বিদ্যমান।

$\therefore \ 4 \in A$

(iv) 0, A সেটে বিদ্যমান নয়।

$\therefore \ 0 \notin A.$

উদাহরণ-2 ঃ বাংলাদেশের সকল বিভাগের সেটকে D বিবেচনা করে তালিকা পদ্ধতি এবং বাছাই পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।

সমাধান ঃ বাংলাদেশের বিভাগগুলো হল ঃ ঢাকা, চট্টগ্রাম, খুলনা, রাজশাহী, বরিশাল, সিলেট

তালিকা পদ্ধতি ঃ

D = { ঢাকা, চট্টগ্রাম, খুলনা, রাজশাহী, বরিশাল, সিলেট}

বাছাই পদ্ধতি ঃ D = { x | x বাংলাদেশের একটি বিভাগ}

উদাহরণ-3 ঃ নিম্নলিখিত সেটগুলো নির্ণয় করুন ঃ

(i) { $x \in N$ ঃ $x^2 > 15$ এবং $x^2 < 25$ }

(ii) { $x \in N$ ঃ $6 < x < 7$}

(iii) { $x \in N$ ঃ x, 42 এর গণনীয়ক।}

সমাধান ঃ (i) {$x \in N$ ঃ $x^2>15$ এবং $x^2<25$} এর অর্থ হল x স্বাভাবিক সংখ্যার সেট যেন x এর বর্গ 15 এর চেয়ে বড় এবং 25 এর চেয়ে ছোট হয়।

আমরা জানি, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, $N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ------ \}$

এখন, যে সব স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গ 15 অপেক্ষা বড় সেগুলো হলো 4, 5, 6, 7 -----, কারণ $4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$, ---

আবার যে সব স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গ 25 অপেক্ষা কম সেগুলো হলো 1, 2, 3, 4; কারণ $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$.

$\therefore$ আমরা পাই, শুধুমাত্র $4^2>15$ এবং $4^2<25$.

$\therefore$ শর্তমতে নির্ণেয় সেটটি হলো {4}.

(ii) {$x \in N$ ঃ $6<x<7$} এর অর্থ ঃ x হল স্বাভাবিক সংখ্যা N এর উপসেট যেন x, 6 এর চেয়ে বড় এবং 7 এর চেয়ে ছোট স্বাভাবিক সংখ্যা হয়।

আবার $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ---------\}$

কিন্তু 6 এবং 7 এর মধ্যবর্তী কোন স্বাভাবিক সংখ্যাই নেই, কারণ সকল স্বাভাবিক সংখ্যাই পূর্ণ সংখ্যা। কাজেই প্রদত্ত শর্তানুযায়ী নির্ণেয় সেটটি হবে একটি ফাঁকা সেট বা Φ বা, { }.

(iii) { $x \in N$ ঃ x, 42 এর গুণনীয়ক }

N স্বাভাবিক সংখ্যার সেট।

$\therefore \ N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, ------ \}$

$\therefore \ 1\times42 = 42$

$\therefore \ 2\times21 = 42$

$\therefore \ 3\times14 = 42$

$6\times7 = 42$

$\therefore$ নির্ণেয় সেট = $\{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$.

উদাহরণ-4 ঃ কারণসহ সত্য মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

(i) $4 \in \{3, 4, 5\}$ (ii) $6 \in \{2, 4, 6\}$
(iii) $3 \notin \{3, 4, 5\}$, (iv) $7 \notin \{2, 4, 6\}$
(v) $\Phi \in \{1, 2, 3\}$

সমাধান ঃ (i) $4 \in \{ 3, 4, 5\}$ (সত্য)
কারণ 4, $\{3, 4, 5\}$ সেটের সদস্য।
(ii) $6 \in \{2, 4, 6\}$ (সত্য)
কারণ 6, $\{2, 4, 6\}$ সেটের সদস্য।
(iii) $3 \notin \{3, 4, 5\}$ (মিথ্যা)
কারণ 3, $\{3, 4, 5\}$ সেটের সদস্য।
(iv) $7 \notin \{2, 4, 6\}$ (সত্য)
কারণ 7, $\{2, 4, 6\}$ সেটের সদস্য নয়।
(v) $\Phi \in \{1, 2, 3\}$ (মিথ্যা)

এখানে Φ ফাঁকা সেট বোঝায় না, কারণ $\in$ চিহ্নটি দ্বারা সেটের সদস্য এবং সেটের মধ্যে সম্পর্ক বোঝায়। অর্থাৎ $x \in A$ এর অর্থ x, A সেটের সদস্য। তাই $\Phi \in \{1, 2, 3\}$ এর অর্থ হল Φ, $\{1, 2, 3\}$ সেটের সদস্য, যা সত্য নয়।

উদাহরণ-5 ঃ নিচের কোনটি সত্য এবং কোন্টি মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

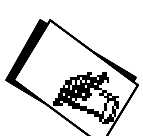
(i) $\{1, 2\} \subset \{1, 3, 5\}$, (ii) $\{7, 3, 5\} \subset \{3, 5, 7\}$
(iii) $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 5\}$

সমাধান ঃ (i) $\{1, 2\} \subset \{1, 3, 5\}$ মিথ্যা
কারণ 2, $\{1, 3, 5\}$ এর সদস্য নয়।
(ii) $\{7, 3, 5\} \subset \{3, 5, 7\}$ সত্য
কারণ সেট দুটির সদস্যগুলো অভিন্ন।
(iii) $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 5\}$ মিথ্যা
কারণ সেট দুটির সদস্যগুলো অভিন্ন নয়।

উদাহরণ-6 ঃ যদি $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ এবং $C = \{4, 1, 2\}$ হয়, তবে নিচের কোনটি সত্য বা মিথ্যা নির্ণয় করুন।

(i) $3 \in A$ (ii) $5 \notin C$ (iii) $B \in A$
(iv) $B \subset A$ (v) $B \neq C$ (vi) $A \subset B$

সমাধান ঃ (i) $3 \in A$ (সত্য)
(ii) $5 \notin C$ (সত্য)
(iii) $B \in A$ (মিথ্যা), কারণ B এবং A দুটি সেট, কিন্তু $\in$ চিহ্নটি সেটের উপাদান এবং সেটের মধ্যে সম্পর্কে নির্দেশ করে।
(iv) $B \subset A$ (সত্য)
(v) $B \neq C$ (মিথ্যা)
(vi) $A \subset B$ (মিথ্যা)



অনুশীলনী-১.১

1. মনে করুন, $A = \{a, e, i, o, u\}$
$\in$ বা $\notin$ প্রতীক দ্বারা নিচের ফাঁকা স্থানগুলো পূরণ করুন ঃ
(i) i A (ii) e A
(iii) b A (iv) Φ A
2. বাছাই পদ্ধতিতে নিচের সেটগুলো প্রকাশ করুন ঃ

(i) $A = \{a, e, i, o, u\}$
(ii) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, \text{-------}\}$

3. তালিকা পদ্ধতিতে নিচের সেটগুলো প্রকাশ করুন ঃ
(i) $\{x \mid x$, -3 এবং -5 এর মধ্যে বিদ্যমান জোড় পূর্ণ সংখ্যা$\}$
(ii) $\{x \mid x$, -4 এবং 6 এর মধ্যে বিদ্যমান বিজোড় পূর্ণ সংখ্যা$\}$
(iii) $\{x \mid x$, 32 দিনের মাস$\}$

4. নিম্নলিখিত সেটগুলো নির্ণয় করুনঃ
(i) $\{x \in N$ এবং $x^2 < 13\}$
(ii) $\{x \in \mathrm{R}$ এবং $x^2 = 4\}$, এখানে R বাস্তব সংখ্যার সেট
(iii) $\{x \in N$ ঃ $x < 10$ এবং জোড় সংখ্যা$\}$

5. কারণসহ সত্য মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ
(i) $\{7, 3, 5\} = \{3, 5, 7\}$
(ii) $N = \{1, 2, 3, 4, \text{- - - - -}\}$ একটি অনন্ত সেট।
(iii) যদি $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3, 5\}$ হয় তবে $3 \in A$ এবং $2 \in B$
(iv) $D = \{x \mid x$ একটি পূর্ণসংখ্যা এবং $5 < x < 10\}$ একটি একক সেট
(v) $B = \{x \mid x$ একটি পূর্ণ সংখ্যা এবং $4 < x < 12\}$ এর উপাদান সংখ্যা 7 টি।

6. $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b\}$, $Z = \{a, b, d\}$, $M = \{c, d\}$, $N = \{d\}$ হলে নিচের কোনটি সত্য এবং কোনটি মিথ্যা যুক্তিসহ লিখুন।
(i) $X \subset Y$, (ii) $X = Z$, (iii) $N \not\subset M$, (iv) $Y = M$
(v) $\{d\} \in Y$, (vi) $\{a\} \subset Z$ (vii) $\{d\} \subset M$

পাঠ ২ সেটের সংযোগ, ছেদ, অন্তর, সার্বিক সেট ও পূরক সেট

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সেটের সংযোগ, ছেদ, অন্তর, সার্বিক সেট, পূরক সেট সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন;
- এদের ব্যবহারিক প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

সেটের সংযোগ বা সংযোগ সেট (Union of Sets)

দুই বা ততোধিক সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে ঐ সেটগুলোর সংযোগ সেট বলে। যদি A এবং B যে কোন দুটি সেট হয় তবে তাদের সংযোগ সেটকে $A \cup B$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $A \cup B$ প্রতীকটিকে পড়া হয়, "A সংযোগ B" বা "A union B" সেট গঠনের প্রতীকে $A \cup B$ এর অর্থ দাঁড়ায় ঃ

$A \cup B = \{ x ঃ x \in A$ বা $x \in B\}$

উদাহরণ ঃ মনে করুন, $A = \{ a, b, c, d, e)$ এবং

$B = \{d, e, f, g\}$ দুটি সেট।

$\therefore \ A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

এখানে d এবং e উপাদান দুটি উভয় সেটেই আছে, কিন্তু সংযোগ সেটে d এবং e কে পুনরাবৃত্তি না করে একবার নেয়া হয়েছে।

সেটের ছেদ বা ছেদ সেট (Intersection of Sets)

দুই বা ততোধিক সেটের সকল সাধারণ (common) উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে ঐ সেটগুলোর ছেদ বা ছেদ সেট বলে। যদি A এবং B যে কোন দুটি সেট হয় তবে তাদের ছেদ সেট $A \cap B$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$A \cap B$ প্রতীকটিকে পড়া হয় 'A ছেদ B' বা 'A intersection B'

সেট গঠনের প্রতীকে $A \cap B$ এর অর্থ দাঁড়ায় ঃ $A \cap B = \{x ঃ x \in A$ এবং $x \in B\}$

উল্লেখ্য, সেটের সংযোগ এর ক্ষেত্রে 'বা' এবং সেটের ছেদ-এর ক্ষেত্রে এবং এই শব্দ দুটির বিশেষ গুরুত্ব রয়েছে।

উদাহরণ ঃ $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ এবং $B = \{8, 10, 12\}$ হলে $A \cap B$ নির্ণয় করুন।

এখানে $A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{8, 10, 12\} = \{8, 10\}$

[$\because$ শুধুমাত্র উভয় সেটের সাধারণ উপাদানগুলো নেয়া হয়েছে।]

দুটি সেটের অন্তর (*D*ifference of two sets)

A এবং B দুটি সেট হলে, যে সমস্ত উপাদান A সেটে আছে কিন্তু B সেটে নেই, এরূপ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে A এবং B এর অন্তর সেট বলে। A এবং B এর অন্তর সেটকে লেখা হয় $A - B$.

অনুরূপভাবে, B সেটে আছে কিন্তু A সেটে নেই এরূপ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে B এবং A এর অন্তরসেট বলে। B সেট এবং A সেটের অন্তরফল সেটকে লেখা হয় $B - A$.

$A - B$ কে পড়া হয়, 'A বিয়োগ B' বা 'A difference B' এবং $B - A$ কে পড়া হয় 'B বিয়োগ A' বা 'B difference A'.

