ইউনিট ২

বাস্তব সংখ্যা ও জটিল সংখ্যা

ভূমিকা

প্রস্তর যুগে মানুষ পাথরের নুড়ি অথবা খেজুরের সাহায্যে ভেড়ার পাল গণনা করত। গণনা পদ্ধতির উদ্ভাবন মানব জাতির অন্যতম কৃতিত্ব। আমাদের চতুর্দিকে যে সব বিভিন্ন বস্তু আমরা দেখতে পাই তাদের পরিমাণ নিরূপণ করার জন্য অতি প্রাচীনকালে যে প্রতীক সমূহের উদ্ভব হয় সেগুলোকে স্বাভাবিক সংখ্যা বলা হয়। স্বাভাবিক সংখ্যা উদ্ভাবনের পর ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সংখ্যা ছাড়াও প্রকৃতিভেদে সংখ্যাকে আরও অনেক প্রকারের শ্রেণীবিন্যাস করা হয়েছে। বর্তমান ইউনিটে বাস্তব সংখ্যা ও জটিল সংখ্যা নিয়ে আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- বাস্তব সংখ্যা ও বাস্তব সংখ্যার বিভিন্ন উপসেট সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন;
- বাস্তব সংখ্যার ধর্মাবলী প্রমাণ করার দক্ষতা অর্জন করবেন;
- পরমমান সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করতে পারবেন;
- জটিল সংখ্যা সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করতে পারবেন;
- জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে পারবেন;
- জটিল সংখ্যার গুণাবলি প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন;
- জটিল সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন;
- এককের ঘনমূল সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন এবং সমস্যা সমাধানে তা প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন।

পাঠ ১ বাস্তব সংখ্যার বর্ণনা

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বাস্তব সংখ্যা কী বলতে পারবেন,
- বাস্তব সংখ্যার স্বীকার্যভিত্তিক বর্ণনা দিতে পারবেন;
- বাস্তব রেখা সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- বাস্তব সংখ্যার অসমতার ধারণা পাবেন।

বাস্তব সংখ্যা (Real number)

প্রত্যেক প্রকারের সংখ্যার ধনাত্মক ও ঋণাত্মক শ্রেণীবিভাগ আছে। ধনাত্মক সংখ্যা, ঋণাত্মক সংখ্যা এবং শূন্য (0) নিয়ে বাস্তব সংখ্যা গঠিত।

যেমন, $1, -15, 0, \frac{5}{9}, -\frac{2}{3}$ ইত্যাদি বাস্তব সংখ্যার উদাহরণ।

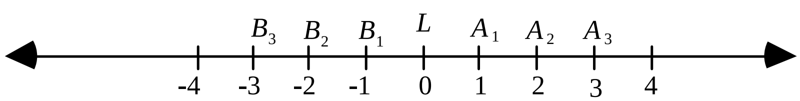
সমস্ত সংখ্যাগুচ্ছকে বাস্তব ও অবাস্তব এই দুই শ্রেণীতে ভাগ করা যায়। আমরা এ পাঠে বাস্তব সংখ্যার আলোচনাতে সীমাবদ্ধ থাকব।

প্রত্যেক প্রকারের সংখ্যার ধনাত্মক ও ঋণাত্মক শ্রেণীবিভাগ আছে। ধনাত্মক সংখ্যা, ঋণাত্মক সংখ্যা এবং শূন্য (0) নিয়ে বাস্তব সংখ্যা গঠিত।

বাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

যে কোন সংখ্যাকে তার মান অনুসারে কোন সরলরেখাস্থ কোন বিন্দুর অবস্থান দ্বারা সূচিত করা যায়। এই রেখাকে বাস্তব রেখা (Real line) বলা হয়। সকল বাস্তব সংখ্যা এবং বাস্তব রেখাস্থ সকল বিন্দুর মধ্যে এক-এক সম্পর্ক (One-one relation) রয়েছে। অর্থাৎ প্রত্যেকটি বাস্তব সংখ্যা শুধুমাত্র একটি বিন্দু দ্বারা নির্দেশিত হয় এবং প্রত্যেকটি বিন্দু শুধুমাত্র একটি বাস্তব সংখ্যা দ্বারা নির্দেশিত হয়।

নিম্নের চিত্রে L দ্বারা একটি অসীম রেখা সূচিত করা হলো ঃ



চিত্র ২.১ ঃ বাস্তব রেখার চিত্র

সরলরেখাস্থ কোন বিন্দুকে মূলবিন্দু (Origin) ধরুন এবং মনে করুন মূলবিন্দু 0 (শূন্য) সংখ্যা সূচিত করে। মূলবিন্দুর ডানে সমান সমান দূরত্বে A_1, A_2, A_3 বিন্দুগুলো যথাক্রমে 1, 2, 3 সংখ্যা সূচিত করে। অনুরূপভাবে মূলবিন্দুর বামে B_1, B_2, B_3 বিন্দুগুলো যথাক্রমে $-1, -2, -3$ সংখ্যা সূচিত করে। একই পদ্ধতিতে যে কোন বাস্তব সংখ্যাকে উক্ত সরলরেখাস্থ কোন একটি মাত্র বিন্দু দ্বারা সূচিত করা যাবে। মূলবিন্দুর (শূন্য সূচক বিন্দুর) ডানে সকল বিন্দু ধনাত্মক সংখ্যা সূচিত করে এবং বামে সকল বিন্দু ঋণাত্মক সংখ্যা সূচিত করে। শূন্য নিজে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কোনটাই নয়। 0 এবং 1 এর মাঝের বিন্দু $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ .... ইত্যাদি দ্বারা সূচিত করা যায়। 0 (শূন্য) এর বামেও এভাবে সমান দূরত্বের বিন্দু দ্বারা $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}$, --------- ইত্যাদি সূচিত করা যায়। এগুলো সবই বাস্তব সংখ্যা। এখানে 1 এর প্রতিরূপী বিন্দু -1 এবং উল্টো কথাও সত্য।

সংখ্যারেখায় দুটি সংখ্যার প্রতিরূপী বিন্দুদ্বয়ের দূরত্বের পরিমাপ সংখ্যা দুটির দূরত্ব নির্দেশ করে। সংখ্যারেখা থেকে দেখা যায়, 2 এবং -2 এর দূরত্ব 4.

বড় সংখ্যা থেকে ছোট সংখ্যা বিয়োগ করলেই দূরত্ব পাওয়া যায়। যেমন 2 এবং -2 এর দূরত্ব $= 2 - (-2) = 4$.

বাস্তব সংখ্যার স্বীকার্য

বাস্তব সংখ্যার সেট R–এর উপর যোগ এবং গুণনের ধারণা প্রয়োগ করে আমরা এ সেটের মৌলিক বৈশিষ্ট্যগুলো বর্ণনা করতে পারি।

মনে করুন, R একটি বাস্তব সংখ্যার সেট এবং x, y, z এর যেকোন তিনটি উপাদান অর্থাৎ $x, y, z \in R$.

বাস্তব সংখ্যার যোগ-এর স্বীকার্য

(i) আবদ্ধতা (closure) ঃ যদি $x, y \in R$ হয়, তবে $x + y \in R$

(ii) সংযোজনযোগ্য (Associative) ঃ যদি $x, y, z \in R$ হয় তবে $(x+y) + z = x + (y+z)$

(iii) বিনিময়যোগ্য (Commutative) ঃ যদি $x, y \in R$ হয়, তবে $x+y = y+x$

(iv) অভেদ (Identity) ঃ R সেটে একটি এবং কেবলমাত্র একটি সংখ্যা 0 (শূন্য) আছে যেন সকল $x \in R$ এর জন্য $0+x = x+0 = x$,

এই 0 (শূন্য) কে R সেটের যোগ অভেদ (Additive identity) বলা হয়।

(v) বিপরীতক (Inverse) ঃ সকল $x \in R$ এর জন্য অনন্য (unique) $-x \in R$ বিদ্যমান যেন $x+(-x) = (-x)+x = 0$ (অভেদ)

$x \in R$ এর সাপেক্ষে শুধুমাত্র $-x \in R$ বিদ্যমান।

x এর সাপেক্ষে $-x$ কে, x এর যোগ বিপরীতক (Additive inverse) বলা হয়।

বাস্তব সংখ্যার গুণনের স্বীকার্য

(i) আবদ্ধতা ঃ যদি $x, y \in R$ হয়, তবে $xy \in R$

(ii) সংযোজনযোগ্য ঃ যদি $x, y, z \in R$ হয়, তবে $(xy)z = x(yz)$

(iii) বিনিময় যোগ্য ঃ যদি $x, y \in R$ হয়, তবে $xy = yx$.

(iv) অভেদ ঃ R সেটে একটি কেবলমাত্র একটি সংখ্যা 1(one) আছে যেন, সকল $x \in R$ এর জন্য

$(1)\, x = x(1) = x$

এই 1 কে R সেটের গুণন অভেদ (multiplicative identity) বলা হয়।

(v) বিপরীতক ঃ সকল $x \in R, x \neq 0$ এর জন্য অনন্য $\frac{1}{x} \in R$ বিদ্যমান যেন, $x\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)x = 1$ (অভেদ)

এক্ষেত্রে $\frac{1}{x}$ কে x এর গুণন বিপরীতক (Multiplicative inverse) বলা হয়।

বাস্তব সংখ্যার যোগ ও গুণনের সংযুক্ত স্বীকার্য

বন্টনযোগ্য (Distributive) স্বীকার্য ঃ যদি $x, y, z \in R$ হয়, তবে $x\,(y+z) = xy+xz$,

অথবা, $(x+y)\,z = xz+yz$.

উদাহরণ-1 ঃ যদি $x, y, z \in R$ এবং $x+y = x+z$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $y = z$.