যেমনঃ $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, c, e, f, g\}$ দুটি সেট হলে

$$
\begin{aligned}
A - B &= \{a, b, c, d, e\} - \{a, c, e, f, g\} \\
&= \{b, d\} \\
B - A &= \{a, c, e, f, g\} - \{a, b, c, d, e\} \\
&= \{f, g\}
\end{aligned}
$$

$A - B$ কে $A \backslash B$ এবং $B - A$ কে $B \backslash A$ দ্বারাও প্রকাশ করা হয়।

প্রতীকে $A - B$ সেটকে প্রকাশ করা হয় ঃ

$A - B = A \backslash B = \{x ঃ x \in A, x \notin B\}$

অনুরূপভাবে, $B - A = B \backslash A = \{x ঃ x \in B, x \notin A\}$.

উদাহরণ ঃ $A = \{3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$

$C = \{5, 6, 7, 8\}$ হলে $A - B$, $C - A$, $B - C$, $B - B$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $A–B = \{3, 4, 5, 6\} – \{4, 6, 8, 10\}$
$= \{3, 5\}$
$C–A = \{5, 6, 7, 8\} – \{3, 4, 5, 6\} = \{7, 8\}$
$B–C = \{4, 6, 8, 10\} –\{5, 6, 7, 8\} = \{4, 10\}$
$B–B = \{4, 6, 8, 10\} – \{4, 6, 8, 10\} = \Phi$

সার্বিক সেট (Universal Set)

যে কোন প্রসঙ্গে আলোচনাধীন সকল সেটই কোন নির্দিষ্ট সেটের উপসেট হয়ে থাকে। এক্ষেত্রে নির্দিষ্ট আলোচনাধীন সকল সেটের সেটকে সার্বিক সেট বলা হয়।

যেমনঃ উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের ১৯৯৮ সনের সকল ছাত্র-ছাত্রীদের নিয়ে গঠিত সেটটি উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের এসএসসি প্রোগ্রামের ছাত্র-ছাত্রীদের নিয়ে গঠিত সেটের সাপেক্ষে সার্বিক সেট। সার্বিক সেটের জন্য U প্রতীক ব্যবহার করা হয়।

পূরক সেট (Complement Set)

সার্বিক সেট U এর উপসেট A হলে, A সেটের সদস্য ব্যতীত U সেটের অন্যান্য সদস্যদের নিয়ে গঠিত সেটকে A সেটের পূরক সেট বলা হয়।

A যে কোন একটি সেট হলে এর পূরক সেটকে A' বা A^c প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। A' সেটের সদস্যগুলো U সেটে থাকবে কিন্তু A সেটে থাকবে না।

$\therefore \quad A'$ বা $A^c = U–A$

অতএব, $A^c = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$

উদাহরণ ঃ মনে করুন, সার্বিক সেট $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ এবং $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

সুতরাং $A^c = U–A$
$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}–\{1, 3, 5, 7, 9\}$
$= \{0, 2, 4, 6, 8\}$

নিশ্চেদ সেট (*D*isjoint Set)

দুটি সেটের কোন সাধারণ সদস্য না থাকলে তাদেরকে নিশ্চেদ সেট বলে। মনে করুন, A এবং B দুটি সেট এবং এদের মধ্যে কোন সাধারণ উপাদান বা সদস্য বিদ্যমান নাই অর্থাৎ $A \cap B = \Phi$, তাহলে A এবং B সেট দুটি নিশ্চেদ সেট।

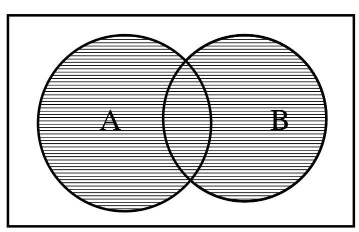
উদাহরণঃ যদি $A = \{2, 4, 6, 8\}$ এবং $B = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$ হয়, তাহলে $A \cap B = \Phi$ (ফাঁকা সেট) সুতরাং A এবং B সেট দুটি নিশ্চেদ সেট।

ভেনচিত্র (Venn *D*iagram)

ইংরেজ যুক্তিবিদ জন ভেন (John venn, 1834–1923) এর নামানুসারে সেটের সংযোগ, ছেদ, পূরক ইত্যাদি কার্যবিধি এবং তাদের জন্য বলবৎ বিধিসমূহের জ্যামিতিক প্রতিরূপকে ভেনচিত্র বলে। এতে বিবেচনাধীন সেটগুলোকে সমতলে অবস্থিত বিভিন্ন আকারের জ্যামিতিক চিত্র হিসেবে গণ্য করা হয়। সাধারণত আয়তাকার ক্ষেত্র দ্বারা সার্বিক সেট বোঝানো হয় এবং বৃত্তাকার বা ত্রিভুজকার ক্ষেত্র উপসেট বুঝাতে ব্যবহার করা হয়। ভেনচিত্রকে কখনও কখনও ভেন ইউলার চিত্র (Venn Euler Diagram) বলা হয়।

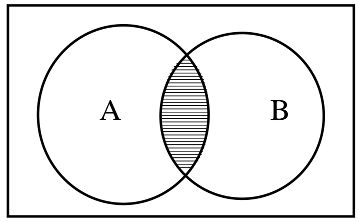
নিম্নে কয়েকটি ভেনচিত্র দেখানো হল ঃ

(i)



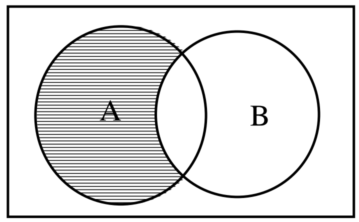
ভেনচিত্র ঃ $A \cup B$ (গাঢ় অংশটুকু)

(ii)



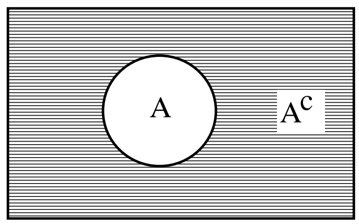
ভেনচিত্র ঃ $A\cap B$ (গাঢ় অংশটুকু)

(iii)



ভেনচিত্র ঃ $A-B$ (গাঢ় অংশটুকু)

(iv)



ভেনচিত্র ঃ A^c (গাঢ় অংশটুকু)

- দুইটি সেটের সংযোগকে $\cup$, দুইটি সেটের ছেদকে $\cap$, দুইটি সেটের অন্তরকে - বা \ এবং সার্বিক সেটকে U প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- A কোন একটি সেট হলে A সেটের পূরক সেটকে A' বা A^c প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- A ও B সেট দুটি নিশ্চেদ সেট হবে যদি $A \cap B = \Phi$ হয়।

কতিপয় সমাধানকৃত উদাহরণ

উদাহরণ-1 ঃ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $B = \{5, 6, 7\}$ হলে, $A\cup B$ এবং $A\cap B$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $A\cup B$ হল A সেটের সকল উপাদানের সাথে B সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেট।

$$\therefore\ A\cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{5, 6, 7\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

অনুরূপে, $A\cap B$ হল A ও B সেটের সাধারণ উপাদান নিয়ে গঠিত সেট।

$$\therefore\ A\cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{5, 6, 7\}$$
$$= \{5\}$$

উদাহরণ-2 ঃ যদি $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{a, e, i, o, u\}$, $C = \{m, n, o, p, q, r\}$ হয়, তবে $(A\cup B)\cap C$ এবং $A\cap(B\cap C)$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রথম অংশ ঃ $(A\cup B)\cap C$

$$A\cup B = \{a, b, c, d, e, f\} \cup \{a, e, i, o, u\}$$
$$= \{a, b, c, d, e, f, i, o, u\}$$
$$\therefore\ (A\cup B)\cap C$$
$$= \{a, b, c, d, e, f, i, o, u\} \cap \{m, n, o, p, q, r\}$$
$$= \{o\}$$

দ্বিতীয় অংশ ঃ $A \cap (B \cap C)$

$B \cap C = \{a, e, i, o, u\} \cap \{m, n, o, p, q, r\}$
$= \{o\}$

$A \cap (B \cap C) = \{a, b, c, d, e, f\} \cap \{o\}$
$= \Phi$ (ফাঁকা সেট)

উদাহরণ-3 ঃ যদি $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ এবং $C = \{2, 3, 4, 5\}$ হয়, তবে নিম্নলিখিত সেটগুলো নির্ণয় করুন।

(i) $C - B$, (ii) A' (iii) $A' \cup C'$ (iv) $A' \cap B'$

সমাধান ঃ (i) $C - B = \{2, 3, 4, 5\} - \{2, 4, 6\}$
$= \{3, 5\}$

(ii) $A' = U - A$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 3, 5\}$
$= \{2, 4, 6, 7\}$

(iii) $A' \cup C'$
$A' = \{2, 4, 6, 7\}$ [$\therefore$ ((ii) দ্বারা]
$C' = U - C$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{2, 3, 4, 5\}$
$= \{1, 6, 7\}$
$\therefore A' \cup C' = \{2, 4, 6, 7\} \cup \{1, 6, 7\}$
$= \{1, 2, 4, 6, 7\}$

(iv) $A' \cap B'$
$A' = \{2, 4, 6, 7\}$
$B' = U - B$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{2, 4, 6\}$
$= \{1, 3, 5, 7\}$
$A' \cap B' = \{2, 4, 6, 7\} \cap \{1, 3, 5, 7\}$
$= \{7\}$

উদাহরণ-4 ঃ মনে করুন, $U = \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4\}$
$A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, 1, 3\}$

প্রমাণ করুন ঃ (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

সমাধান ঃ দেয়া আছে, $U = \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4\}$
$A = \{a, b, c, d\}$
$B = \{a, c, 1, 3\}$

(i) এখানে $A \cup B = \{a, b, c, d\} \cup \{a, c, 1, 3\}$
$= \{a, b, c, d, 1, 3\}$
$\therefore (A \cup B)' = U - (A \cup B)$
$= \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4\} - \{a, b, c, d, 1, 3\}$
$= \{e, 2, 4\}$

আবার, $A' = U - A$
$= \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4\} - \{a, b, c, d\}$
$= \{e, 1, 2, 3, 4\}$
$B' = U - B$
$= \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4\} - \{a, c, 1, 3\}$
$= \{b, d, e, 2, 4\}$
$\therefore A' \cap B' = \{e, 1, 2, 3, 4\} \cap \{b, d, e, 2, 4\}$
$= \{e, 2, 4\}$

$\therefore$ আমরা পাই, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ii) $A \cap B = \{a, b, c, d\} \cap \{a, c, 1, 3\}$
$= \{a, c\}$
$(A \cap B)' = U - (A \cap B)$

$= \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4\} - \{a, c\}$
$= \{b, d, e, 1, 2, 3, 4\}$

আবার $A' \cup B' = \{e, 1, 2, 3, 4\} \cup \{b, d, e, 2, 4\}$
$= \{b, d, e, 1, 2, 3, 4\}$

$\therefore\ (A \cap B)' = A' \cup B'$

উদাহরণ-5 ঃ যে কোন দুটি সেট A এবং B এর ক্ষেত্রে প্রমাণ করুন ঃ

(i) $A \subset A \cup B$ এবং $B \subset A \cup B$

(ii) $A \cap B \subset A$ এবং $A \cap B \subset B$

সমাধান ঃ (i) সেট সংযোগের সংজ্ঞানুসারে, A সেটের সকল সদস্য $A \cup B$ সেটে থাকে।

$\therefore$ উপসেটের সংজ্ঞানুসারে, $A \subset A \cup B$

আবার সেট সংযোগের সংজ্ঞানুসারে, B সেটের সকল সদস্য $A \cup B$ সেটে আছে।

$\therefore\ B \subset A \cup B$

$\therefore\ A \subset A \cup B$ এবং $B \subset A \cup B$

(ii) মনে করুন, $x \in A \cap B$

সুতরাং সেটের ছেদের সংজ্ঞানুসারে, $x \in A$ এবং $x \in B$

আবার উপসেটের সংজ্ঞানুসারে, $A \cap B \subset A$ এবং $A \cap B \subset B$

উদাহরণ-6 ঃ সার্বিক সেট U এর ক্ষেত্রফল দুটি উপসেট A এবং B এর জন্য প্রকাশ করুন ঃ $A \setminus B = A \cap B'$

প্রমাণ ঃ মনে করুন, $x \in A \setminus B$

$\therefore\ x \in A$ এবং $x \notin B$

বা, $x \in A$ এবং $x \in B'$

বা, $x \in A \cap B'$

$\therefore\ A \setminus B \subset A \cap B'$ .... (i)

আবার মনে করুন, $x \in A \cap B'$

$\therefore\ x \in A$ এবং $x \in B'$

বা, $x \in A$ এবং $x \notin B$

বা, $x \in A \setminus B$

বা, $x \in A \setminus B$

$\therefore\ A \cap B' \subset A \setminus B$ .... (ii)

সুতরাং (i) এবং (ii) হতে পাই,

$A \setminus B = A \cap B'$

উদাহরণ-7 ঃ সার্বিক সেট U এর যেকোন দুটি উপসেট A এবং B এর জন্য প্রমাণ করুন ঃ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

প্রমাণ ঃ মনে করুন, $x \in (A \cup B)'$

$\therefore\ x \notin A \cup B$

বা, $x \notin A$ এবং $x \notin B$

বা, $x \in A'$ এবং $x \in B'$

বা, $x \in A' \cap B'$

$\therefore\ (A \cup B)' \subset A' \cap B'$ ....(i)

আবার মনে করুন, $x \in A' \cup B'$

$\therefore\ x \in A'$ এবং $x \in B'$

বা, $x \notin A$ এবং $x \notin B$

বা, $x \notin A \cup B$

বা, $x \in (A \cup B)'$

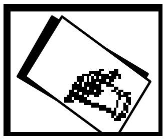
$\therefore\ A' \cap B' \subset (A \cup B)'$ ....(ii)

$\therefore$ (i) এবং (ii) থেকে পাই;

$(A\cup B)' = A'\cap B'$

উল্লেখ্য, $(A\cup B)' = A'\cap B'$ এবং $(A\cap B)' = A'\cup B'$

সূত্র দুটিকে দ্যা মরগান (*D*e-Morgan's) সূত্র বলা হয়।



অনুশীলনী-১.২

1. মনে করুন, সার্বিক সেট U = {a, b, c, d, e}, এর দুটি উপসেট A={a, b, d} এবং B={b, d, e} নিচের সেটগুলো করুন ঃ

   (i) $A\cup B$, (ii) $A\cap B$, (iii) A', (iv) B',
   (v) $B-A$, (vi) $A'\cap B$, (vii) $A\cup B'$ (viii) $B'-A'$
   (ix) $(A\cap B)'$, (x) $(A\cup B)'$

2. যদি $A = \{1, 2, 3\}$, $B=\{x \mid x$ স্বাভাবিক জোড় সংখ্যা$\}$,
   $C = \{x \mid x$ হচ্ছে 3 এর গুণিতক $\}$ হয়
   তাহলে (i) $A\cup(B\cap C)$ এবং (ii) $A\cap(B\cup C)$ নির্ণয় করুন।

3. যদি A = {a, b, c, d}, B={a, d, f, h}, C= {c, d, e, f} হয়, তবে
   (i) $A\cap B$, (ii) $A\cap C$, (iii) $B\cap C$ নির্ণয় করুন।
   আরও দেখান যে, $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

4. যদি U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A ={2, 3, 4, 5}, B= {4, 6, 8}, C={3, 4, 5, 6, 7} হয়, তবে
   (i) A', (ii) B', (iii) $(A\cap C)'$, (iv) $(A\cup B)'$, (v) $(A')'$ এবং (vi) $(B-C)'$ নির্ণয় করুন।

5. দেয়া আছে, U = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},
   A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, B ={0, 1, 4, 6}
   C = {3, 4, 5, 7, 9}
   প্রমাণ করুন ঃ (i) $(A\cup B)' = A'\cap B'$
   (ii) $(A\cap B)' = A'\cup B'$
   (iii) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

6. যে কোন তিনটি সেট A, B ও C প্রমাণ করুন ঃ
   (i) $A\cup (B\cup C) = (A\cup B) \cup (A\cup C)$
   (ii) $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap(A\cap C)$

7. সার্বিক সেট U এর যে কোন দুটি উপসেট A ও B এর জন্য প্রমাণ করুন ঃ $(A\cap B)' = A'\cup B'$

পাঠ ৩ ক্রমজোড় ও কার্তেসীয় গুণজ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ক্রমজোড় কী এবং কিভাবে লিখতে হয় তা জানতে পারবেন;
- কার্তেসীয় গুণজের ব্যাখ্যা দিতে পারবেন।

ক্রমজোড় (Ordered Pair) :
যে কোন সেটের দুটি ভিন্ন বা অভিন্ন উপাদান a, b নিয়ে a কে প্রথম পদ এবং b কে দ্বিতীয় পদ বিবেচনা করে ক্রমজোড় গঠন করা হয়। a কে প্রথম পদ এবং b কে দ্বিতীয় পদ ধরে আমরা (a, b) ক্রমজোড় পাই। প্রথম উপাদান a এবং দ্বিতীয় উপাদান b বিশিষ্ট ক্রমজোড়কে প্রথম বন্ধনীর মধ্যে প্রথমে a তারপর কমা (,) এবং পরে b লিখে অর্থাৎ (a, b) আকারে প্রকাশ করা হয়।

(a, b) প্রতীকটিকে কেবল জোড় না বলে ক্রমজোড় বলা হয়। কারণ, প্রথম অবস্থান ও দ্বিতীয় অবস্থানের ক্রম অনুসারে উপাদান দুটি বিন্যস্ত থাকে।

a এবং b ভিন্ন উপাদান হলে, (a, b) ◘ (b, a)। (a, b) = (b, a) হবে যদি এবং কেবল যদি a=b হয়।

দুটি ক্রমজোড় (a, b) ও (x, y) সমান হবে অর্থাৎ $(a, b) = (x,y)$ হবে যদি এবং কেবল যদি $a=x$ এবং $b=x$ হয়।

উদাহরণ ঃ কার্তেসীয় সমতলে প্রতিটি বিন্দুই দুটি বাস্তব সংখ্যার ক্রমজোড় নির্দেশ করে। লেখচিত্রে (x, y) দ্বারা একটি বিন্দু বোঝায়, যার ভুজ x এবং কোটি y। ক্রমজোড় (5, 3) এবং (3, 5) দ্বারা লেখচিত্র দুটি ভিন্ন বিন্দু বুঝায়। তাই (5, 3) এবং (3, 5) দুটি ভিন্ন ক্রমজোড়।

কার্তেসীয় গুণজ (*C*artesian Product)

দুটি সেটের সদস্য নিয়ে গঠিত সম্ভাব্য সকল ক্রমজোড়ের সেটকে উক্ত সেট দুটির কার্তেসীয় গুণজ সেট বলে।

মনে করুন, A ও B যেকোন দুটি সেট। A ও B সেটের সকল ক্রমজোড়ের সেটই হল কার্তেসীয় গুণজ সেট। A ও B সেট দুটি কার্তেসীয় গুণজ সেটকে $A\times B$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় "A গুণজ B" বা, "A cross B".

আমরা $A\times B$ কে লিখতে পারি,

$$A\times B = \{(a, b) \mid a\in A \text{ এবং } b\in B\}$$

দুটি সমান সেটের কার্তেসীয় গুণজ হবে, $A\times A = \{(c, d) \mid c, d \in A\}$.

উদাহরণ ঃ ১। ধরুন $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{a, b\}$ দুটি সেট। এদের কার্তেসীয় গুণজ সেট $A\times B$

$$\therefore\ A\times B = \{1, 2, 3\} \times \{a, b\}$$
$$= \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a)\ (3, b)\}$$

২। আবার ধরুন $S = \{x, y\}$ একটি সেট।

$$\therefore\ S\times S = \{x, y\} \times (x, y\}$$
$$= \{(x, x), (x,y), (y, x), (y, y)\}$$

কতিপয় সমাধানকৃত উদাহরণ

উদাহরণ-1 ঃ যদি $(x+y, 1) = (3, x-y)$ হয় তবে x এবং y এর মান নির্ণয় করুন। অতঃপর (x, y) নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে, $(x+y, 1) = (3, x-y)$

$\therefore$ আমরা পাই, $x+y = 3 \rightarrow (1)$ [$\therefore$ $(a,b) = (x, y) \Rightarrow a=x, b= y$]

$x-y = 1 \rightarrow (2)$

(i) নং এবং (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$x+y+x-y = 3+1$

বা, $2x = 4$

বা, $x = \dfrac{4}{2} = 2$

$x = 2$ মানটি (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$2+y = 3$

বা, $y = 3 - 2 = 1$

$\therefore\ y = 1$

$\therefore\ x = 2, y = 1$

অতএব, $(x, y) = (2, 1)$

উদাহরণ-2 ঃ $A = \{1, 2, 3\}, B = \{6, 7\}$ হলে $A\times B$ এবং $B\times A$ নির্ণয় করুন। অতঃপর প্রমাণ করুন $A\times B \neq B\times A$

সমাধান ঃ দেয়া আছে, $A = \{1, 2, 3\}, B = \{6, 7\}$

$\therefore A\times B\ \ \{1, 2, 3\} \times \{6, 7\}$

$= \{(1, 6), (1, 7), (2, 6), (2, 7), (3, 6), (3, 7)\}$

$B\times A\ = \{\{6, 7\} \times \{1, 2, 3\}$

$= \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (7, 1), (7, 2), (7, 3)\}$

উপরের $A\times B$ এবং $B\times A$ সেট দুটিতে লক্ষ্য করলে দেখা যায় যে, এদের উপাদানগুলো সম্পূর্ণ ভিন্ন।

অতএব, $A\times B \neq B\times A$

উদাহরণ-3 ঃ $A = \{2, 3\}, B =\{4, 5\}$ এবং $C = \{5, 6\}$ হলে $A\times(B\cap C)$ বের করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে, $A = \{2,3\}, B= \{4, 5\}, C=5, 6\}$

প্রথমে $B\cap C$ বের করুন।

এখানে $B\cap C = \{4, 5\} \cap \{5, 6\} = \{5\}$

$\therefore\ \ A \times (B\cap C)$

$= \{2, 3\} \times \{5\}$

$= \{(2, 5), (3,5)\}$

উদাহরণ-4 ঃ যদি $A = \{a, b\}, B = \{1, 2\}$ এবং $C = \{2, 3\}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন $A\times(B\cup C) = (A\times B) \cup (A\times C)$

সমাধান ঃ দেয়া আছে,

$A = \{a, b\}, B = \{1, 2\}, C = \{2, 3\}$

এখানে $B\cup C = \{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

বামপক্ষ $= A\times(B\cup C)$

$= \{a, b\} \times \{1, 2, 3\}$

$= \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

আবার $A\times B = \{a, b\} \times \{1, 2\}$

$= \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$

$A\times C = \{a, b\} \times \{2, 3\}$

$= \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3)\}$

ডানপক্ষ $= (A\times B) \cup (A\times C)$

$= \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\} \cup \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3)\}$

$= \{a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

অতএব আমরা পাই, $A\times(B\cup C) = (A\times B) \cup (A\times C)$

উদাহরণ-5 ঃ আজাদ ও শাহীন দুই বন্ধু। কোন এক নির্দিষ্ট দিনে ঠিক করেছে টিফিন পিরিয়ডে আজাদ যাবে হয় ক্যান্টিনে, লাইব্রেরীতে না হয় খেলার মাঠে। শাহীন যাবে হয় লাইব্রেরীতে বা বাগানে। ঐ সময় তাদের সম্ভাব্য অবস্থানগুলো গুণজ সেট দ্বারা বর্ণনা করুন। ক্রমজোড়ে আজাদের অবস্থান প্রথম বিবেচ্য।

সমাধান ঃ মনে করুন, ক্যান্টিন $= c$

লাইব্রেরী $= l$

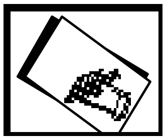
মাঠ $= f$

বাগান $= g$

ধরুন, আজাদের সেট A এবং শাহীনের সেট B

অতএব $A = \{c, l, f\}, B = \{l, g\}$

$\therefore\ A \times B = \{c, l, f\} \times \{l, g\}$
$= \{(c, l), (c, g), (l, l), (l, g), (f, l), (f, g)\}$



অনুশীলনী-১.৩

1. $(x+y, 0) = (1, x-y)$ হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় করুন। অতঃপর (x, y) বের করুন।
2. যদি $(x-1, y+2) = (y-2, 2x+1)$ হয় তবে (x, y) নির্ণয় করুন।
3. যদি $A = \{a, b, c\}, B = \{p, q\}$ হয়, তবে $A\times B$ এবং $B\times A$ নির্ণয় করুন।
4. যদি $A = \{a, b\}, B = \{2, 3\}$ এবং $C = \{3, 4\}$ হয়, তবে $A\times (B\cup C)$ বের করুন।
5. যদি $A = \{a, b\}, B = \{x, y\}$ এবং $C = \{p, q\}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন ঃ $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$
6. ধরুন $P = \{1, 2, x\}, Q = \{a, x, y\}, R = \{x, y, z\}$.