সমাধানঃ দেয়া আছে, $x + y = x+z$

$\therefore\ -x+(x+y) = -x+(x+z)$ [$\because$ যোগের অনন্যতা]

বা, $(-x+x) + y = (-x+x) + z$ [$\because$ যোগের সংযোজনযোগ্যতা]

বা, $0 + y = 0 + z$ [$\because$ যোগের বিপরীতক]

বা, $y = z$ [$\because$ যোগের অভেদক]

অতএব, $y = z$

বাস্তব সংখ্যার অসমতা

দুটি বাস্তব সংখ্যা a ও b এর ক্ষেত্রে অসমতা বর্ণনা করা যায়। a ও b দুটি বাস্তব সংখ্যার মধ্যে তিন ধরনের সম্পর্ক হতে পারে। যেমন, $a>b$ অথবা $a = b$ অথবা $a < b$.

বাস্তব সংখ্যা a, বাস্তব সংখ্যা $b–a$ এর চেয়ে ছোট হলে আমরা লিখব $a<b$, এক্ষেত্রে $b–a$ অবশ্যই ধনাত্মক হবে এবং $a–b$ অবশ্যই ঋণাত্মক হবে।

বাস্তব সংখ্যা a, b, c এর জন্য আমরা পাই,

(i) যদি $a < b$ এবং $b<c$ হয়, তবে $a<c$

(ii) যদি $a<b$ হয়, তবে $a+c < b+c$,

(iii) $a<b$ এবং c যদি ধনাত্মক হয়, তবে $ac < bc$

(iv) $a<b$ এবং c যদি ঋণাত্মক হয়, তবে $ac>bc$

(v) $a\geq b$ এবং $b\geq a$ হলে $a = b$ হবে।

উদাহরণ-2 ঃ যদি $x, y, z \in R, xz = yz$ এবং $z \neq 0$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $x = y$

প্রমাণ ঃ দেয়া আছে, $x, y, z \in R, xz = yz$ এবং $z \neq 0$

সেহেতু $z \neq 0$, অতএব $\frac{1}{z}$ বা, z^{-1} বিদ্যমান।

তখন $xz = yz$

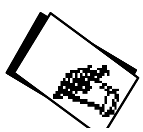
বা, $(xz)z^{-1} = (yz)z^{-1}$

বা, $x(zz^{-1}) = y(zz^{-1})$ [$\because$ গুণনের সংযোজন]

বা, $x.1 = y.1$ [$\because$ গুণনের বিপরীতক]

বা, $x = y$ [$\because$ গুণনের অভেদক]

অতএব, $x = y$



অনুশীলনী-২.১

1. সংখ্যারেখা অঙ্কন করে দূরত্ব নির্ণয় করুন ঃ
   (i) –2 এবং –3, (ii) –3 এবং 4, (iii) –5 এবং –2

2. প্রমাণ করুন, যদি $x\in R$ হয়, তবে $x.0 = 0$

3. যদি $x, y, z\in R$ হয়, তবে প্রমাণ করুন, $x(y–z) = xy–xz$

4. যদি $x\in R$ হয়, তবে প্রমাণ করুন ঃ (i) $–(–x) = x$ (ii) $(–1)x = –x$

5. যদি $x, y\in R$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $(–a)b = –(ab)$

পাঠ ২ বাস্তব সংখ্যার উপসেট ও পরমমান

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বাস্তব সংখ্যার উপসেট কোনগুলো জানতে পারবেন;
- বাস্তব সংখ্যার উপসেট প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন;
- বাস্তব সংখ্যার পরমমান সম্পর্কে জানতে পারবেন;
- পরমমানের ধর্মাবলী বর্ণনা করতে পারবেন।

বাস্তব সংখ্যার উপসেট

স্বাভাবিক সংখ্যার সেট (Set of Natural Numbers)

গণনাকারী সংখ্যাগুলোকে (counting numbers) স্বাভাবিক সংখ্যা বলা হয়। 1, 2, 3, 4, ... ইত্যাদিকে স্বাভাবিক সংখ্যা হিসাবে চিহ্নিত করা হয়। স্বাভাবিক সংখ্যাগুলোই প্রথম আবিষ্কৃত হয় এবং গণনার জন্য এক সময় শুধু এগুলোই ব্যবহার করা হতো। সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেটকে N দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অতএব, $N = \{1, 2, 3, 4, 5, - - - - - -\}$

পূর্ণ সংখ্যার সেট (Set of Integers)

শূন্যসহ ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক সকল অখন্ড সংখ্যাই পূর্ণ সংখ্যার আওতাভুক্ত। স্বাভাবিক সংখ্যা, স্বাভাবিক সংখ্যার ঋণাত্মক এবং শূন্য মিলে যে সংখ্যা গঠিত হয় তাকে পূর্ণ সংখ্যার সেট বলে।

যেমন, - - - - - 3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, - - - - - - - ইত্যাদি পূর্ণসংখ্যার উদাহরণ।

সকল পূর্ণ সংখ্যার সেটকে Z দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অতএব, $Z = \{- - - - -, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, - - - - -\}$

স্বাভাবিক সংখ্যা এবং পূর্ণ সংখ্যার বর্ণনা থেকে আমরা পাই, Z এর মধ্যে N এর সকল সদস্য অন্তর্ভুক্ত আছে।

অতএব, N হল Z এর উপসেট অর্থাৎ $N \subset Z$.

মূলদ সংখ্যার সেট (Set of Rational Numbers)

যে সমস্ত সংখ্যা দুটি পূর্ণ সংখ্যার অনুপাত রূপে প্রকাশ করা যায় সেগুলোই মূলদ সংখ্যা। অর্থাৎ যে সংখ্যাকে $\frac{a}{b}$ (এখানে a ও b পূর্ণ সংখ্যা এবং $b \neq 0$) আকারে প্রকাশ করা যায় ঐ সংখ্যাকে মূলদ সংখ্যা বলা হয়।

যেমন, $\frac{10}{17}, \frac{2}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{1}{-3}$ ইত্যাদি মূলদ সংখ্যার উদাহরণ।

উল্লেখ্য, যদি b = 1 হয় তাহলে প্রত্যেক পূর্ণ সংখ্যাই মূলদ সংখ্যা। অর্থাৎ $10 = \frac{10}{1}, -3 = \frac{-3}{1}$ ইত্যাদি।

অতএব, সকল পূর্ণ সংখ্যা মূলদ সংখ্যার অন্তর্ভুক্ত।

মূলদ সংখ্যার সেটকে Q দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অতএব, $Q = \{x \mid x = \frac{a}{b}$ যেখানে $a, b \in Z$ এবং $b \neq 0\}$

এক্ষেত্রে পূর্ণসংখ্যার সেট Z হল মূলদ সংখ্যার সেট Q এর উপসেট। অতএব, $Z \subset Q$

পূর্বের আলোচনায় আমরা পেয়েছি, $N \subset Z$ এবং এক্ষেত্রে $Z \subset Q$ সুতরাং $N \subset Z \subset Q$.

অমূলদ সংখ্যার সেট (Set of irrational numbers)

যে সকল সংখ্যাকে $\frac{a}{b}$ (যেখানে a ও b পূর্ণসংখ্যা এবং $b \neq 0$) আকারে প্রকাশ করা যায় না, তাদেরকে অমূলদ সংখ্যা বলে।

যেমন, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, π, e, $\sqrt{11}$ ইত্যাদি অমূলদ সংখ্যা। অমূলদ সংখ্যার সেটকে Q' দ্বারা প্রকাশ করা হয়। স্পষ্টতই, আমরা পাই $Q \cap Q' = \Phi$ (ফাঁকা সেট)

বাস্তব সংখ্যার সেট (Set of real numbers)

সকল মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যাকে একত্রে বাস্তব সংখ্যা বলে। অর্থাৎ $Q \cup Q'$ হল বাস্তব সংখ্যার সেট। বাস্তব সংখ্যার সেটকে R দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অতএব, $R = Q \cup Q'$। মূলদ সংখ্যা এবং বাস্তব সংখ্যার বর্ণনা থেকে আমরা পাই মূলদ সংখ্যার সেট হল বাস্তব সংখ্যার সেটের উপসেট অর্থাৎ $Q \subset R$.

অতএব, $N \subset Z \subset Q$ এবং $Q \subset R$ থেকে পাই,

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

বাস্তব সংখ্যার সেট R এর উপসেটগুলো নিম্নরূপ ঃ

(ক) স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N

(খ) পূর্ণ সংখ্যার সেট Z

(গ) মূলদ সংখ্যার সেট Q

(ঘ) অমূলদ সংখা সেট Q'

বাস্তব সংখ্যার পরমমান (Absolute value of real number)

কোন বাস্তব সংখ্যা x কে যদি সংখ্যারেখায় একটি বিন্দু ধরা হয়, তবে এই বিন্দু এবং মূলবিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্বকে x এর পরমমান বলা হয়। যেহেতু দূরত্ব কখনও ঋণাত্মক হয়না, তাই বাস্তব সংখ্যার পরমানমান ঋণাত্মক হতে পারে না। বাস্তব সংখ্যার পরমমান বলতে এর সংখ্যামান (numerical value) বোঝায়।

কোন বাস্তব সংখ্যা x-এর পরমমানকে $|x|$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং সংজ্ঞা নিম্নরূপ ঃ

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ যখন } x > 0 \\ 0, \text{ যখন } x = 0 \\ -x, \text{ যখন } x<0 \end{cases}$$

বাস্তব সংখ্যার পরমমান বলতে এর সংখ্যামানকে বোঝায়।

উদাহরণ ঃ $x = 3$ হলে $|x| = |3| = 3$, যেহেতু $x = 3>0$

$x = -2$ হলে $|x| = |-2| = -(-2) =2$, যেহেতু $x = -2<0$.

$x = 0$ হলে $|x| = |0| = 0$, যেহেতু $x = 0$.