   নির্ণয় করুন ঃ (i) $P\times Q$ (ii) $(P\times Q)\times R$
7. ফাহমি এবং মিন্টু একত্রে বাসযোগে ঢাকা আসছে। তাদের আলোচনায় জানা গেল ফাহমি বেড়াবে মামা ও খালার বাসায় এবং মিন্টু বেড়াবে চাচা, ফুফু ও দাদার বাসায়। একই সময় ঢাকায় তাদের সম্ভাব্য অবস্থানগুলো ক্রমজোড়ের সাহায্যে বর্ণনা করুন। ক্রমজোড়ে ফাহমির অবস্থান প্রথম বিবেচ্য।

পাঠ ৪ অন্বয় ও ফাংশন

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- অন্বয় ও ফাংশন কি তা জানতে পারবেন;
- অন্বয় ও ফাংশনের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন।

অন্বয় (Relation) :

মনে করুন, সকল x এর সেট A এবং সকল y এর সেট B.

সুতরাং $A \times B$ দ্বারা সকল $\{(x,y)\}$ এর সেট নির্দেশ করে এবং $A\times B = \{(x, y) \mid x\in A,\ y\in B\}$ প্রতীক দ্বারা সূচিত হয়। ধরুন, A ও B সেটের অন্বয় R দ্বারা নির্দেশিত। এই R দ্বারা এমন একটি খোলা বাক্য বোঝানো হয় যা $A\times B$ সেটের সদস্য (x, y) জোড়ের জন্য $P(x, y)$ সত্য বা মিথ্যা হতে পারে। এখানে $P(x, y)$ দ্বারা x ও y এর মধ্যে সম্পর্ক বোঝায়। x ও y সম্পর্কিত হলে $P(x, y)$ সত্য আবার x ও y সম্পর্কিত না হলে $P(x, y)$ সত্য নয়।

$$\therefore\ R \subseteq A\times B$$

সাধারণত $R = \{A, B, P(x,y)\}$ দ্বারা অন্বয় সূচিত করা হয়। aRb এর অর্থ হল a, b এর সাথে সম্পর্কিত। aRb হলে P(a, b) সত্য হবে। আবার P(a, b) সত্য হলে aRb হবে। অতএব, $x\in A,\ y\in B$ হলে $R = \{(x, y) \mid (x, y) \in A\times B\}$ আবার x ও y সম্পর্কিত না হলে $(x, y) \notin R$ এবং বিপরীত ক্রমেও সত্য।

উদাহরণ-1 ঃ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{1, 3, 5\}$ দুটি সেট বিবেচনা করুন।

সেট দুটির কার্তেসীয় গুণজ, $A\times B = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 3, 5\}$

$= \{(1,1), (1,3), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}$

A সেটের যে যে উপাদান B সেটের যে যে উপাদানের চেয়ে ছোট তাদের নিয়ে ক্রমজোড়ের একটি সেট F গঠন করুন।

অতএব, $F = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$

স্পষ্টতই, F সেটের অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান A সেট থেকে এবং দ্বিতীয় উপাদান B সেট থেকে নেয়া হয়েছে যেন প্রথম উপাদানটি দ্বিতীয় উপাদানের চেয়ে ছোট হয়। এক্ষেত্রে বলা হয়, F সেটটি A থেকে B সেটে একটি অন্বয়।

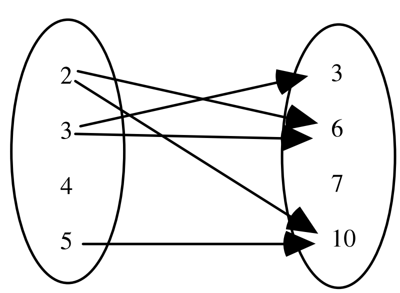
প্রতীকের সাহায্যে আমরা অন্বয়টি নিম্নলিখিতভাবে বর্ণনা করতে পারিঃ

$F = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B$ এবং $x < y\}$

উল্লেখ্য, F সেট $A\times B$ কার্তেসীয় গুণজ সেটের একটি উপসেট অর্থাৎ $F \subset A\times B$

উদাহরণ-2 ঃ দ্বিতীয় উদাহরণ হিসেবে $A = \{2, 3, 4, 5\}$ এবং $B = \{3, 6, 7, 10\}$ দুটি সেট বিবেচনা করুন।

A সেটের যে সমস্ত সদস্য দ্বারা B সেটের যে সদস্যগুলো বিভাজ্য হয় তাদের অন্বিত করে নিচের চিত্রে দেখানো হল ঃ



সেট-A সেট-B

এরূপ অন্বিত সদস্যদের দ্বারা গঠিত ক্রমজোড়গুলোর সেট D গঠন করুন।

অতএব, $D = \{(2, 6), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (5, 10)\}$

এই D সেটটি দ্বারা উল্লেখিত বিভাজ্যতা সম্পর্কটি বর্ণনা করা যায়।

D সেটে অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম পদ A সেটের সদস্য ও দ্বিতীয় পদ B সেটের সদস্য এবং প্রথম পদ দ্বারা দ্বিতীয় পদ বিভাজ্য। এখানে D সেটটি A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয়

এবং $D = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B$ এবং x দ্বারা y বিভাজ্য$\}$

স্পষ্টতই, $D \subset A \times B$

সংজ্ঞা ঃ A এবং B দুটি সেট হলে, কার্তেসীয় গুণজ সেট $A \times B$ এর কোন অশূন্য উপসেটকে A থেকে B তে একটি অন্বয় (relation) বলে।

আবার, A সেট হলে $A \times A$ এর কোন অশূন্য উপসেট A সেটে একটি অন্বয় বলা হয়।

প্রত্যেক অন্বয় এক বা একাধিক ক্রমজোড়ের একটি সেট।

অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain and Range of relation) :

ধরুন, A সেট থেকে B সেটে F একটি অন্বয়, অর্থাৎ $F \subset A \times B$, F সেটে অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেটকে F এর ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটকে F এর রেঞ্জ বলা হয়।
F এর ডোমেনকে ডোম F এবং রেঞ্জকে রেঞ্জ F লিখে সংক্ষেপে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ-3 ঃ পূর্বে উদাহরণ-1 এ বর্ণিত অন্বয় $F = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $F = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$
F এর সদস্য ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানগুলোর সেট $\{1, 2, 3, 4\}$ এবং দ্বিতীয় উপাদানগুলোর সেট $\{3, 5\}$
অতএব, ডোম $F = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং রেঞ্জ $F = \{3, 5\}$.

ফাংশন (Function)

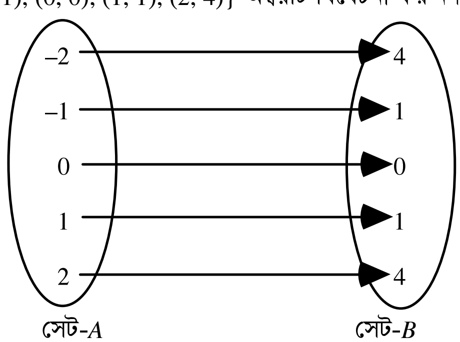
ধরুন, A ও B দুটি অশূন্য সেট। যদি A ও B এর মধ্যে এমন একটি নিয়ম হয় যে, যাতে A এর প্রত্যেকটি পদ x, B এর কোন না কোন একক পদ y এর সাথে যোগাযোগ সৃষ্টি করে, তবে এই নিয়মটিকে ফাংশন বলে।

উল্লেখ্য, A সেটের একটি উপাদানের জন্য B সেটে কেবলমাত্র একটি উপাদান থাকবে এবং একাধিক উপাদান থাকতে পারবে না। তবে A সেটের একাধিক উপাদানের জন্য B সেটে একটি উপাদান থাকতে পারে। A সেটের x উপাদান B সেটের যে উপাদানের সাথে সম্পর্কিত তাকে $f(x)$ বা, $\Phi(x)$ বা, $\psi(x)$ বা, $g(x)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।
প্রতীকের সাহায্যে লিখা যায় ঃ $f : A \to B$, বা, $\Phi : A \to B$, $\psi : A \to B$ ইত্যাদি।

উদাহরণ-4 ঃ পূর্বে উদাহরণ-2 এ বর্ণিত চিত্র থেকে দেখা যায় যে, A সেটের উপাদান 2, B সেটের দুটি উপাদান 6 এবং 10 এর সাথে সম্পর্কিত।
আবার A সেটের উপাদান 3, B সেটের দুটি উপাদান 3 এবং 6 এর সাথে সম্পর্কিত।
সুতরাং A এবং B এর মধ্যকার সম্পর্ক ফাংশন নয়।

ফাংশনের বিকল্প সংজ্ঞা (অন্বয়ের মাধ্যমে) ঃ

ফাংশন বিশেষ ধরনের অন্বয়। যদি কোন অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট দুটি ভিন্ন ক্রমজোড় না থাকে, তবে ঐ অন্বয়কে ফাংশন বলা হয়।
উদাহরণস্বরূপ, $F = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$ অন্বয়টি বিবেচনা করুন।



লক্ষ্য করুন, F অন্বয়ের সদস্য ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান ভিন্ন ভিন্ন। অতএব, সংজ্ঞা অনসুারে, F অন্বয়টি একটি ফাংশন।

কতিপয় সমাধানকৃত উদাহরণ

উদাহরণ-1 ঃ $A = \{2, 3, 4\}$ সেট থেকে $B = \{3, 5\}$ সেটে বর্ণিত S একটি অন্বয়, যেখানে $S = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B$ এবং $x<y\}$, S কে ক্রমজোড়ের সেটরূপে প্রকাশ করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে, $A = \{2, 3, 4\}, B = \{3, 5\}$

$$\therefore\ A \times B = \{2, 3, 4\} \times \{3, 5\}$$
$$= \{(2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 3), (4, 5)\}$$

এখানে S এমন একটি অন্বয় যেখানে $x<y,\ x \in A,\ y \in B$ অর্থাৎ A সেট থেকে নেয়া প্রথম উপাদান, B সেট থেকে নেয়া দ্বিতীয় উপাদানের চেয়ে ছোট।

অতএব, $S = \{(2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$

উদাহরণ-2 ঃ প্রদত্ত T অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় করুনঃ

(i) $T = \{(1, 5), (2, 10), (3, 15), (4, 20)\}$

(ii) $T = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), (1, 1), (1, -1), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, -2\right)\right\}$

সমাধান ঃ (i) $T = \{(1, 5), (2, 10), (3, 15), (4, 20)\}$

T এর ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানগুলোর সেট $\{1, 2, 3, 4\}$ এবং দ্বিতীয় উপাদানগুলোর সেট $\{5, 10, 15, 20\}$

অতএব, ডোম $T = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং রেঞ্জ $T = \{5, 10, 15, 20\}$

(ii) $T = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), (1, 1), (1, -1), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, -2\right)\right\}$

T এর ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানগুলোর সেট $\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}\right\}$ এবং দ্বিতীয় উপাদানগুলোর সেট $\{0, 1, -1, 2, -2\}$

অতএব, ডোম $T = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}\right\}$ এবং রেঞ্জ $T = \{0, 1, -1, 2, -2\}$

উদাহরণ-3 ঃ যদি $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ হয়, তবে A সেটে অন্বয়

$S = \{(x, y)$ ঃ $x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$ কে তালিকা পদ্ধতিতে বর্ণনা করুন এবং S এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$S = \{(x, y)$ ঃ $x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$

প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $y = x^2$ এর মান নির্ণয় করুন ঃ

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

সেহেতু $y \in A$ অর্থাৎ y, A সেটের সদস্য,

অতএব, $4 \notin A$

$\therefore\ (-2, 4) \notin S, (2, 4) \notin S$

$\therefore\ S = \{(x, y)$ ঃ $x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$

$= \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$

সুতরাং ডোম $S = \{-1, 0, 1\}$ এবং রেঞ্জ $= \{0, 1\}$

উদাহরণ-4 ঃ প্রদত্ত T অন্বয়টিকে ক্রমজোড়ের সেটরূপে প্রকাশ করুন এবং অন্বয়টি ফাংশন কিনা নির্ধারণ করুনঃ

$T = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x - y = 1\}$ যেখানে $A = \{-3, -1, 1, 2\}$