পরমমানের ধর্মাবলী ঃ

(ক) সকল $x \in R$ এর জন্য $|x| = |-x|$

উদাহরণস্বরূপ ঃ $x = 3$ হলে $|x| = |3| = 3$ এবং $|-x| = |-3| = 3$

$\therefore \ |x| = |-x|$

(খ) সকল $x \in R$ এর জন্য $|x| \geq x$

প্রমাণ ঃ যদি $x \geq 0$ হয়, তাহলে $|x| = x$

আবার যেহেতু $x \geq x$, সুতরাং $|x| \geq x$

যদি $x < 0$ হয়, তাহলে $x + (-x)<0 + (-x)$

বা, $0<-x$

বা, $-x>0$

আবার $-x>0$ হলে $0>x$, সুতরাং $-x>x$

কিন্তু $x<0$ হলে $|x| = -x$, সুতরাং $|x| >x$

অতএব, $|x| \geq x$

(গ) সকল $x, y \in R$ এর জন্য $|xy| = |x||y|$

প্রমাণ ঃ এখানে চারটি ভিন্ন ক্ষেত্রে থাকতে পারে।

প্রথম ক্ষেত্র ঃ $x \geq 0, y \geq 0$

অতএব, $xy \geq 0,$

সংজ্ঞা হতে পাই,

$|x| = x,\ |y| = y$ এবং $|xy| = xy$

$\therefore\ |xy| = xy = |x||y|$

দ্বিতীয় ক্ষেত্র ঃ $x \geq 0, y < 0$

অতএব, $xy \leq 0,\ |xy| = -xy$

সংজ্ঞা হতে পাই, $|x| = x,\ |y| = -y$

$\therefore\ |xy| = -xy = x.-y = |x||y|$

তৃতীয় ক্ষেত্র ঃ $x < 0, y \geq 0$

অতএব, $xy \leq 0, |xy| = -xy$

সংজ্ঞা হতে পাই, $|x| = -x,\quad |y| = -y$

$\therefore\ |xy| = -xy = -x..y = |x||y|$

চতুর্থ ক্ষেত্র ঃ $x < 0, y < 0$

অতএব, $xy < 0 \qquad \therefore\ |xy| = xy$

সংজ্ঞা হতে পাই, $|x| = -x,\quad |y| = -y$

$\therefore\ |xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$

$\therefore\ |xy| = |x||y|$

(ঘ) সকল $x, y \in R$ এর জন্য $|x + y| \leq |x| + |y|$

প্রমাণ ঃ সকল $x, y \in R$ এর জন্য

$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$

$= x^2 + 2|x||y| + y^2 \qquad [\because |x|^2 = x^2, |y|^2 = y^2]$

$= x^2 + 2|xy| + y^2 \qquad [\because |x||y| = |xy|]$

$\therefore\ (|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|xy| + y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2\ [\because |xy| \geq xy]$

বা, $(|x| + |y|)^2 \geq (x+y)^2 = |x+y|^2$

বা, $(|x| + |y|)^2 \geq |x + y|^2$

বা, $|x| + |y| \geq |x+y|$

অতএব, $|x| + |y| \geq |x+y|$

অর্থাৎ $|x + y| \leq |x| + |y|$

(ঙ) $x, a \in R$ এর জন্য $|x| < a \in -a<x<a$

প্রমাণ ঃ মনে করুন, $|x| < a$, তাহলে যখন $x \geq 0$, তখন $x < a$.

আবার $x<0$ হলে, $|x| = -x \Rightarrow -x<a \Rightarrow x>-a$ অর্থাৎ $-a<x$.

সুতরাং $|x| < a \Rightarrow -a<x<a$.

উদাহরণ-1ঃ নিচের সংখ্যাগুলো কোন সেটের উপাদান কারণসহ উল্লেখ করুন ঃ

(i) $-\frac{5}{8}$, (ii)) 15, (iii) $\sqrt[3]{7}$

সমাধান ঃ (i) $-\frac{5}{8} \in Q$ যেহেতু সংখ্যাটি -5 এবং 8 এই দুটি পূর্ণ সংখ্যার অনুপাত।

আবার সেহেতু $Q \subset R$ অতএব $-\frac{5}{8} \in \mathrm{R}$

(ii) $17 \in N$, সেহেতু ধনাত্মক অখন্ড সংখ্যা।

আবার, $17 \in \mathrm{Z}$, $17 \in Q$, $17 \in R$, কারণ Z, Q এবং R প্রতিটি সেটেরই উপসেট N.

(iii) $\sqrt[3]{7} \in Q'$ কারণ এই সংখ্যাটিকে $\frac{a}{b}$, $a, b \in Z$, b ◘0 এই আকারে প্রকাশ করা যায় না। অতএব এটি একটি অমূলদ সংখ্যা।

উদাহরণ-2 ঃ মান নির্ণয় করুন ঃ

(i) $|-8| + |3-1|$, (ii) $13 + |-1-4| -3- |-8|$

সমাধান ঃ (i) $|-8| + |3-1|$

$= |-8| + |2| = 8 + 2 = 10$

(ii) $13 + |-1-4| -3- |-8|$

$= 13 + |-5| -3- |-8|$

$= 13 + 5 - 3 - 8 = 7$

উদাহরণ-3ঃ পরম মান চিহ্ন ব্যবহার না করে অসমতাগুলো প্রকাশ করুন ঃ

(i) $|x| \leq 7$, (ii) $|2x + 3| < 7$

সমাধান ঃ (i) আমরা জানি, $|x| < a$ হলে $-a<x<a$

অতএব, $|x| \leq 7$ হলে, $-7 \leq x \leq 7$

(ii) আবার $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$

অতএব, $|2x+3| < 7$

$\Rightarrow -7 < 2x + 3 < 7$

বা, $-7-3<2x+3-3<7-3$

বা, $-10<2x<7$

বা, $-5<x<2$

অতএব, $-5<x<2$.

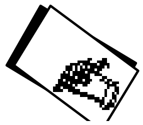
উদাহরণ-4 ঃ $-2<x<6$ অসমতাকে পরমমান চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত অসমতাকে এরূপভাবে প্রকাশ করতে হবে যেন, একই সংখ্যা বিপরীত চিহ্নসহ ঐ অসমতার দুই প্রান্তে থাকে। প্রদত্ত অসমতার প্রত্যেক প্রান্তের সাথে -2 যোগ করে পাই,

$-2-2<x-2<6-2$

বা, $-4<x-2<4$

অর্থাৎ $|x-2| < 4$.



অনুশীলনী-২.২

1. নিচের তথ্যগুলো সত্য না মিথ্যা কারণসহ উল্লেখ করুন ঃ

   (i) $-3 \in N$ (ii) $-5 \in Q$ (iii) $\sqrt[3]{8} \in N$, (iv) $\sqrt{2} \in Q'$

   (v) $4 \in Z$, (vi) $\pi \in R$ (vii) $\frac{1}{2} \in Z$, (viii) $\frac{2}{3} \in Z$

2. সত্য মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

   (i) সকল স্বাভাবিক সংখ্যা পূর্ণসংখ্যা।

   (ii) সকল পূর্ণসংখ্যা স্বাভাবিক সংখ্যা।

   (iii) সকল বাস্তব সংখ্যা মূলদ সংখ্যা।

   (iv) সকল মূলদ সংখ্যা বাস্তব সংখ্যা।

   (v) সকল অমূলদ সংখ্যা বাস্তব সংখ্যা।

3. মান নির্ণয় করুন ঃ

   (i) $|-3-5|$, (ii) $||1-2|-|-6||$, (iii) $||2-6|-|1-9||$

4. পরমমান চিহ্ন ব্যতীত প্রকাশ করুন ঃ

   (i) $|x-2|<5$, (ii) $|2x+4|<8$

5. পরমমান চিহ্ন ব্যবহার করে নিচের অসমতাগুলো প্রকাশ করুন ঃ

   (i) $4<x<10$, (ii) $-7<x<-1$, (iii) $-3<x-9$

পাঠ ৩ জটিল সংখ্যার বর্ণনা, আরগন্ড চিত্র ও অনুবদ্ধি সংখ্যা

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- জটিল সংখ্যা কী বর্ণনা করতে পারবেন,
- জটিল সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করতে পারবেন,
- আরগন্ড চিত্রের সাহায্যে জটিল সংখ্যার ব্যাখ্যা দিতে পারবেন,
- অনুবন্ধী সংখ্যা ব্যাখ্যা ও তা প্রয়োগ করতে পারবেন।

জটিল সংখ্যা (Complex Number)

কোন ধনাত্মক সংখ্যার বর্গমূল করলে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সংখ্যা পাওয়া যায়। কিন্তু একটি ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কোনটিই নয়। যেমন- $\sqrt{-x^2} \neq +x$ বা $-x$.

মনে করুন, $x^2+1 = 0$ সমীকরণটি সমাধান করতে হবে। এক্ষেত্রে, $x^2 = -1$, কিন্তু এমন কোন বাস্তব সংখ্যা নেই যার বর্গ ঋণাত্মক হয়। এ ধরণের সমীকরণ সমাধান করার জন্য নতুন এক ধরনের সংখ্যা প্রবর্তন করা হয়েছে। এ ধরনের সংখ্যাকে জটিল সংখ্যা বলা হয়।

জটিল সংখ্যার জন্য একটি প্রতীক i ব্যবহার করা হয়, যেখানে $i^2 = -1$ অর্থাৎ $i = \sqrt{-1}$ এই $i = \sqrt{-1}$ কে জটিল সংখ্যার একক মনে করা হয়।

জটিল সংখ্যার প্রতীক i ব্যবহার করা হয়, যেখানে $i^2 = -1$ অর্থাৎ $i = \sqrt{-1}$ এই $i = \sqrt{-1}$ কে জটিল সংখ্যার একক মনে করা হয়।

সংজ্ঞা ঃ a এবং b বাস্তব সংখ্যা হলে, $a + ib$ আকারের যেকোন সংখ্যাকে জটিল সংখ্যা বলা হয়। এখানে a এবং b যথাক্রমে জটিল সংখ্যার বাস্তব অংশ (real part) এবং অবাস্তব অংশ (imaginary part) বলা হয়।

$a + ib$ জটিল সংখ্যাটতে যদি $b=0$ হয়, তবে সংখ্যাটি বাস্তব এবং $a = 0$ হলে সংখ্যাটি অবাস্তব হবে।

$a+ib = 0$ হলে $a = 0$ এবং $b = 0$ হবে।

আরগন্ড চিত্র (Agrand Diagrm)

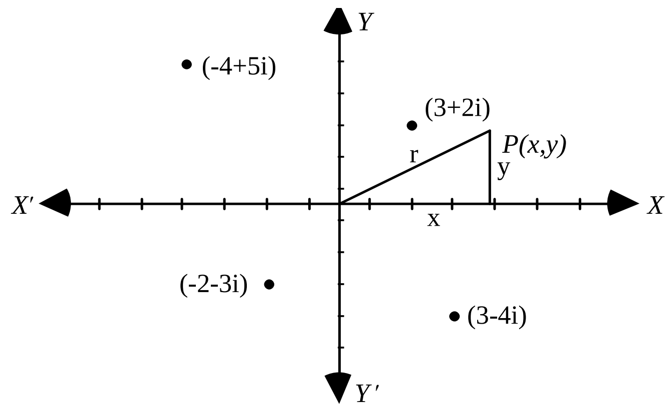
ইউনিট-১ এর পাঠ-৭ এ আলোচনা করা হয়েছে যে, দুটি সংখ্যা দ্বারা গঠিত ক্রমজোড় (a, b) কে কার্তেসীয় সমতলে কোন বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করা যায়। $a + ib$ আকারের জটিল সংখ্যাটিকে আমাদের বিবেচনাধীন x- অক্ষ এবং y- অক্ষ দ্বারা নির্ধারিত xy তলের উপরিস্থ (a,b) বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

$a+ib$ জটিল সংখ্যার বাস্তব অংশ 'a' কে x অক্ষ বরাবর এবং অবাস্তব অংশ 'b' কে y অক্ষ বরাবর ধরা হয়। এভাবে $a + ib$ জটিল সংখ্যা থেকে প্রাপ্ত (a, b) বিন্দুটি সমতলে স্থাপন করা হয়।

যে সব জটিল সংখ্যা সম্পূর্ণভাবে বাস্তব তা x- অক্ষের উপরস্থ বিন্দু দ্বারা নির্দেশিত হবে। আবার জটিল সংখ্যা সম্পূর্ণ অবাস্তব হলে y- অক্ষের উপরস্থ বিন্দু দ্বারা সূচিত হয়।

উদাহরণ ঃ $3 + 2i$, $3-4i$, $-4+5i$, $-2-3i$, $x+iy$ জটিল সংখ্যাগুলোকে যথাক্রমে $(3, 2)$, $(3, -4)$, $(-4, 5)$, $(-2, -3)$, (x, y) বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

এদেরকে নিম্নে সমতলে উপস্থাপন করা হল ঃ



চিত্র ২.২

যে চিত্রের উপর জটিল সংখ্যাকে কোন বিন্দু দ্বারা সূচিত করা হয় তাকে আরগন্ডের চিত্র বলা হয়।
যে সমতলে আরগন্ড চিত্র অঙ্কন করা হয় তাকে জটিল তল (complex plane) বলা হয়।

অনুবন্ধি জটিল সংখ্যা (Conjugate complex numbers)

$a+ib$ এবং $a-ib$ জটিল সংখ্যা দুটিকে অনুবন্ধি জটিল সংখ্যা বলে। এদের একটিকে অপরটির অনুবন্ধি সংখ্যা বলা হয়।

$a+ib$ কে z দ্বারা সূচিত করলে, $a+ib$ এর অনুবন্ধি অর্থাৎ

$a-ib$ কে $\overline{z}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

অতএব, $z = a+ib$ হলে $\overline{z}$ ২$= a-ib$

জটিল সংখ্যার যোগ ও বিয়োগ (Addition and subtraction of complex number)

আরগন্ড চিত্রের সাহায্যে জটিল সংখ্যার যোগ ও বিয়োগের নিয়ম বের করা যায়। আলোচনাতে সূত্রটি প্রমাণ না করে শুধুমাত্র সূত্রটি বর্ণনা করা হল।

মনে করুন, $z_1 = x_1+iy_1$ এবং $z_2 = x_2+iy_2$ দুটি জটিল সংখ্যা। এদের যোগফল হবে z_1+z_2

$\therefore \quad z_1+z_2 = x_1+iy_1 + x_2+iy_2$

$= (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$,

এখানে বাস্তব অংশ বাস্তব অংশের সাথে এবং অবাস্তব অংশ অবাস্তব অংশের সাথে যোগ করা হয়েছে।

অতএব, $z_1+z_2 = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$

যোগের নিয়মঃ দুটি জটিল সংখ্যার যোগফল=এদের বাস্তব অংশের যোগফল + i (এদের অবাস্তব অংশের যোগফল)

উদাহরণ ঃ $z_1 = 2 + 4i$ এবং $z_2 = 4 + 3i$ হলে $z_1 + z_2$ এর মান কত?

সমাধানঃ এখানে, $z_1 + z_2 = 2 + 4i + 4 + 3i$

$= (2+4) + i(4+3)$

$= 6 + i7$

আবার $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)$

$= x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2$

$= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

$\therefore \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

বিয়োগের নিয়ম ঃ দুটি জটিল সংখ্যার বিয়োগফল = এদের বাস্তব অংশের বিয়োগফল + i (এদের অবাস্তব অংশের বিয়োগফল)

উদাহরণ ঃ $z_1 = 2+i$ এবং $z_2 = 1+5i$ হলে $z_1 - z_2$ কত?

সমাধানঃ এখানে $z_1 - z_2 = (2+i) - (1+5i)$

$$= 2 + i - 1 - 5i$$
$$= (2-1) + i(1-5)$$
$$= 1 + i(-4)$$
$$= 1 - 4i$$

জটিল সংখ্যার গুণ ও ভাগ

মনে করুন, $z_1 = a+ib$ এবং $z_2 = c+id$

z_1z_2 বের করতে হলে প্রথমে বাস্তব সংখ্যার গুণন প্রক্রিয়ার নিয়ম অনুসারে $(a+ib)$ এবং $(c+id)$ গুণ করতে হবে। এরপর গুণফলে i^2 এর পরিবর্তে -1 বসাতে হবে অর্থাৎ $i^2 = -1$ বসাতে হবে।

উদাহরণ ঃ $(3+2i)\ (4+5i)$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ $(3+2i)\ (4+5i)$

$$= 3\ (4+5i) + 2i(4+5i)$$
$$= 12 + 15i + 8i + 10i^2$$
$$= 12 + 23i + 10\ (-1) \qquad [\because\ i^2 = -1]$$
$$= 12 + 23i - 10$$
$$= 2 + 23i$$

অতএব $(3+2i)\ (4+5i) = 2+23i$

আবার একটি জটিল সংখ্যাকে অপর একটি জটিল সংখ্যা দ্বারা ভাগ করতে হলে অনুবন্ধি জটিল সংখ্যার সাহায্য নিয়ে ভাগফল নির্ণয় করতে হয়। প্রথমে যে জটিল সংখ্যা দিয়ে ভাগ করতে হবে তার অনুবন্ধি জটিল সংখ্যা দিয়ে লব ও হরকে গুণ করতে হবে। এরপর জটিল সংখ্যার গুণনের নিয়ম অনুসারে বাকী গণনা করতে হবে।

উদাহরণ ঃ $\dfrac{3+2i}{4+5i}$ এর মান নির্ণয় করুন

সমাধানঃ $\dfrac{3+2i}{4+5i} = \dfrac{(3+2i)\ (4-5i)}{(4+5i)\ (4-5i)}$ [হর ও লবকে হরের অনুবন্ধি সংখ্যা দ্বারা গুণ করে]

$$= \frac{12-15i+8i-10i^2}{(4)^2 - (5i)^2}$$
$$= \frac{12 - 7i - 10\ (-1)}{16-25i^2}, \qquad [\because i^2 = -1\ ]$$
$$= \frac{12-7i+10}{16-25(-1)}$$
$$= \frac{22-7i}{16+25} = \frac{22-7i}{41}$$
$$= \frac{22}{41} - \frac{7}{41}\ i$$

সমাধানকৃত উদাহরণ ঃ

উদাহরণ- 1ঃ $\dfrac{1+i}{4+3i}$ কে $A+iB$ আকারে প্রকাশ করুন।

সমাধান ঃ $\dfrac{1+i}{4+3i} = \dfrac{(1+i)\,(4-3i)}{(4+3i)\,(4-3i)}$

$= \dfrac{4-3i+4i-3i^2}{(4)^2-(3i)^2}$

$= \dfrac{4+i-3i^2}{16-9i^2} = \dfrac{4+i-3(-1)}{16-9(-1)}$

$= \dfrac{4+i+3}{16+9} = \dfrac{7+i}{25} = \dfrac{7}{25} + \dfrac{1}{25}\,i$

অতএব $\dfrac{1+i}{4+3i} = \dfrac{7}{25} + \dfrac{1}{25}\,i$, যাহা $A+iB$ আকারের।

উদাহরণ-2 ঃ মনে করুন, $z = 2 + 3i$, তাহলে $z + \bar{z}$ এবং $z\,\bar{z}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $z = 2 + 3\,i$

সমাধান ঃ $z = 2 + 3\,i$

অতএব, $\bar{z} = 2 - 3i$

এখন, $z + \bar{z} = 2+3i + 2-3i = 4$

এবং $z\,\bar{z} = (2+3i)\,(2-3i)$

$= (2)^2 - (3i)^2$

$= 4 - 9i^2$

$= 4 - 9 \infty (-1)$

$= 4 + 9 = 13$

উদাহরণ-3 ঃ $x = 2+i$ হলে প্রমাণ করুন ঃ $x^2 - 4x + 5 = 0$

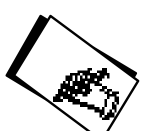
সমাধান ঃ দেয়া আছে, $x = 2 + i$

অতএব, $x - 2 = i$

বা, $(x-2)^2 = i^2$

বা, $x^2 - 4x + 4 = 1$

বা, $x^2 - 4x + 5 = 0$



অনুশীলনী-২.৩

1. A + iB আকারে প্রকাশ করুন ঃ

   (i) $\dfrac{5+2i}{4-3i}$, (ii) $(2+i)\,(4+5i)$

2. সরল করুন ঃ

   (i) $\dfrac{3+2i}{3-5i} + \dfrac{3-2i}{2+5i}$, (ii) $\dfrac{(x+iy)^2}{x-iy} + \dfrac{(x-iy)^2}{x+iy}$