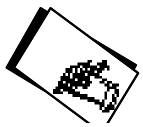
সমাধান ঃ প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $x - y = 1$ বা $y = x - 1$ এর মান নির্ণয় ঃ

x	-3	-1	0	1	2
$y = x-1$	-4	-2	-1	0	1

কিন্তু $-4 \notin A$, অতএব $(-3, -4) \notin T$

$\therefore\ T = \{(-1, -2), (0, -1), (1, 0), (2, 1)\}$

ফাংশনের সংজ্ঞানুযায়ী, কোন অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট দুটি ভিন্ন ক্রমজোড় না থাকলে ঐ অন্বয়টি ফাংশন হয়। অতএব, T অন্বয়টি একটি ফাংশন।



অনুশীলনী-১.৪

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ সেট থেকে $B = \{1, 3, 5\}$ সেটে বর্ণিত S একটি অন্বয়, যেখানে $S = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B$ এবং $x + y = 7\}$. S কে ক্রমজোড়ের সেটরূপে প্রকাশ করুন।

2. প্রদত্ত S অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় করুন ঃ
   (i) $S = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$
   (ii) $S = \{(-3, 8), (-2, 3), (-1, 0), (2, 3)\}$
   (iii) $S = \{(-3, -3), (-1, -1), (0, 1)\}$

3. প্রদত্ত S অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে বর্ণনা করুন এবং ডোম S ও রেঞ্জ S নির্ণয় করুন। যেখানে $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$

4. প্রদত্ত T অন্বয়টি ক্রমজোড়ের সেটরূপে লিখুন এবং অন্বয়টি ফাংশন কিনা নির্ণয় করুন যেখানে $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $T = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$

5. N স্বাভাবিক সংখ্যার সেট এবং $S = \{(x,y) \mid x \in N, y \in N, 2x + y = 10\}$ হলে, অন্বয় থেকে S ক্রমজোড়ের সেটরূপে প্রকাশ করুন এবং এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

পাঠ ৫ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জের সংজ্ঞা দিতে পারবেন;
- ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে পারবেন।

ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain and Range of Function):

সেহেতু প্রত্যেক ফাংশন একটি অন্বয়, সুতরাং ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ বলতে অন্বয় হিসেবে এর ডোমেন এবং রেঞ্জকেই বোঝায়। A সেট থেকে B সেটে f যদি একটি ফাংশন হয় তবে ডোমেন f $=A$ এবং B সেটের যে সমস্ত উপাদান সকল $a\in A$ এর ছবিরূপে পাওয়া যায় ঐ উপাদানগুলোই f এর রেঞ্জ। সুতরাং রেঞ্জ f $\subset B$ যদি f একটি ফাংশন হয় এবং ডোম f $=A$ এবং রেঞ্জ f $\subset B$ হয়, তবে f কে A থেকে B এ বর্ণিত ফাংশন বলা হয় এবং $f: A \to B$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

$f: A\to B$ দ্বারা বোঝায় যে, f একটি ফাংশন যার ডোমেন A এবং রেঞ্জ B এর উপসেট।

যদি f ফাংশন হয় এবং $(x, y)\in F$ হয়, তবে y কে f এর অধীনে ছবি (image) বলা হয় এবং $y = f(x)$ লিখা হয়।

$F = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$ অন্বয়টি একটি ফাংশন। এই ফাংশনের ক্ষেত্রে,

$f(-2) =4, f(-1), f(0)=0, f(1) =1, f(2) = 4$

এই ফাংশনের ডোমেন $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং রেঞ্জ $=\{0, 1, 4\}$.

কোন ফাংশন f এর ডোমেন এবং ডোমেনের প্রত্যেক সদস্য x এর অনন্য ছবি $f(x)$ নির্দিষ্ট করা হলেই ফাংশনটি নির্ধারিত হয়। অনেক সময় ডোমেন উহ্য রাখা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে, ডোমেন হিসেবে R (বাস্তব সংখ্যার সেট) এর ঐ উপসেটকে গ্রহণ করা হয় যার প্রত্যেক সদস্য x এর জন্য R–এ $f(x)$ নির্ধারিত থাকে।

উদাহরণ ঃ মনে করুন, f একটি ফাংশন এবং ইহা প্রতিটি বাস্তব সংখ্যাকে এর বর্গের সাথে অন্বিত করে। অর্থাৎ x যদি একটি বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে $f(x) = x^2$

স্পষ্টতই, ফাংশন f এর ডোমেন হচ্ছে সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট, কিন্তু রেঞ্জ হচ্ছে কেবলমাত্র ধনাত্মক সংখ্যার সেট। যেমন, $f(-2)=4, f(-3)=9, f(2)=4, f(3)=9$.

আমরা বলতে পারি, (–3,9), (3, 9), (2, 4), (–2, 4),-------- ইত্যাদি ক্রমজোড়গুলো একটি ফাংশন এবং এ ফাশনটি সংকেতের মাধ্যমে লিখতে পারি ঃ

$f : R\to R, f(x) = x^2$

উল্লেখ্য, $f \subset R\times R$

সমাধানকৃত উদাহরণ

উদাহরণ-1ঃ $f(x) = 2x-1$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য

(i) $f(-2), f(0), f(2)$ নিণয় করুন।

(ii) $f\left(\frac{a+1}{2}\right)$ নির্ণয় করুন, যেখানে $a\in R$

(iii) $f(x) = 10$ হলে, x এর মান নির্ণয় করুন।

(iv) $f(x) = y$ হলে, x নির্ণয় করুন, যেখানে $y\in R$।

সমাধান ঃ দেয়া আছে, $f(x) = 2x-1$

(i) $f(-2) = 2 \times (-2)-1$ [এখানে $x = -2$]
$= -4-1$
$= -5$

$f(0) = 2\times0-1$ [এখানে $x = 0$]

$= 0 - 1$
$= -5$
$f(2) = 2\times(2) -1$ [এখানে $x = 2$]
$= 4-1 = 3$

(ii) $f\left(\frac{a+1}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{a+1}{2}\right) -1$ [এখানে $x = \frac{a+1}{2}$]

$= (a+1) - 1$

$= a+1-1 = a$

(iii) $f(x) = 5$
বা, $2x-1 = 5$ [$\because$ দেয়া আছে, $f(x) = 2x-1$]
বা, $2x = 5+1 = 6$
বা, $x = \frac{6}{2} = 3$
অতএব, $x = 3$

(iv) $f(x) = y$
বা, $2x-1 = y$
বা, $2x = 1+y$
$\therefore \quad x = \frac{1+y}{2}$

উদাহরণ-2 ঃ $f(x) = \sqrt{1-x}$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় করুন। $f(-3)$, $f(o)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f(2)$ এর মধ্যে যেগুলো সংজ্ঞায়িত সেগুলো নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $f(x) = \sqrt{1-x}$

অতএব, $\sqrt{1-x} \in R$ যদি এবং কেবল যদি $1-x \geq 0$

বা, $1 \geq x$

বা, $x \geq$ । হয়।

সুতরাং ডোম $f = \{x \in R : x$ ◘ $1\}$

এখন, $f(-3) = \sqrt{1-(-3)} = \sqrt{4} = 2$

$f(0) = \sqrt{1-0} = \sqrt{1} = 1$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f(1) = \sqrt{1-1} = 0$

$f(2)$ সংজ্ঞায়িত নয়, কারণ $2 \notin$ ডোম F.

উদাহরণ-3ঃ মনে করুন, $f(x) = x^2$, যেখানে $-2 \leq x \leq 8$

(i) $f(2)$, (ii) $f(-3)$, (iii) $f(6)$, (iv) $f(t-3)$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেয়া আছে, $f(x) = x^2$, $-2 \leq x \leq 8$

(i) $f(2) = 2^2 = 4$
(ii) $f(-3)$ সংজ্ঞায়িত নয়, কারণ -3, ডোমেন $-2 \leq x \leq 8$ এর অন্তর্ভুক্ত নয়।
(iii) $f(6) = 6^2 = 36$
(iv) $f(t-3) = (t-3)^2 = t^2 -6t+9$
কিন্তু এ সূত্রটি বৈধ হবে যদি $-2 \leq t-3 \leq 8$

বা, $-2+3 \leq t-3+3 \leq 8+3$

বা, $1 \leq t \leq 11$ হয়

$\therefore\ f(t-3) = t^2-6t+9,\ 1 \leq t \leq 11.$

উদাহরণ-4 ঃ একটি ফাংশনের সংজ্ঞা নিম্নরূপ ঃ

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1,\ x>3 \\ x^2-2, -2 \leq x \leq 3 \\ 2x+3, x-2 \end{cases}$$

f(2), f(4), f(–1), এবং f(–3) নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে, $f(x) = \begin{cases} 3x-1,\ x>3 \\ x^2-2, -2 \leq x \leq 3 \\ 2x+3, x-2 \end{cases}$

f(2) এর জন্য, $f(x) = x^2-2$. [$\because -2 \leq x \leq 3$ এর ভিতর 2 আছে]

$\therefore\ f(2) = 2^2-2 = 2$

f(4) এর জন্য, $f(x) = 3x-1$ [$\because\ x>3$ এর মধ্যে 4 অন্তর্ভুক্ত]

$\therefore\ f(4) = 3\times4-1$

$= 11$

f(–1) এর জন্য, $f(x) = x^2-2$ [$\because -2\ \delta\ x \leq 3$ এর মধ্যে $x = -1$ অন্তর্ভুক্ত]

$\therefore\ f(-1) = (-1)^2-2 = 1-2 = -1$

f(–3) এর জন্য, $f(x) = 2x+3$ [$\therefore\ x<-2$ এর মধ্যে $x = -3$ অন্তর্ভুক্ত]

$\therefore\ f(-3) = 2\times(-3)+3 = -6+3 = -3.$

উদাহরণ-5 ঃ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট R এবং $A = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ হলে $f : A\rightarrow R$ ফাংশনটি $f(x) = x^2+x+1$ দ্বারা সূচিত। f এর রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f : A\rightarrow R$ একটি ফাংশন যেখানে $A = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$, R হল সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

$f(x) = x^2+x+1$

অতএব, $f(-3) = (-3)^2+(-3)+1$

$= 9-3+1 = 10-3 = 7$

$f(-1) = (-1)^2+(-1)+1$

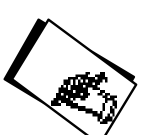
$= 1-1+1 = 1$

$f(0) = (0)^2+0+1 = 1$

$f(1) = 1^2+1+1 = 3$

$f(3) = 3^2+3+1 = 9+3+1 = 13$

সুতরাং, রেঞ্জ $f = \{7, 1, 3, 1, 3\}$



অনুশীলনী-১.৫

1. $f(x) = (x-1)^2$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য
   (i) f(–5), f(–1), f(0), f(1) এবং f(5) নির্ণয় করুন
   (ii) $f(x) = 100$ হরে, x নির্ণয় করুন।
   (iii) $f(x) = 0$ হলে, x নির্ণয় করুন।
   (iv) $f(x) = y$ হলে, x নির্ণয় করুন, $y>0$.

2. $f(x) = \sqrt{x-1}$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য
   (i) $f(1), f(5), f(10)$ নির্ণয় করুন।
   (ii) $f(a^2+1)$ নির্ণয় করুন, যেখানে $a \in R$
   (iii) $f(x) = 5$ হলে, x নির্ণয় করুন।
   (iv) $f(x) = y$ হলে, x নির্ণয় করুন, যেখানে $y \leq 0$.