3. $x = 4 - 3i$ হলে প্রমাণ করুন ঃ $x^2 - 8x + 25 = 0$

4. যদি $z_1 = 2+5i$ এবং $z_2 = 1 - 4i$ হয়, তবে $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ এবং $\bar{z}_1 \bar{z}_2$ এর মান নির্ণয় করুন।

5. আরগন্ড চিত্রে নিচের সংখ্যাগুলো বসান ঃ

   (i) $5+3i$, (ii) $-8+5i$, (iii) $-3-2i$, (iv) $7 - 5i$

পাঠ ৪ জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- জটিল সংখ্যার মডুলাস এবং আর্গুমেন্ট কি তা বর্ণনা করতে পারবেন;
- জটিল সংখ্যার মডুলাসের গুণাবলী ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

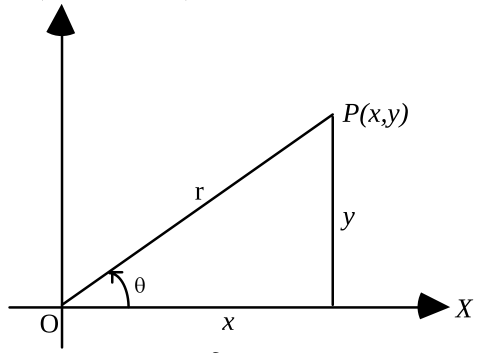
জটিল সংখ্যার মডুলাস (modulus) এবং আর্গুমেন্ট (argument)

$z + x + iy$ একটি জটিল সংখ্যা হলে এর মডুলাস $|z|$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $|z|$ কে নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়ঃ

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

যেমন, $z = 2 + 3i$ এর মডুলাস হবে, $|z| = |2 + 3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

$3-2i$ এর মডুলাস হবে, $|3 - 2i| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$



চিত্র ২.৩

উপরের আরগন্ড চিত্রে $OP = r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|z|$ কে সংক্ষেপে লেখা হয় mod z.

আবার, θ কে বলা হয় z এর আর্গুমেন্ট এবং সংক্ষেপে লেখা হয় আর্গ z অর্থাৎ arg z.

আর্গ z কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় ঃ

$$\arg z = \theta = tan^{-1}\frac{y}{x}$$

অতএব, $x + iy$ দ্বারা একটি জটিল সংখ্যা সূচিত হলে ঐ সংখ্যাটির মডুলাস $= r = \sqrt{x^2+y^2}$ এবং

সংখ্যাটির আর্গুমেন্ট $= \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

y এবং x এর মান নির্দিষ্ট থাকলেও ত্রিকোণমিতি থেকে আমরা θ এর অসংখ্য মান পাই। কিন্তু $-\pi < \theta < \pi$ ব্যবধির মধ্যে θ এর অনন্য (unique) মান পাওয়া যায়। ঐ মানকে আর্গুমেন্ট θ এর মুখ্য মান বলা হয়। অন্যকিছু বলা না থাকলে মুখ্যমানকে জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট বিবেচনা করা হয়। আর্গুমেন্ট অর্থাৎ $\theta-$ কে সাধারণত রেডিয়ানে প্রকাশ করা হয়।

P বিন্দুটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে থাকলে $P(-x, y)$ হবে এবং $z = -x+iy$, এক্ষেত্রে মডুলাস $r = \sqrt{x^2+y^2}$ কিন্তু $\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{y}{x}\right)$ অর্থাৎ $\tan\theta = -\frac{y}{x}$

সুতরাং দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত P বিন্দু দ্বারা সূচিত জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট সূচক কোনটি $\frac{\pi}{2}$ এর চেয়ে বড় এবং π এর চেয়ে ছোট হবে।

অতএব, $\theta = \pi - \tan^{-1}\frac{y}{x}$.

আবার P বিন্দুটি তৃতীয় চতুর্ভাগে থাকলে $P(-x, -y)$ হবে এবং $z = -x - iy$, এক্ষেত্রে মডুলাস $r = \sqrt{x^2+y^2}$ এবং আর্গুমেন্ট.
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-y}{-x}\right) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ অর্থাৎ $\tan\theta = \frac{y}{x}$
সুতরাং তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত P বিন্দুর আর্গুমেন্ট দুই সমকোণ অপেক্ষা বড় কিন্তু তিন সমকোন অপেক্ষা ছোট।
অতএব, $\theta = \pi + \tan^{-1}\frac{y}{x}$

অনুরূপভাবে, চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত $P(x, -y)$ বিন্দু দ্বারা সূচিত $z = x-iy$ জটিল সংখ্যার মডুলাস $r = \sqrt{x^2+y^2}$ এবং আর্গুমেন্ট তিন সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু চার সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। অতএব, $\theta = 2\pi - \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$|z|$ কে সংক্ষেপে লেখা হয় mod z. এবং আর্গ z কে লেখা হয় arg $z = \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

উদাহরণ ঃ $z = 4 + 5i$ হলে $\arg z = \tan^{-1}\frac{5}{4}$

$z = -2 + 3i$ হলে $\arg z = \pi - \tan^{-1}\frac{3}{2}$

$z = -3 - 2i$ হলে $\arg z = \pi + \tan^{-1}\frac{2}{3}$

$z = 3 - 4i$ হলে $\arg z = 2\pi - \tan^{-1}\frac{4}{3}$

মডুলাসের গুণাবলী ঃ

1. একটি জটিল সংখ্যা এবং এর অনুবন্ধি সংখ্যার মডুলাস অভিন্ন।

প্রমাণ ঃ মনে করুন, $a+ib$ একটি জটিল সংখ্যা।

$\therefore$ $(a+ib)$ এর মডুলাস $= |a + ib| = \sqrt{a^2+b^2}$

$a + ib$ এর অনুবন্ধি সংখ্যা $= a-ib$

এখন $(a-ib)$ এর মডুলাস $= |a - ib| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore$ $|a + ib| = |a - ib|$

2. দুটি জটিল সংখ্যার গুণফলের মডুলাস এদের নিজ নিজ মডুলাসদ্বয়ের গুণফলের সমান।

প্রমাণ ঃ মনে করুন, $a + ib$ এবং $c + id$ দুটি জটিল রাশি।

$(a + ib)$ এর মডুলাস $= |a + ib| = \sqrt{a^2+b^2}$

$(c + id)$ এর মডুলাস $= |c+id| = \sqrt{c^2+d^2}$

$$
\begin{aligned}
\text{এখন } (a+ib)(c+id) &= ac + iad + ibc + i^2bd \\
&= ac + iad + ibc - bd \\
&= (ac - bd) + i(ad + bc) \\
\therefore |(a+ib)(c+id)| &= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad + bc)^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2} \\
&= \sqrt{a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2)}
\end{aligned}
$$

$$= \sqrt{(c^2+d^2)\,(a^2+b^2)}$$
$$= \sqrt{c^2+d^2} \times \sqrt{a^2+b^2}$$
$$= |\,(c+id)\,|\,|\,(a+ib)\,|$$

অতএব, $|\,(a+ib)\,(c+id)\,| = |a+ib|\,|c+id|$

3. দুটি জটিল সংখ্যার ভাগফলের মডুলাস এদের মডুলাসদ্বয়ের ভাগফলের সমান।

প্রমাণ ঃ মনে করুন, $a+ib$ এবং $c+id$ দুটি জটিল সংখ্যা।

এখন, $$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)\,(c-id)}{(c+id)\,(c-id)}$$
$$= \frac{ac - iad + ibc - i^2bd}{c^2 - i^2d^2}$$
$$= \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$
$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

$|\,a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ এবং $|\,c+id\,| = \sqrt{c^2+d^2}$

$$\left|\frac{a+ib}{c+id}\right| = \sqrt{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{(ac+bd)^2 + (bc-ad)^2}{(c^2+d^2)^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2}{(c^2+d^2)^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2}{(c^2+d^2)^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)\,(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{|\,a+ib\,|}{|\,c+id\,|}$$

অতএব, $$\left|\frac{a+ib}{c+id}\right| = \frac{|\,a+ib\,|}{|\,c+id\,|}$$

সমাধানকৃত উদাহরণ ঃ

উদাহরণ-1 ঃ $5 + 6i$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করুন, $z = 5 + 6i$

$\therefore$ মডুলাস $= |\,z\,| = \sqrt{5^2+6^2} = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$

আর্গুমেন্ট $\theta = \tan^{-1}\frac{6}{5}$

অতএব, মডুলাস $= \sqrt{61}$ এবং আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}\frac{6}{5}$

উদাহরণ-2 ঃ প্রমাণ করুন $\left|\frac{x-iy}{x+iy}\right| = 1$

সমাধান ঃ আমরা জানি, দুটি জটিল সংখ্যার ভাগফলের মডুলাস এদের মডুলাসদ্বয়ের ভাগফলের সমান।

অতএব, $\left|\frac{x-iy}{x+iy}\right| = \frac{|x-iy|}{|x+iy|}$

$$= \frac{\sqrt{x^2+(-y)^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$$

$$\therefore \quad \left|\frac{x-iy}{x+iy}\right| = 1$$

উদাহরণ-3ঃ $z_1 = 9 + 5i$ এবং $z_2 = 3-2i$ হলে, প্রমাণ করুন $|z_1||z_2| = |z_1 z_2|$

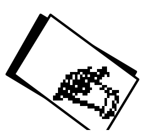
সমাধান ঃ $z_1 = 9+5i,\ |z_1| = \sqrt{9^2+5^2} = \sqrt{81+25} = \sqrt{106}$

$z_2 = 3-2i,\ |z_2| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (9+5i)(3-2i) \\ &= 27 - 18i + 15i - 10i^2 \\ &= 27 - 3i + 10 \\ &= 37 - 3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ |z_1 z_2| &= \sqrt{(37)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{1369+9} \\ &= \sqrt{1378} \\ &= \sqrt{106 \infty 13} \\ &= \sqrt{106} \infty \sqrt{13} \\ &= |z_1||z_2| \end{aligned}$$

অতএব, $|z_1||z_2| = |z_1 z_2|$



অনুশীলনী-২.৪

1. নিচের সংখ্যাগুলোর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করুন ঃ
   (i) $3-5i$, (ii) $12+5i$, (iii) $1+\sqrt{3}\ i$;

2. $\frac{5-i}{2-3i}$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করুন।

3. যদি z এবং a জটিল সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ করুন,
   $|z+a|^2 + |z-a|^2 = 2(|z|^2 + |a|^2)$

4. $z = x + iy$ দ্বারা $|z+1| + |z-1| = 4$ সমীকরণ সিদ্ধ হলে
   প্রমাণ করুন, $3x^2 + 4y^2 = 12$

পাঠ ৫ জটিল সংখ্যার গুণাবলী এবং পোলার আকার

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- জটিল সংখ্যার গুণাবলী বর্ণনা করতে পারবেন;
- জটিল সংখ্যার পোলার স্থানাংক নির্ণয় করতে পারবেন।

জটিল সংখ্যার গুণাবলী

1. যদি $a+ib=0$ হয়, তবে $a=0, b=0$

প্রমাণ ঃ সেহেতু $a+ib=0$, বা, $a=-ib$

$\therefore\ a^2=(-ib)^2$

বা, $a^2=i^2b^2=-b^2$

$\therefore\ a^2+b^2=0$

যেহেতু a^2 এবং b^2 দুটি সংখ্যাই ধনাত্মক, সুতরাং a ও b আলাদাভাবে শূন্য (0) না হলে এদের যোগফল শূন্য হতে পারে না।

সুতরাং $a=0, b=0$.