3. $f(x) = 2x-1$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় করুন।

4. মনে করুন, $A = \{-2, -1, 0\}$, $f : A \rightarrow R$ যেখানে R বাস্তব সংখ্যার সেট এবং f কে $f(x) = x^2+1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হল। f এর রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

5. মনে করুন, $A = \{-4, -3, -2, 0, 3, 4\}$ এবং $f : A \rightarrow B$ কে $f(x) = x^2+x-3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হল। f এর রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

6. সকল বাস্তব সংখ্যার সেট R এবং $A = \{-1, 0, 2, 5, 11\}$ হলে $f : A \rightarrow R$ দ্বারা $f(x) = x^2+x-2$ সূচিত। $f(x)$ এর রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

7. মনে করুন, $A = \{-1, 0, 2, 5, 11\}$ এবং $f : A \rightarrow R$ ফাংশনটি $f(x) = x^2-x-2$ দ্বারা সূচিত। f এর রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

8. মনে করুন, $f : R \rightarrow R$ ফাংশনটির সংজ্ঞা নিম্নরূপ ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x^2-3x, & \text{যখন } x \geq 2 \\ x+2, & \text{যখন } x<2 \end{cases}$$

$f(5), f(0), f(-2)$ নির্ণয় করুন। এখানে R বাস্তব সংখ্যার সেট।

পাঠ ৬ ফাংশনের প্রকারভেদ (Types of Function)

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- উদাহরণসহ বিভিন্ন ফাংশনের বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

যুগ্ম এবং অযুগ্ম ফাংশন (Even and Odd function)

যদি $f(-x) = f(x)$ হয়, তবে $f(x)$ ফাংশনকে যুগ্ম ফাংশন (even function) বলা হয়।

উদাহরণ ঃ $f(x) = x^2+\cos x$ একটি যুগ্ম ফাংশন,

কারণ, $f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x)$

$= x^2+\cos x \quad [\because \cos(-\theta) = \cos\theta]$

$= f(x)$

অতএব, $f(x)$ একটি যুগ্ম ফাংশন।

আবার যদি $f(-x) = -f(x)$ হয়, তবে $f(x)$ ফাংশনকে অযুগ্ম ফাংশন (Odd function) বলা হয়।

উদাহরণ ঃ $f(x) = x^3$ হলে $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

অতএব, $f(x)$ একটি অযুগ্ম ফাংশন।

এক-এক ফাংশন (One-one function)

$f : A\to B$ দ্বারা সূচিত ফাংশনকে এক-এক ফাংশন বলা হয় যদি B সেটে A সেটের প্রত্যেক উপাদানের একটি এবং কেবলমাত্র একটি ছবি থাকে। B সেটের পৃথক পৃথক উপাদান A সেটের পৃথক পৃথক উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট হলে এক-এক ফাংশন হয়। এক-এক ফাংশনে অবশ্যই A সেটের যে কোন দুটি উপাদানের একই ছবি (image) থাকতে পারে না।

উদাহরণ-1 ঃ $f : R\to R$ ফাংশনটি $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $f(x) = x^2$ ফাংশনটি এক-এক ফাংশন নয়, কারণ, $f(3) = 3^2=9$, $f(-3) = (-3) = (-3)^2 =9$, অর্থাৎ দুটি ভিন্ন উপাদান 3 এবং (–3) এর ছবি একই সংখ্যা 9, অতএব, ফাংশনটি এক-এক ফাংশন হতে পারে না।

2 ঃ আবার ধরা যাক, $f : R\to R$ ফাংশনটি $f(x) = x^3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। এ ফাংশনটি একটি এক-এক ফাংশন, কারণ ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব সংখ্যার ঘন ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব সংখ্যা হয়। এখানে x এর প্রত্যেক মানের জন্য x^3 এর একটি মাত্র মান থাকবে। অর্থাৎ $f(2) =8$, $f(-2) = -8$, $f(3) = 27$, $f(-3) = -27$.

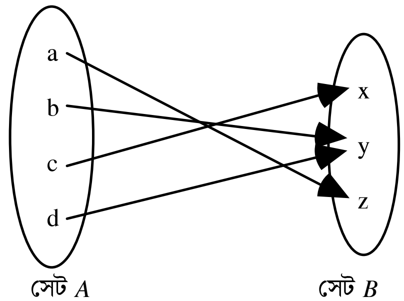
সার্বিক ফাংশন (Onto function)

$f : A\to B$ দ্বারা সূচিত ফাংশনকে সার্বিক ফাংশন বলা হয় যদি B সেটের সকল উপাদান A সেটের কোন না কোন উপাদানের (অন্তত একটি উপাদানের) ছবি হয় অর্থাৎ যদি $f(A) = B$ হয়। সার্বিক ফাংশনের ক্ষেত্রে B সেটের সমস্ত উপাদানই A সেটের উপাদানের রেঞ্জ হিসাবে পাওয়া যায়।

উদাহরণ-1 ঃ মনে করুন, A {2, –2, 3, –3}, B ={4, 9} এবং $f : A\to B$ ফাংশনটি $f(x) = x^2$ দ্বারা সূচিত। এই ফাংশনটি একটি সার্বিক ফাংশন, কারণ A সেটের সকল উপাদানের বর্গ B সেটের সদস্য অর্থাৎ $f(A) = B$.

2. $f : R\to R$ ফাংশনটি $f(x) =x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে এটি সার্বিক ফাংশন হবে না। এক্ষেত্রে ফাংশনটিতে কেবলমাত্র ধনাত্মক সংখ্যাসমূহই ছবি হিসেবে পাওয়া যাবে। কারণ, কোন ঋণাত্মক সংখ্যা বাস্তব সংখ্যার বর্গ হতে পারে না। অতএব, ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন নয়।

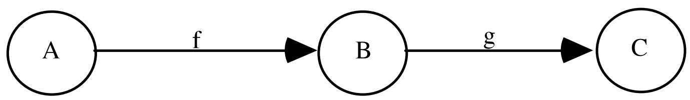
3. A এবং B দুটি সেট। A ={a, b, c, d} এবং B={x, y, z} নিচের চিত্রে $f : A\to B$ দেখানো হয়েছে।



এ ফাংশনটিতে আমরা দেখতে পাই, $f(A) = \{x, y, z\} = B$। B সেটের সকল উপাদান A সেটের উপাদানসমূহের ছবি। সুতরাং, ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন।

সংযোজিত ফাংশন (*C*omposite Function)

মনে করুন, $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ দ্বারা তিনটি ফাংশন সূচিত হয়েছে। চিত্রের সাহায্যে উপরের বিষয়টি প্রকাশ করলে আমরা পাই,



ধরা যাক্, $a \in A$, তাহলে $f(a) \in B$। এখানে B হলো g ফাংশনের ডোমেন।

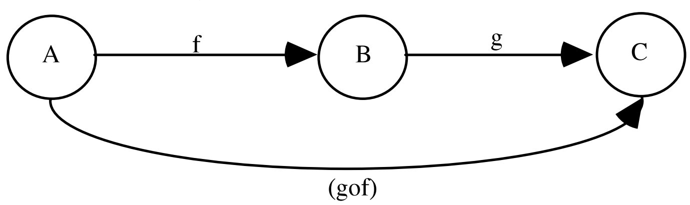
অতএব, g এর জন্য f(a) এর ছবি g(f(a)).

সুতরাং $g(f(a)) \in C$

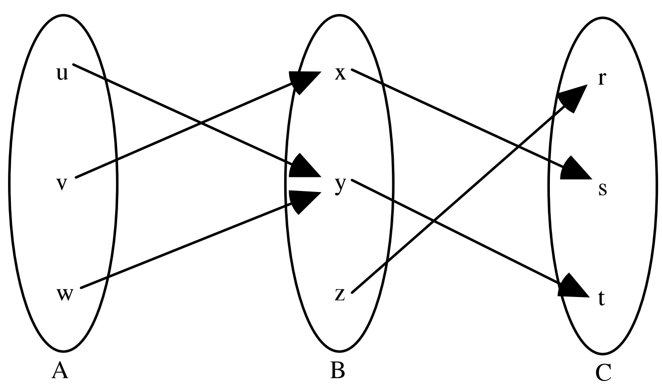
এক্ষেত্রে দেখা যাচ্ছে, $g(f(a)) \in C$ উপাদানটি A সেটের উপাদান a এর সাথে সংশ্লিষ্ট। প্রদত্ত ফাংশনের সম্পর্ক অনুযায়ী A সেটের সকল উপাদান a এর জন্য C সেটে g(f(a)) উপাদানটি পাওয়া যাবে। অর্থাৎ আমরা A সেট থেকে C সেটে একটি ফাংশন পাই। এ নতুন ফাংশনটিকে f এবং g এর সংযোজিত ফাংশন বলা হয়। f এবং g-এর সংযোজিত ফাংশন প্রকাশের জন্য (gof) বা, gf সংকেতটি ব্যবহার করা হয়।

অতএব, $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ হলে সংযোজিত ফাংশনটি হবে ঃ $(gof) : A \to C$ অথবা, $gf: A \to C$

সংযোজিত ফাংশনের জন্য উল্লেখিত চিত্রটি হবে ঃ



উদাহরণ-1 ঃ নিচের চিত্রে $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ দেখানো হয়েছে।



(i) সংযোজিত ফাংশন $(gof) : A \to C$ নির্ণয় করুন।

(ii) f, g এবং (gof) এর রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

(i) (gof) (u) $= g(f(u))$ $= g(y)$ $[\because f(u) = y]$
$= t$ $[\because g(s) = t]$

(gof) (v) $= g(f(v))$ $= g(x)$ $[\because f(v) = x]$
$= s$ $[\because g(x) = s]$

(gof) (w) $= g(f(w))$ $= g(y)$ $[\because f(w) = y]$
$= t$ $[\because g(y) = t]$

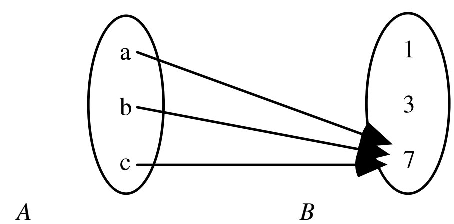
চিত্র থেকে পাই,

(ii) রেঞ্জ $f = \{x, y\}$
রেঞ্জ $g = \{r, s, t\}$
রেঞ্জ $(gof) = \{r, t\}$

ধ্রুবক ফাংশন (*C*onstant function)

$f : A \rightarrow B$ ফাংশনটিকে ধ্রুবক ফাংশন বলা হয় যদি $b \in B$ উপাদানটি A সেটের সবগুলো উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট হয় অর্থাৎ $b \in B$ উপাদানটি A সেটের প্রতিটি উপাদানের ছবি হয়। স্পষ্টতই, f ধ্রুবক ফাংশন হলে f এর রেঞ্জ একটি মাত্র উপাদান নিয়ে গঠিত হবে।

উদাহরণ-1 : নিচের চিত্রটি একটি ফাংশন $f : A \rightarrow B$ নির্দেশ করে।



চিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে, B সেটের 7 উপাদানটি A সেটের সবগুলো উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট অর্থাৎ 7 উপাদানটি A সেটের প্রতিটি উপাদানের ছবি। সুতরাং ফাংশনটি একটি ধ্রুবক ফাংশন।

2. $f(x) = 5$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : R \rightarrow R$ একটি ধ্রুবক ফাংশন, কারণ 5 প্রতিটি উপাদানেরই ছবি।

বীজগাণিতিক (*A*lgebraic) এবং তুরীয় (Transcendental) ফাংশন

কোন ফাংশনের সীমিত সংখ্যক পদের চলকসমূহের মান যখন কেবলমাত্র যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ, ঘাত বা মূল দ্বারা নির্ধারণ করা হয় তখন উক্ত ফাংশনকে বীজগাণিতিক ফাংশন বলে। যেমন, $y = x^3 + 3x^2 - \sqrt{x} + 5$ একটি বীজগাণিতিক ফাংশন। ফাংশনে চলকসমূহের মান বীজগাণিতিক প্রক্রিয়া ছাড়াও লগ (log), সূচক ধারা (*E*xponential), ইত্যাদি প্রক্রিয়া দ্বারা জড়িত থাকলে ফাংশনটিকে তুরীয় ফাংশন বলে। যেমন, $y = \cos x + \tan x$, $y = e^x$ ইত্যাদি তুরীয় ফাংশন। তুরীয় ফাংশনগুলিকে প্রকৃতিগতভাবে বিভিন্ন নামকরণ করা হয়। যেমন-

(i) ত্রিকোণমিতিক ফাংশন, $y = \cos x$

(ii) সূচক ফাংশন, $y = e^x$

(iii) লগ ফাংশন, $y = \log x$ ইত্যাদি।

বিপরীত ফাংশন (Inverse function)