2. $a+ib=c+id$ হলে, $a=c$ এবং $b=d$

প্রমাণ ঃ যেহেতু $a+ib=c+id$

$\therefore\ a-c=id-ib$

বা, $a-c=i\,(d-b)$

বা, $(a-c)^2=i^2(d-b)^2$

বা, $(a-c)^2=-(d-b)^2$

বা, $(a-c)^2+(d-b)^2=0$

$\therefore\ a-c=0,\ d-b=0$ [(1) নং এর অনুরূপ যুক্তি প্রয়োগ করে]

অতএব, $a=c$ এবং $b=d$.

3. একটি জটিল সংখ্যা ও তার অনুবন্ধি সংখ্যার যোগফল ও গুণফল উভয়ই বাস্তব সংখ্যা হবে।

প্রমাণ ঃ মনে করুন, $a+ib$ একটি জটিল সংখ্যা

তাহলে, $a+ib$ এর অনুবন্ধি সংখ্যা হবে $a-ib$.

এখন $(a+ib)+(a-ib)=a+ib+a-ib=2a$, যা একটি বাস্তব সংখ্যা

আবার, $(a+ib)\,(a-ib)=a^2-i^2b^2=a^2-(-1)b^2=a^2+b^2$, যা একটি বাস্তব সংখ্যা।

4. অনুবন্ধি নয় এমন দুটি জটিল সংখ্যার যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল এবং ভাগফল প্রত্যেকটিই জটিল সংখ্যা হবে।

প্রমাণ ঃ মনে করুন, $a+ib$ এবং $c+id$ দুটি জটিল সংখ্যা।

$\therefore\ (a+ib)+(c+id)=(a+c)+i\,(b+d)$, যা একটি জটিল সংখ্যা

$(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$, যা একটি জটিল সংখ্যা

$$\begin{aligned}(a+ib)\,(c+id) &= ac+iad+ibc+i^2bd\\ &= ac+iad+ibc-bd\\ &= (ac-bd)+i\,(ad+bc),\end{aligned}$$

যা একটি জটিল সংখ্যা।

আবার $\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a+ib)\ (c-id)}{(c+id)\ (c-id)}$

$= \frac{ac - iad + ibc - i^2bd}{c^2 - i^2d^2}$

$= \frac{ac - iad + ibc + bd}{c^2 + d^2}$

$= \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$

$= \frac{ac + bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$, যা একটি জটিল সংখ্যা।

5. কোন ধনাত্মক অখন্ড সূচক শক্তিবিশিষ্ট জটিল সংখ্যা একটি জটিল সংখ্যা হবে।

প্রমাণ ঃ $a + ib$ একটি জটিল সংখ্যা হবে,

$(a + ib)^2 = a^2 + i.2ab + i^2b^2$
$= a^2 + i.2ab - b^2$
$= a^2 - b^2 + i.2ab$

আবার $(a+ib)^3 = a^3 + 3a^2.ib + 3a(ib)^2 + (ib)^3$
$= a^3 + i3a^2b + 3a.i^2b^2 - i^3b^3$
$= a^3 + i3a^2b - 3ab^2 - ib^3$ $\qquad [\because\ i^3 = i^2.i = -i]$
$= (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3)$

অতএব, জটিল সংখ্যার দ্বিতীয়, তৃতীয় ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সূচক শক্তির উভয়ে জটিল রাশি। এভাবে অগ্রসর হয়ে দেখানো যায় যে, যে কোন ধনাত্মক অখন্ড সূচক শক্তিবিশিষ্ট জটিল সংখ্যা একটি জটিল সংখ্যা হবে।

6. যে কোন জটিল সংখ্যার মূল একটি জটিল সংখ্যা হবে।

প্রমাণ ঃ $a + ib$ জটিল সংখ্যার ক্ষেত্রে ধরুন $\sqrt[n]{a+ib} = x$

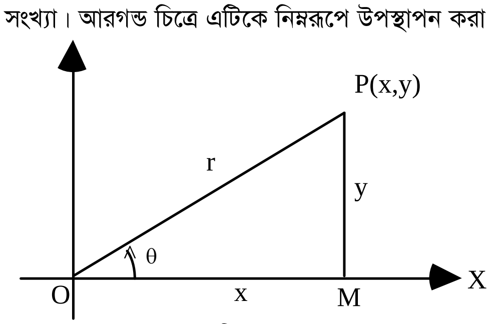
অতএব, $a + ib = x^n$

যদি x বাস্তব সংখ্যা হয়, তাহলে x^n বাস্তব সংখ্যা হবে। এক্ষেত্রে $a + ib = x^n$ সম্পর্ক থেকে বলা যায় একটি বাস্তব সংখ্যা একটি জটিল সংখ্যার সমান, যা অসম্ভব।

অতএব, x অর্থাৎ প্রদত্ত সংখ্যার n তম মূল জটিল সংখ্যা হবে।

জটিল সংখ্যার পোলার আকার

মনে করুন, $x + iy$ একটি জটিল সংখ্যা। আরগন্ড চিত্রে এটিকে নিম্নরূপে উপস্থাপন করা যায় ঃ



চিত্র ২.৪

এখানে $OP = r,\ OM = x,\ MP = y$

অতএব, $\sin\theta = \dfrac{MP}{OP} = \dfrac{y}{r}$

$\therefore\ y = r\sin\theta$

আবার $\cos\theta = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{x}{r}$

$\therefore\ x = r\cos\theta$

সুতরাং $x+iy = r\cos\theta + i\, r\sin\theta$

$\therefore$ $r\cos\theta + i\, r\sin\theta$ বা, $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ কে $x+iy$ জটিল সংখ্যাটির পোলার আকার বলা হয়। এখানে r এবং θ যথাক্রমে জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট।

পোলার আকারে $x+iy$ এর জন্য $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

উদাহরণ-1ঃ নিচের জটিল সংখ্যাগুলোকে পোলার আকারে প্রকাশ করুন,

(i) $9-5i$, (ii) $2+3i$

সমাধান ঃ (i) $9-5i$,

এখানে $r = \sqrt{9^2+(-5)^2} = \sqrt{81+25} = \sqrt{106}$

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{-5}{9}$ $\therefore\ \tan\theta = -\dfrac{5}{9}$

$\therefore$ প্রদত্ত সংখ্যার পোলার আকার $= r\cos\theta + i\, r\sin\theta$

$= \sqrt{106}\ \cos\theta + i\sqrt{106}\ \sin\theta$ যেখানে $\tan\theta = -\dfrac{5}{9}$

$= \sqrt{106}\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\tan\theta = -\dfrac{5}{9}$

(ii) $2 + 3i$

এখানে, $r = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{3}{2}$ $\therefore\ \tan\theta = \dfrac{3}{2}$

$\therefore$ প্রদত্ত সংখ্যার পোলার আকার $= r\cos\theta + i\, r\sin\theta$

$= \sqrt{13}\ \cos\theta + i\sqrt{13}\ \sin\theta,\ \tan\theta = \dfrac{3}{2}$

$= \sqrt{13}\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, যেখানে $\tan\theta = \dfrac{3}{2}$

উদাহরণ-2 ঃ $(a+ib)(c+id) = x+iy$ হলে প্রমাণ করুন ঃ $(a-ib)(c-id) = x-iy$

প্রমাণ ঃ দেয়া আছে, $(a+id)(c+id) = x+iy$

বা, $ac + iad + ibc + i^2bd = x + iy$

বা, $ac + iad + ibc - bd = x + iy$

বা, $(ac - bd) + i(ad + bc) = x + iy$

অতএব, $ac - bd = x,\ ad + bc = y$ [কারণ $a+ib = c + id$ হলে $a = c,\ b = d$]

বামপক্ষ $= (a-id)(c-id)$

$= ac - iad - ibc + i^2bd$

$= ac - iad - ibc - bd$

$= (ac - bd) - i(ad+bc)$

$= x - iy =$ ডানপক্ষ

অনুশীলনী-২.৫

1. নিচের জটিল সংখ্যাগুলোকে পোলার আকারে প্রকাশ করুন ঃ
   (i) $1+i$, (ii) $-2+2i$, (iii) $-1+i\sqrt{3}$
2. $\sqrt[3]{a+ib} = x+iy$ হলে প্রমাণ করুন, $\sqrt[3]{a-ib} = x-iy$
3. $x : y = a + ib : c+id$ হলে, প্রমাণ করুন, $(c^2+d^2)\, x^2-2\,(ac+bd)\, xy+(a^2+b^2)y^2 = 0$
4. সত্য মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ
   i) অনুবন্ধি নয় এমন দুটি জটিল সংখ্যার যোগফল একটি জটিল সংখা।
   ii) অনুবন্ধি দুটি জটিল সংখ্যা যোগফল একটি জটিল সংখ্যা।
   iii) দুটি বাস্তব সংখ্যার যোগফল জটিল সংখ্যা।
   iv) দুটি জটিল সংখ্যার যোগফল একটি বাস্তব সংখ্যা।
   v) জটিল সংখ্যার পোলার আকারে শুধুমাত্র মডুলাস প্রয়োজন হয়।
5. $\sqrt[3]{x+iy} = a+ib$ হলে করুন, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 4(a^2-b^2)$

পাঠ ৬ জটিল সংখ্যার বর্গমূল

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- কিভাবে জটিল সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করতে হয় বর্ণনা করতে পারবেন;
- বর্গমূলের মাধ্যমে সমস্যা সমাধানের দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন।

মনে করুন, $a + ib$ একটি জটিল সংখ্যার। এর বর্গমূল নির্ণয় করতে হবে।
আমরা জানি, একটি জটিল সংখ্যার যে কোন মূল একটি জটিল সংখ্যা।
অতএব, ধরুন, $\sqrt{a+ib} = x+iy$, এখানে x ও y উভয়ই বাস্তব সংখ্যা।

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাওয়া যায়,

$$a+ib = (x+iy)^2 = x^2+i\,2xy+i^2y^2 = x^2-y^2+i2xy$$

অতএব, $a+ib = x^2-y^2+i2xy$

জটিল সংখ্যার সমতা থেকে আমরা পাই,

$$x^2 - y^2 = a$$

$$2xy = b \text{ - - - - - } (i)$$

এখন $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = (x^2-y^2)^2 + (2xy)^2$

বা, $(x^2+y^2)^2 = a^2+ b^2$

অতএব, $x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ [কারণ x^2 এবং y^2 উভয়ই ধনাত্মক, সুতরাং x^2+y^2 ধনাত্মক]

এখন, $x^2 - y^2 = a$

$x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

(+) করে $2x^2 = a + \sqrt{a^2+b^2}$

বা, $x^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)$

অতএব, $x = \pm\left\{\frac{1}{2}\left(a+ \sqrt{a^2+b^2- a}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$

আবার $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

$x^2 - y^2 = a$

(–) করে ঃ $2y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} - a$

বা, $y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right)$

অতএব, $y = \pm\left\{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}- a\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$

(i) নং সমীকরণ থেকে এটা স্পষ্ট যে, b ধনাত্মক হলে x এবং y এর একই চিহ্ন হবে। এক্ষেত্রে

$$\sqrt{a + ib} = \pm\left[\left\{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)\right\}^{\frac{1}{2}} + i\left\{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} - a\right\}^{\frac{1}{2}}\right]$$

আবার b ঋণাত্মক হলে, x ও y বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে। এক্ষেত্রে-

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left[\left\{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)\right\}^{\frac{1}{2}} - i\left\{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} - a\right\}^{\frac{1}{2}}\right]$$

উদাহরণ-1 ঃ $7-30\sqrt{-2}$ এর বর্গমূল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $7-30\sqrt{-2} = 7-30\sqrt{i^2.2} = 7-i30\sqrt{2}$

মনে করুন, $\sqrt{70-i30\sqrt{2}} = x+iy$, যেখানে x ও y বাস্তব সংখ্যা।

তাহলে, $\left(\sqrt{70-i30\sqrt{2}}\right)^2 = (x+iy)^2$

বা, $70-i30\sqrt{2} = x^2-y^2+i\,2xy$

অতএব, $x^2-y^2 = 7$ .... (1)

$2xy = -30\sqrt{2}$ .... (2)

এখন, $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)+4x^2y^2$

$= (x^2-y^2)^2+(2xy)^2$

$= 7^2+(-30\sqrt{2})^2$

$= 49+900\infty 2$

$= 49+1800$

$= 1849$

$\therefore\ x^2+y^2 = \sqrt{1849} = \sqrt{(43)^2} = 43$

অতএব, $x^2+y^2 = 43$ .... (3)

(1) নং এবং (3) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$2x^2 = 50$, বা $x^2 = 25$, সুতরাং $x = \pm 5$

আবার (3) নং হতে (1) নং বিয়োগ করে পাই,

$2y^2 = 36$, বা $y^2 = 18$ সুতরাং $y = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$

(2) নং হতে পাই, $2xy = 30\sqrt{2}$ অর্থাৎ xy ঋণাত্মক

অতএব, x এবং y এর চিহ্ন পরস্পর বিপরীত হবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm(5-i\,3\sqrt{2})$.

উদাহরণ-2 ঃ প্রমাণ করুন, $(1-i)^{-2}-(1+i)^{-2} = i$

সমাধান ঃ বামপক্ষ $= (1-i)^{-2}-(1+i)^{-2}$

$$= \frac{1}{(1-i)^2} - \frac{1}{(1+i)^2}$$

$$= \frac{(1+i)^2-(1-i)^2}{(1-i)^2\,(1+i)^2}$$

$$= \frac{(1+2i+i^2)-(1-2i+i^2)}{\{(1-i)\,(1+i)\}^2}$$

$$= \frac{(1+2i-1)-(1-2i-1)}{(1^2-i^2)^2}$$

$$= \frac{2i+2i}{(1+1)^2}$$

$= \frac{4i}{4} = i =$ ডানপক্ষ

$\therefore\ (1-i)^{-2}-(1+i)^{-2} = i$

অনুশীলনী-২.৬

1. বর্গমূল নির্ণয় করুন ঃ

(i) $-8-6\sqrt{-1}$, (ii) $1 + i$, (iii) $1 - i\sqrt{a^2-1}$

(iv) $2 + i\sqrt{x^2-4}$, (v) $2x + i\,(x^2-1)$ (vi) $x+i\sqrt{1-x^2}$

(vii) $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$, (viii) $-7 + 24i$

2. প্রমাণ করুন ঃ

(i) $\sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, (ii) $\sqrt{-i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

(iii) $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \sqrt{2}$

3. প্রমাণ করুন ঃ

$$(3 + 4i)^{-\frac{1}{2}} + (3-4i)^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

4. মান নির্ণয় করুন ঃ

$$(2+i3\sqrt{5}\,)^{\frac{1}{2}} + (2-i3\,\sqrt{5}\,)^{-\frac{1}{2}}$$

পাঠ ৭ এককের ঘনমূল

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- এককের ঘনমূল কী বলতে পারবেন,
- ঘনমূল কিভাবে বের করে জানতে পারবেন,
- ঘনমূলের ধর্মাবলী কী ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

এককের ঘনমূল

মনে করুন, $\sqrt[3]{1} = x$, তাহলে $x^3 = 1$, বা $x^3 - 1 = 0$

বা, $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

সুতরাং $x-1 = 0$, অর্থাৎ $x = 1$ অর্থাৎ এককের একটি ঘনমূল।

অথবা $x^2+x+1 = 0$

বা, $x^2+2.x.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$

বা, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0$

বা, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4-1}{4} = 0$

বা, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$

বা, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{-3}{4}\right) = 0$

বা, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = 0$ $\quad [\because i^2 = 1]$

বা, $\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0$

অতএব, $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

অর্থাৎ $x = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}i), \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,i)$.

সুতরাং এককের তিনটি ঘনমূল হলো ঃ

$$1, \quad \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}), \quad \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$$

মূল তিনটির মধ্যে একটি বাস্তব সংখ্যা এবং দুটি জটিল সংখ্যা। আবার জটিল সংখ্যা দুটি পরস্পরের অনুবন্ধি।

এককের ঘনমূলগুলোর গুণাবলী

1. এককের জটিল ঘনমূল দুটির একটি অপরটির বর্গ

প্রমাণ ঃ এককের জটিল ঘনমূল দুটি হল $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,i), \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}\,i)$

এখন, $\left[\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\right]^2$

$= \frac{1}{4}(1-2i\sqrt{3} + i^2 3)$

$$= \frac{1}{4}(1 - 2i\sqrt{3} - 3)$$

$$= \frac{1}{4}(-2 - 2i\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$$

আবার, $\left[\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})\right]^2$

$$= \frac{1}{4}(1 + 2i\sqrt{3} + i^2 3)$$

$$= \frac{1}{4}(1 + 2i\sqrt{3} - 3)$$

$$= \frac{1}{4}(-2 + 2i\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$$

জটিল মূলদ্বয়ের যেকোন একটিকে ω (omega) ধরলে অপরটি ω^2 হবে।
অতএব, এককের তিনটি ঘনমূলকে $1, \omega, \omega^2$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

2. এককের জটিল ঘনমূল দুটির গুণফল একক।

প্রমাণ ঃ আমরা পাই, $\omega = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\,i)$ হলে $\omega^2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)$

সুতরাং $\omega.\omega^2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i) \cdot \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)$

$$= \frac{1}{4}\left[(-1)^2 - (\sqrt{3}\,i)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}(1 - 3i^2)$$

$$= \frac{1}{4}(1 + 3) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$$

অতএব, $\omega^3 = 1$

3. এককের জটিল মূলদ্বয়ের একটি অপরটির উল্টা।

প্রমাণ ঃ ω এককের একটি জটিল ঘনমূল হলে অপরটি হবে ω^2.