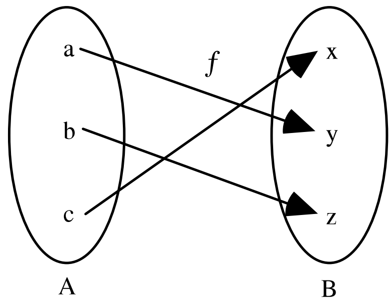
ধরা যাক, $f : A \rightarrow B$ এবং $b \in B$। $f^{-1}(b)$, A সেটের এমন একটি বা একাধিক উপাদান নির্দেশ করে যার বা যাদের ছবি হচ্ছে b। b যদি A সেটের কোন উপাদানের ছবি না হয় তবে $f^{-1}(b)$ তে কোন উপাদান থাকবে না। অতএব, $f^{-1}(b)$তে এক বা একাধিক উপাদান থাকতে পারে অথবা আদৌ কোন উপাদান না থাকতে পারে। কিন্তু f ফাংশনটি যদি একই সাথে এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন হয়, তবে $f(A) = B$ অর্থাৎ B সেটের সমস্ত উপাদানই f এর রেঞ্জ হয় এবং B সেটের পৃথক পৃথক উপাদান A সেটের ভিন্ন ভিন্ন উপাদানের ছবি হয়। সেক্ষেত্রে $f^{-1}(b)$ এর মান অনন্য (unique) অর্থাৎ $b \in B$ এর জন্য

A সেটে $f^{-1}(b)$ একটিমাত্র উপাদান পাওয়া যাবে। অর্থাৎ, $b \in B$ এর জন্য A সেটে আমরা একটি মাত্র উপাদান পাই। এ ফাংশনটিকেই বিপরীত ফাংশন বলা হয় এবং আমরা লিখি $f^{-1} : B \to A$ উল্লেখ্য, কোন ফাংশনের বিপরীত ফাংশন পাওয়া যাবে যখন $f : A \to B$ একই সাথে এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন হবে।

বিপরীত ফাংশনের সংজ্ঞা

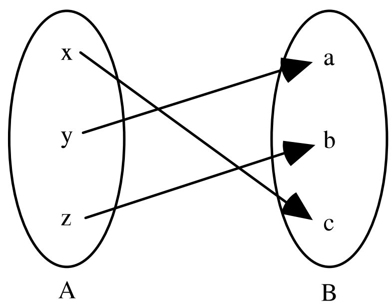
$f : A \to B$ দ্বারা একটি এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন সূচিত করা হলো। যে ফাংশন দ্বারা B সেটের প্রত্যেক উপাদান b এর জন্য $f^{-1}(b)$ দ্বারা A সেটের একটি এবং কেবলমাত্র একটি উপাদান সূচিত হয় তাকে বিপরীত ফাংশন বলা হয়।

উদাহরণ-1ঃ নিচের চিত্রে $f : A \to B$ দেখানো হয়েছে।



এখানে f ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক। অতএব, f^{-1} বিদ্যমান।

নিচের চিত্রে $f^{-1} : B \to A$ দেখানো হল।



উদাহরণ-2 ঃ $f : R \to R$ কে $f(x) = 2x-3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে। ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক। এর বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরা যাক, f ফাংশনের জন্য y হলো x এর ছবি।

অতএব, $y = f(x) = 2x-3$

$\therefore$ f^{-1} এর জন্য x হবে y এর ছবি অর্থাৎ $x = f^{-1}(y)$

এখন, $y = 2x-3$

বা, $2x = y+3$

বা, $x = \dfrac{y+3}{2}$

$\therefore \quad f^{-1}(y) = \dfrac{y+3}{2}$

চলক y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$ যা নির্ণেয় বিপরীত ফাংশন।

সমাধানকৃত উদাহরণ

উদাহরণ- 1 ঃ নিচের ফাংশনগুলো কোনটি যুগ্ম এবং কোনটি অযুগ্ম নির্ণয় করুন ঃ

(i) $f(x) = 2\cos x + \dfrac{3}{x^2}$

(ii) $f(x) = x - \sin x$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = 2\cos x + \dfrac{3}{x^2}$

$\therefore\ f(-x) = 2\cos(-x) + \dfrac{3}{(-x)^2}$

$= 2\cos x + \dfrac{3}{x^2}$

$= f(x)$

অতএব, $f(x)$ একটি যুগ্ম ফাংশন।

(ii) $f(x) = x - \sin x$

$\therefore\ f(-x) = -x - \sin(-x)$

$= -x - (-\sin x)$ $[\because \sin(-\theta) = -\sin\theta]$

$= -x + \sin x$

$= -(x - \sin x)$

$= -f(x)$

$\therefore\ f(-x) = -f(x)$

অতএব, $f(x)$ একটি অযুগ্ম ফাংশন।

উদাহরণ-2 ঃ $f(x) = x^2+3x+1$ এবং $f(x) = 2x-3$ হলে $(fog)(x)$ এবং $(gof)(x)$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে, $f(x) = x^2+3x+1$, $g(x) = 2x-3$

$\therefore\ (fog)(x) = g(f(x)) = f(g(x))$

$= f(2x-3)$ $[\because g(x) = 2x-3]$

$= (2x-3)^2 + 3(2x-3) + 1$ $[\because f(x) = x^2+3x+1]$

$= 4x^2 - 12x + 9 + 6x - 9 + 1$

$= 4x^2 - 6x + 1$

অতএব, $(fog)(x) = 4x^2-6x+1$

আবার $(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2+3x+1)$ $[\because f(x) = x^2+3x+1]$

$= 2(x^2+3x+1) - 3$ $[\because g(x) = 2x-3]$

$= 2x^2+6x+2-3$

$= 2x^2+6x-1$

অতএব, $(gof)(x) = 2x^2+6x-1$

উদাহরণ-3 ঃ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $f(x) = x+1$ দ্বারা $f : A\to B$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত। f এর ডোমেন এবং রেঞ্জ বের করুন। ফাংশন কি সঠিক?

সমাধান ঃ দেয়া আছে, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$f(x) = x+1$

$\therefore\ f(1) = 1+1 = 2,\quad f(2) = 2+1 = 3,\quad f(3) = 3+1 = 4$

$f(4) = 4+1 = 5$

অতএব, ডোম $f = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং রেঞ্জ $f = \{2, 3, 4, 5\}$

সেহেতু, $f(A) \le B$ সুতরাং ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন নয়।

উদাহরণ-4 ঃ R বাস্তব সংখ্যার সেট, $A = \{x : -1 \le x \le 1\}$, $B=\{x: 1 \le x \le 3\}$ এবং $f : A\to R$, $g : B\to R$ যথাক্রমে $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। f এবং g কি এক-এক ফাংশন?

সমাধানঃ প্রথম অংশ ঃ $A = \{ x : -1 \le x \le 1 \}$

$f : A\to R$ এবং $f(x) = x^2$

$f : A\to R$ ফাংশনের ডোমেন $-1 \le x \le 1$ এর মধ্য থেকে যেকোন দুটি সদস্য নেই। ধরা যাক, এরা $-\dfrac{1}{2}$ এবং $\dfrac{1}{2}$.

$\therefore\ f(x) = x^2$ থেকে পাই,

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ এবং $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

অর্থাৎ ফাংশনের ডোমেনের দুটি ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের জন্য একই ছবি পাওয়া গেল। অতএব, f এক-এক ফাংশন নয়।

দ্বিতীয় অংশ ঃ

$B = \{ x: 1 \le x \le 3\}$

$g : B \to R$ এবং $g(x) = x^2$

এখানে, $g : B \to R$ এর ডোমেন $1 \le x \le 3$ এর প্রত্যেকটি সদস্য ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা। সুতরাং ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের জন্য $g(x) = x^2$ থেকে ভিন্ন ভিন্ন ছবি পাওয়া যাবে।

অতএব, g ফাংশনটি এক-এক ফাংশন।

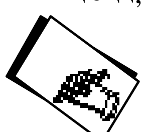
উদাহরণ-5 ঃ $A : \{ x: -1 \le x \le 1\}$, $f: A \to A$ এবং $f(x) = x^4$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। f ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন কিনা যাচাই করুন।

সমাধানঃ আমরা জানি, $f : A \to B$ একটি সার্বিক ফাংশন হবে যদি f এর রেঞ্জ $f(A) = B$ হয়। সেহেতু $f : A \to A$ কে $f(x) = x^4$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে, সুতরাং f এর রেঞ্জের কোন সদস্য ঋণাত্মক হবে না।

যেমন, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

সুতরাং $f(A) \le A$

অতএব, f ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন নয়।



অনুশীলনী-১.৬

1. $f(x) = x\sin^2 x - x^3$ ফাংশনটি যুগ্ম না অযুগ্ম নির্ণয় করুন।
2. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলোর কোনটি যুগ্ম এবং কোনটি অযুগ্ম নির্ণয় করুনঃ

   (i) $f(x) = \sin x$, (ii) $f(x) = \cos x$
3. f এবং g দ্বারা বাস্তব সংখ্যার ফাংশন সূচিত হলে, এবং $f(x) = x^2+2x-3$, $g(x) = 3x-4$ হলে

   $(gof)(x)$, $(fog)(x)$, $(gof)(2)$, $(fog)(2)$ নির্ণয় করুন।
4. বাস্তব সংখ্যার উপর দুটি সেট f এবং g কে যথাক্রমে $f(x) = x^2-2x$ এবং $g(x) = x^2+1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হল। যে সূত্রদ্বয় দ্বারা $(gof)(x)$ এবং $(fog)(x)$ ফাংশনদ্বয়কে সংজ্ঞায়িত করা যায় তা নির্ণয় করুন এবং প্রাপ্ত সূত্রদ্বয় থেকে $(gof)(2)$ এবং $(fog)(2)$ এর মান নির্ণয় করুন।
5. $f : R \to R$ এবং $g: R \to R$ কে যথাক্রমে $f(x) = 2x+1$ এবং $g(x) = x^2-2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হল। $(gof)(x)$ কে কোন সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা যায়?
6. R বাস্তব সংখ্যার সেট, $A = \{x : -3 \le x \le -1\}$ এবং $f : A \to R$, $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। f ফাংশনটি এক-এক ফাংশন কিনা যাচাই করুন।
7. $f : A \to A$ এবং $f(x) = x^3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত যেখানে $A = \{x: -1 \le x \le 1\}$. f ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন কিনা যাচাই করুন।
8. $f : R \to R$, $f(x) = x^3+5$ ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক কিনা কারণসহ উল্লেখ কর।
9. $f : R \to R$, $f(x) = 2x-3$ ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক কিনা কারণসহ উল্লেখ করুন। এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন হলে এর বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করুন।
10. $f : R \to R$ কে $f(x) = 3x+4$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হল। যে সূত্র দ্বারা f^{-1} কে সংজ্ঞায়িত করতে হবে তা নির্ণয় করুন।

পাঠ ৭ ফাংশনের লেখচিত্র

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন;
- লেখচিত্রের সাহায্যে ফাংশনকে বর্ণনা করার দক্ষতা অর্জন করবেন।

ফাংশনের লেখচিত্র (Graph of function)

A এবং B দুটি সেট এবং $f : A \to B$ একটি ফাংশন। যদি A এবং B এর প্রত্যেকটি দ্বারা বাস্তব সংখ্যার সেট সূচিত করে, তবে $A \times B$ কে চিত্রায়িত করলে তাকে কার্তেসীয় সমতল (Cartesian plane) বলা হয়। অর্থাৎ কার্তেসীয় সমতলের প্রত্যেকটি বিন্দু বাস্তব সংখ্যার ক্রমজোড় (a,b) নির্দেশ করে, যেখানে $a \in A$ ও $b \in B$ । এ সমতলে দুটি সরলরেখা অংকন করে সমগ্র সমতলটিকে চারটি ভাগে বিভক্ত করা হয়। এ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে একটি অনুভূমিক রেখা এবং অপরটি উল্লম্ব রেখা। এদেরকে বলা হয় অক্ষ-রেখা।

সমতলের প্রত্যেকটি বিন্দু P একটি ক্রমজোড় (a,b) নির্দেশ করে। P বিন্দু থেকে উলম্ব ও অনুভূমিক রেখা অংকন করলে অক্ষ রেখাদ্বয়ের সাথে a ও b প্রতিরূপী বিন্দুতে মিলিত হয়।

সংক্ষেপে বলা যায়, $f : A \to B$ যদি একটি ফাংশন সূচিত করে, তাহলে f ফাংশনের লেখচিত্র (সাধারণত f* দ্বারা সূচিত করা হয়) ঐ সকল ক্রমজোড়ের সেট যেখানে $a \in A$ প্রথম উপাদান হিসেবে থাকে এবং a এর ছবি ঐ ক্রমজোড়ের দ্বিতীয় উপাদান হিসেবে থাকে।

অর্থাৎ $f^* = \{(a, b) \mid a \in A, b = f(a)\}$ এবং $A \times B$ এর একটি উপসেট।

অতএব, $f : A \to B$ ফাংশন হলে, f^* হলো f এর লেখচিত্র এবং $f^* \subset A \times B$.

সুতরাং $A \times B$ সমতলে ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করা যায়।

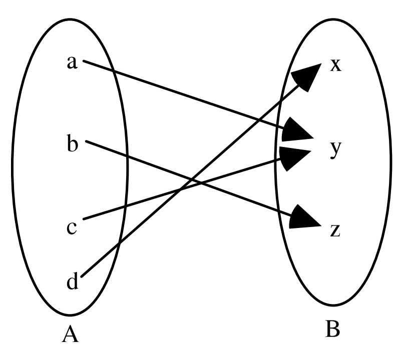
ফাংশনের লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য

$f : A \to B$ দ্বারা সূচিত ফাংশনের লেখচিত্রের দুটি বৈশিষ্ট্য আছে।

প্রথমত, A সেটের প্রত্যেক a এর জন্য f* এর মধ্যে একটি ক্রমজোড় (a, b) থাকবে।

দ্বিতীয়ত, f* এর অন্তর্গত ক্রমজোড়গুলোর কেবলমাত্র একটিতে প্রথম পদ হিসেবে a অবস্থান করবে।

নিচের চিত্রটি লক্ষ্য করুন ঃ



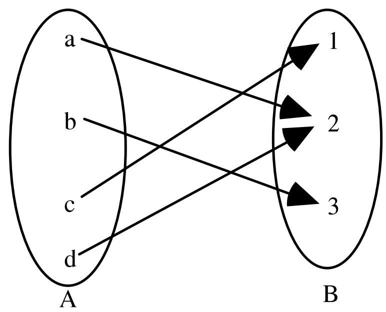
উপরের চিত্রে দেখা যায়, A সেটের প্রত্যেক উপাদানের জন্য একটি ক্রমজোড় রয়েছে অর্থাৎ ক্রমজোড়গুলো হল ঃ (a, y), (b, z), (c, y), (d, x)

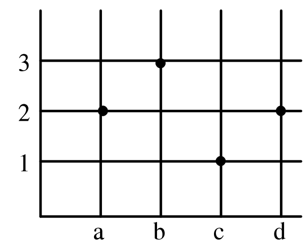
ক্রমজোড়গুলোর প্রত্যেকটিতে প্রথম পদ ভিন্ন। তাই উপরের চিত্রটি ফাংশনের বৈশিষ্ট্য সিদ্ধ করে। অতএব, প্রাপ্ত ক্রমজোড়গুলো দিয়ে লেখচিত্র আঁকা সম্ভব।

উদাহরণ-1 ঃ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ হলে $\{(1, 3), (2, 5), (4, 6)\}$ ক্রমজোড়ের সেট $f : A \to B$ এর লেখচিত্র হতে পারে না, কারণ $3 \in A$, কিন্তু কোন ক্রমজোড়ের প্রথম পদ হিসেবে 3 অবস্থান করে নাই।

আবার $\{(1, 2), (3, 4), (4, 6), (2, 5), (3, 2)\}$ ক্রমজোড়ের সেট f এর লেখচিত্র হতে পারে না, কারণ $3 \in A$, কিন্তু দুটি ভিন্ন ক্রমজোড়ের প্রথম পদ হিসেবে 2 অবস্থান করছে।

উদাহরণ-2 ঃ মনে করুন, $f : A \to B$ দ্বারা সূচিত ফাংশনের লেখচিত্র f* এর অন্তর্গত ক্রমজোড়গুলো (a, 2), (b, 3), (c, 1), (d, 2)। এরা $A \times B$ এর উপসেট।

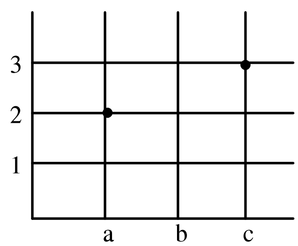




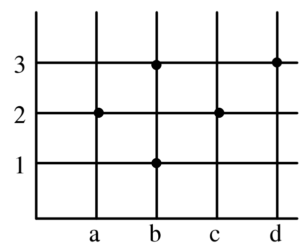
স্থানাংক চিত্র

স্থানাংক চিত্রে দেখা যাচ্ছে, প্রত্যেক খাড়া রেখার উপর f* এর অন্তত একটি এবং কেবলমাত্র একটি বিন্দু থাকবে।

উদাহরণ-3 ঃ নিচের চিত্র দুটি দেখুনঃ



চিত্র-১



চিত্র-২

চিত্র থেকে দেখা যায়, চিত্র-১ এ b এর খাড়া রেখার উপর কোন বিন্দু নেই। সুতরাং তা কোন ফাংশনের লেখচিত্র নয়। আবার চিত্র-২ থেকে দেখা যায়, b এর খাড়া রেখার উপর দুটি বিন্দু আছে। সুতরাং এটিও কোন ফাংশনের লেখচিত্র নয়।

উদাহরণ-4 ঃ $f : A \to B$ (A ও B উভয়েই বাস্তব সংখ্যার সেট) এবং $-2 \le x \le 4$ ব্যবধিতে $f(x) = x^2$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

সমাধান ঃ $-2 \le x \le 4$ ব্যবধিতে f* অসীম সংখ্যক ক্রমজোড়ের সেট হবে।
নিম্নে কয়েকটি ক্রমজোড় তালিকা আকারে দেখানো হলো ঃ

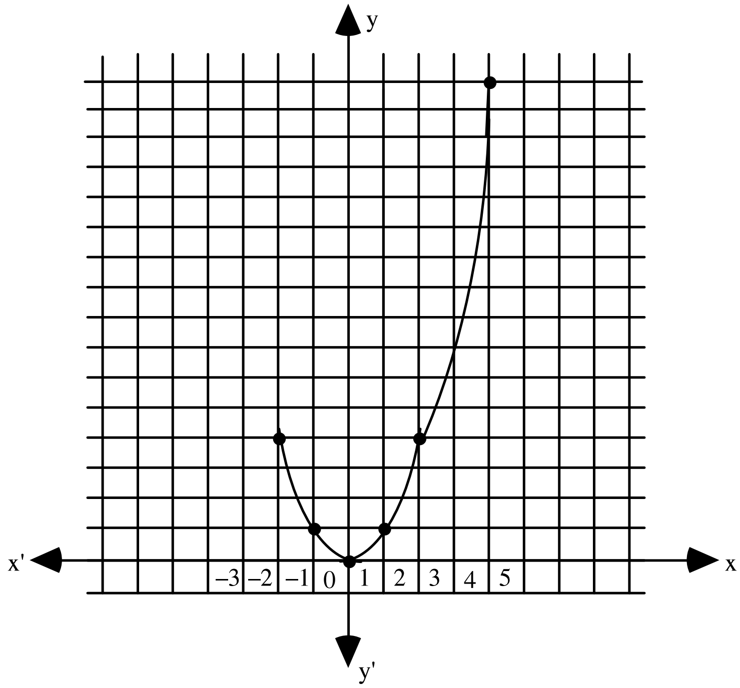
x	0	-1	-2	1	2	4
$y = f(x) = x^2$	0	1	4	1	4	16

প্রাপ্ত ক্রমজোড়গুলো ঃ

$$(0, 0), (-1, 1), (-2, 4), (1, 1), (2, 4), (4, 16)$$

$$\therefore \; f^* = \{(0, 0), (-1, 1), (-2, 4), (1, 1), (2, 4), (4, 16)\}$$

প্রত্যেকটি ক্রমজোড় কার্তেসীয় সমতলে এক একটি বিন্দু চিহ্নিত করে।



$-2 \le x \le 4$ ব্যবধিতে $f(x) = x^2$ ফাংশনের লেখচিত্র

বিন্দুগুলো সমতলে স্থাপন করে ফাংশনের লেখচিত্র পাওয়া যায়। উপরের চিত্রে লেখচিত্রটি অঙ্কিত হল।

অনুশীলনী-১.৭

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $f : A \to R$ কে $f(x) = x^2+2x-1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হল। f^* নির্ণয় করুন।
2. $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ এবং $f: A \to R$ (R বাস্তব সংখ্যার সেট) কে $f(x) = x^2+1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হল। f ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করুন।
3. নিচের সূত্রগুলোর প্রত্যেকটি $f: R \to R$ কে সংজ্ঞায়িত করে। কার্তেসীয় সমতল $R \times R$ এ সূত্রগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

   (i) $f(x) = x^2-2x-1$, (ii) $f(x) = 2x-1$
4. $f : R \to R$ এবং $f(x) = 4x-x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

উত্তরমালা

অনুশীলনী-১.১

1. (i) $\in$ (ii) $\in$ (iii) $\notin$ (iv) $\notin$
2. (i) A { $x \mid x$ হল ইংরেজি বর্ণমালার একটি Vowel}

   (ii) B = { $x \mid x$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা }
3. (i) {–2, 2, 4}, (ii) {–3, –1, 1, 3, 5}

   (iii) Φ বা { }
4. (i) {1, 2, 3}, (ii) {–2, 2} (iii) {2, 4, 6, 8}
5. (i) সত্য, (ii) সত্য, (iii) মিথ্যা, (iv) মিথ্যা, (v) সত্য।
6. (i) মিথ্যা, (ii) মিথ্যা, (iii) মিথ্যা, (iv) সত্য, (v) মিথ্যা, (vi) সত্য, (vii) মিথ্যা।

অনুশীলনী-১.২

1. (i) $\{a, b, d, e\}$, (ii) $\{b, d\}$, (iii) $\{c, e\}$, (iv) $\{a, c\}$
   (v) $\{e\}$, (vi) $\{e\}$, (vii) $\{a\}$, (viii) $\{a\}$
   (ix) $\{a, c, e\}$, (x) $\{c\}$

2. (i) $\{1, 2, 3, 6, 12, 18, ------\}$, (ii) $\{2, 3\}$

3. (i) $\{b, d\}$, (ii) $\{c, d\}$, (iii) $\{d, f\}$

4. (i) $\{1, 6, 7, 8, 9\}$, (ii) $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$. (iii) $\{1, 2, 6, 7, 8, 9\}$
   (iv) $\{1, 7, 9\}$, (v) $\{2, 3, 4, 5\}$, (vi) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

অনুশীলনী-১.৩

1. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 2. $(2, 3)$

3. $A\times B = \{(a, p), (a, q), (b, p), (b, q), (c, p), (c, q)\}$
   $B\times A = \{(p, a), (q, a), (p, b), (q, b), (p, c), (q, c)\}$

4. $\{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}$

অনুশীলনী-১.৪

1. $\{(2, 5), (4, 3)\}$

2. (i) ডোম $S = \{2\}$, রেঞ্জ $S = \{1, 2, 3\}$

   (ii) ডোম $S = \{-3, -2, -1, 2\}$, রেঞ্জ $S = \{8, 3, 0\}$

   (iii) ডোম $S = \{-3, -1, 0\}$, রেঞ্জ $S = \{-3, -1, 1\}$

3. $S = \{(-1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, -1)\}$, ডোম $S = \{-1, 0, 1, 2\}$, রেঞ্জ $S = \{2, 1, 0, -1\}$

4. $T = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$, ফাংশন

5. $S = \{(1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{8, 6, 4, 2\}$.

অনুশীলনী-১.৫

1. (i) 36, 4, 1, 0, 16 (ii) 11, –9 (iii) 1 (iv) $1+\sqrt{y}$
2. (i) 0, 2, 3 (ii) a (iii) 2b (iv) y^2+1
3. R (বাস্তব সংখ্যার সেট)
4. $\{5, 2, 1\}$
5. $\{-3, -1, 3, 9, 17\}$
6. $\{-2, 4, 28, 130\}$
7. $\{0, -2, 18, 108\}$
8. $f(5) = 10$, $f(0)=2$, $f(-2) =0$

অনুশীলনী-১.৬

1. অযুগ্ম, 2. (i) অযুগ্ম, (ii) যুগ্ম 3. $3x^2-6x-13$, $9x^2-18x+5$, 11, 5

4. $(gof)\,(x) = x^4-4x^3+4x^2+1$, $(fog)\,(x) = x^4-1$, $(gof)\,(2) =1$, $(fog)\,(2) = 15$

5. $4x^2+4x-1$, 6. এক-এক ফাংশন, 7. সার্বিক

8. এক-এক এবং সার্বিক

9. এক-এক এবং সার্বিক, $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ 10. $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{3}$