এখন $\omega^3 = 1$, সুতরাং $\omega = \frac{1}{\omega^2}$ এবং $\omega^2 = \frac{1}{\omega}$

অর্থাৎ এককের জটিল মূলদ্বয়ের একটি অপরটির উল্টা।

4. এককের তিনটি ঘনমূলের সমষ্টি শূন্য।

প্রমাণ ঃ এককের তিনটি ঘনমূল হল- $1, \omega, \omega^2$ যেখানে $\omega = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ এবং $\omega^2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)$

এখন $1 + \omega + \omega^2 = 1 + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i) + \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)$

$$= 1 + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(-2) = 1 - 1 = 0$$

অতএব, $1 + \omega + \omega^2 = 0$

সমাধানকৃত উদাহরণ

উদাহরণ-1 ঃ যদি $a = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ এবং $b = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$ হয়, তবে প্রমাণ করুন

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$$

সমাধান ঃ আমরা জানি, এককের জটিল ঘনমূল দুটি হল

$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3})$ এবং $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3})$

মনে করুন, $a = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}) = \omega$

এবং $b = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}) = \omega^2$

বামপক্ষ $= a^4+a^2b^2+b^4$

$= \omega^4+\omega^2.(\omega^2)^2+(\omega^2)^4$

$= \omega^4+\omega^2.\omega^4 + \omega^8$

$= \omega^4+\omega^6+\omega^8$

$= \omega^3.\omega+(\omega^3)^2 + (\omega^3)^2.\omega^2$

$= 1.\omega+1^2+1^2.\omega^2$, যেহেতু $\omega^3 = 1$

$= \omega+1+\omega^2$

$= 1+\omega+\omega^2$

$= 0$ [$\therefore$ যেহেতু $1+\omega+\omega^2 = 0$]

= ডানপক্ষ

অতএব, $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$

উদাহরণ-2 ঃ যদি $x = p+q$, $y = p+\omega q$ এবং $z = p+\omega^2 q$ হয়, তবে প্রমাণ করুন $x^3+y^3+z^3 = 3(p^3+q^3)$

সমাধানঃ দেয়া আছে, $x = p+q$, $y = p+\omega q$, $z = p+\omega^2 q$

অতএব, $x^3+y^3+z^3$

$= (p+q)^3 + (p+\omega q)^3 + (p+\omega^2 q)^3$

$= p^3+3p^2q + 3pq^2+q^3 +p^3+3p^2\omega q+ 3p\omega^2q^2+ \omega^3q^3 +p^3+3p^2\omega^2q+ 3p\omega^4q^2+\omega^6q^3$

$= p^3+3p^2q+3pq^2+q^3+p^3+3p^2q\omega+3pq^2\omega^2+q^3+p^3+3p^2q\omega^2+3pq^2\omega+q^3$ [$\therefore$ $\omega^3=1$]

$= 3p^3 +3q^3 + 3p^2q(1+\omega+\omega^2) + 3pq^2(1+\omega^2+\omega)$

$= 3p^3 + 3q^3+3p^2q . 0 + 3pq^2 . 0$ [$\therefore$ $1+\omega+\omega^2 = 0$]

$= 3(p^3+q^3)$

অতএব, $x^3+y^3+z^3 = 3(p^3+q^3)$

উদাহরণ-3 ঃ এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, প্রমাণ করুন-

$(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16}) =16$

সমাধান ঃ আমরা জানি, এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে $\omega^3 = 1$ এবং $1+\omega+\omega^2 = 0$

এখন, $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16})$

$= (1+\omega^2-\omega)(1-\omega^2+\omega^3.\omega)(1-\omega^3.\omega+\omega^6.\omega^2)(1-\omega^6.\omega^2+\omega^{15}.\omega)$

$= (1+\omega^2-\omega)(1-\omega^2+\omega)(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega)$ [$\therefore$ $\omega^3 = 1$]

$= \{(1+\omega^2-\omega)(1-\omega^2+\omega)\}^2$

$= [(-\omega-\omega)(-\omega^2-\omega^2)]^2$ যেহেতু $1+\omega+\omega^2=0$, সুতরাং $1+\omega=-\omega^2$, $1+\omega^2= -\omega$

$= (-2\omega.-2\omega^2)^2$

$= (4\omega^3)^2 = (4.1)^2 = 16$

অতএব, $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16}) = 16$

উদাহরণ-4 ঃ যদি $(1+x+x^2)^n = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+$- - - - - - - - -$+a_{2n}x^{2n}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন, $a_0 + a_3+a_6 +$ - - - - - - - $=3^{n-1}$

সমাধান ঃ দেয়া আছে,

$(1+x+x^2)^n = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+$ - - $+a_{2n}x^{2n}$ .... (1)

(1) নং সমীকরণে x এর পরিবর্তে 1 বসিয়ে পাই;

$(1+1+1^2)^n = 3^n =a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+$ - - - - - $+a_{2n}$ .... (2)

(1) নং সমীকরণে x এর পরিবর্তে ω বসিয়ে পাই;

$(1+\omega+\omega^2)^n = a_0+a_1\omega+a_2\omega^2+a_3\omega^3+a_4\omega^4+a_5\omega^5+a_6\omega^6+$ - --

অথবা, $0 = a_0+a_1\omega+a_2\omega^2+a_3+a_4\omega+a_5\omega^2+a_6+$ - - - - - - - - - - - - - - - (3)

আবার, (1) নং সমীকরণে x এর পরিবর্তে ω^2 বসিয়ে পাই,

$(1+\omega^2+\omega^4)^n = a_0+a_1\omega^2+a_2\omega^4+a_3\omega^6+a_4\omega^8+a_5\omega^{10}+a_6\omega^{12}+$ -

অথবা, $(1+\omega^2+\omega)^n = 0 = a_0+a_1\omega^2+a_2\omega+a_3+a_4\omega^2+a_5\omega+a_6+$ - - - - - - - - - (4)

(2), (3) এবং (4) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

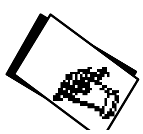
$3^n = 3a_0+a_1(1+\omega+\omega^2)+a_2(1+\omega^2+\omega)+3a_3+a_4(1+\omega+\omega^2) + a_5(1+\omega^2+\omega) +3a_6+$ --

বা, $3^n = 3a_0 + 0 + 0 + 3a_3 + 0 + 0 + 3a_6 +$ - - - - - [$\therefore$ $1+\omega+\omega^2 =0$]

বা, $3^n = 3(a_0+a_3+a_6 +$ - - - - - - -)

বা, $a_0 + a_3 + a_6 +$ - - - - - - - - - $= \frac{3^n}{3} = 3^{n-1}$

অতএব, $a_0 + a_3 + a_6 +$ - - - - - - $= 3^{n-1}$



অনুশীলনী-২.৭

1. $x = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ এবং $y = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$ হলে প্রমাণ করুন,
   (i) $x^3+x^{-3} =2$, (ii) $x^3+y^{-3} =2$, (iii) $x^2 +xy+y^2 = 0$
   (iv) $x^4 + y^4 = -1$, (v) $(1-x)(1-y) = 3$

2. প্রমাণ করুন ঃ
   (i) $(-1+i\sqrt{3})^3 +(-1-i\sqrt{3})^3 = 16$
   (ii) $(-1+i\sqrt{3})^4 + (-1-i\sqrt{3})^4 = -16$

3. এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, প্রমাণ করুন,
   (i) $(1-\omega+\omega^2)^2 + (1+\omega-\omega^2)^2 = -4$
   (ii) $(1+\omega-\omega^2)(\omega+\omega^2-1)(\omega^2+1-\omega) = -8$
   (iii) $(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{10}) = 9$
   (iv) $(1+\omega-\omega^2)^3 -(1-\omega+\omega^2)^3 = 0$

(v) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)=1$

(vi) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)=4$

4. এককের একটি জটিল ঘনমূল ω, $x=p+q$, $y=p\omega+q\omega^2$ এবং $z=p\omega^2+q\omega$ হলে প্রমাণ করুন, $x^2+y^2+z^2=6pq$

5. যদি $(a\omega^2+b+c\omega)^3+(a\omega+b+c\omega^2)^3=0$ হয়, তবে প্রমাণ করুন ঃ
$a=\frac{1}{2}(b+c)$ বা, $b=\frac{1}{2}(c+a)$ বা, $c=\frac{1}{2}(a+b)$

6. (ক) $x=-1+i\sqrt{2}$ হলে প্রমাণ করুন, $x^4+4x^3+6x^2+4x+9=0$
(খ) $x=2+i$ হলে প্রমাণ করুন, $x^4-4x^3+6x^2-4x+5=0$

7. প্রমাণ করুন, x এর একটি বাস্তব মান $\frac{1-ix}{1+ix}=a-ib$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে যেখানে a ও b বাস্তব সংখ্যা এবং $a^2+b^2=1$

8. $x=\frac{a+ib}{a-ib}$ হলে প্রমাণ করুন, $(a^2+b^2)x^2+a^2+b^2=2(a^2-b^2)x$

9. ঘনমূল নির্ণয় করুন, (i) -1, (ii) i, (iii) $-i$,
[উত্তর ঃ (i) $-1, \frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$ (ii) $-i, \frac{1}{2}(i\pm\sqrt{3})$, (iii) $i, \frac{1}{2}(-i\pm\sqrt{3})$]

10. যদি $(1+x+x^2)^n=a_o+a_1x^2+\text{- -}+a_{2n}x^{2n}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন, $a_1+a_4+a_7+\text{- -}=3^{n-1}$

উত্তরমালা

অনুশীলনী-২.২

1. (i) মিথ্যা (ii) সত্য (iii) সত্য (iv) সত্য
(v) সত্য (vi) সত্য (vii) মিথ্যা (viii) মিথ্যা

2. (i) সত্য (ii) মিথ্যা (iii) মিথ্যা (iv) সত্য (v) সত্য

3. (i) 8, (ii) 4 (iii) 4

4. (i) $-3<x<7$, (ii) $-6<x<2$

5. (i) $|x-7|<3$, (ii) $|x+4|<3$, (iii) $|x-3|<6$

অনুশীলনী-২.৩

1. (i) $\frac{26}{25}+i\frac{23}{25}$ (ii) $3+14i$

2. (i) $-\frac{8}{29}$, (ii) $\frac{2x(x^2-3y^2)}{x^2+y^2}$

4. (i) $3-i$, (ii) $22+3i$

অনুশীলনী-২.৪

1. (i) $\sqrt{34}$, $\tan^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right)$ (ii) 13, $\tan^{-1}\frac{5}{12}$ (iii) 2, $\frac{\pi}{3}$ 2. $\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4}$

অনুশীলনী-২.৬

1. i) $\pm(1-3i)$, ii) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}} \pm i(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\right]$

   iii) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a+1}-i\sqrt{a-1})$, iv) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x+2}+i\sqrt{x-2})$

   v) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x})$, vi) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x})$

   vii) $\pm\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$, viii) $\pm(3+4i)$

4. $3\sqrt{2}$