ইউনিট ৩

বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

ভূমিকা

বহুপদী এক ধরনের বীজগাণিতিক রাশি। এরূপ রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকতে পারে। বহুপদীর বিভিন্ন পদগুলো এক বা একাধিক চলকের শুধুমাত্র ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যক ঘাত ও ধ্রুবকের গুণফল দ্বারা গঠিত। বর্তমান ইউনিটে বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- *বহুপদী সম্পর্কে জানতে এবং বহুপদীর ঘাত নির্ণয় করতে পারবেন।*
- *বহুপদী সমীকরণের ঘাত নির্ণয় এবং মূল সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন।*
- *মূল ও সহগের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় এবং তা প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।*
- *মূলের প্রকৃতি নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।*
- *দ্বিঘাত সমীকরণে মূল দেওয়া থাকলে তার সাহায্যে সমীকরণ গঠনের দক্ষতা অর্জন করবেন।*
- *দুটি দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ মূল থাকার শর্ত নির্ণয় এবং তা প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন।*
- *দ্বিঘাত ও ত্রিঘাত সমীকরণের মূলের প্রতিসম রাশির মান নির্ণয় ও তা প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন।*

পাঠ ১ বহুপদী ও তার ঘাত

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বীজগাণিতিক রাশি ও বহুপদী কী বলতে পারবেন,
- বহুপদীর ঘাত কী বলতে পারবেন,
- বীজগাণিতিক রাশি ও বহুপদীর মধ্যে সম্পর্ক বর্ণনা করতে পারবেন।

বীজগাণিতিক রাশি ঃ

বীজগণিতে শূন্যসহ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সকল সংখ্যা ব্যবহৃত হয়। বীজগণিতে নির্দিষ্ট মানের সংখ্যা ছাড়াও $a, b, c, x, y, z, \alpha, \beta$ - - - - - - - প্রভৃতি বর্ণমালার অক্ষরসমূহ অনির্দিষ্ট সংখ্যামানের প্রতীকরূপে ব্যবহৃত হয়।

এক বা একাধিক সংখ্যা ও সংখ্যা নির্দেশক প্রতীককে যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ, ঘাত বা মূল চিহ্নের যে কোন একটি অথবা একাধিকের সাহায্যে অর্থবহভাবে সংযুক্ত করলে যে নতুন সংখ্যা নির্দেশক প্রতীকের সৃষ্টি হয়, তাকে বীজগাণিতিক রাশি (Algebraic expression) বা সংক্ষেপে রাশি বলা হয়। এখানে সংখ্যা বলতে বাস্তব সংখ্যাকেই বুঝায়। যেমন-$3x$, $2x+3az$, $5x^4+2x^2-7$, $x+y-7$, $\sqrt[3]{x^3+5}$, $(2x-y)^2+\sqrt{z}$, $\frac{x-5}{x^2+2x-5}$, $1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ ইত্যাদি প্রত্যেকেই এক একটি বীজগাণিতিক রাশি। এই উদাহারণগুলোতে x হল চলক।

বহুপদী (Polynomial) ঃ

বহুপদী বিশেষ ধরনের বীজগাণিতিক রাশি। এরূপ রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকে এবং পদগুলো এক বা একাধিক চলকের শুধুমাত্র ধনাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাত ও ধ্রুবকের গুণফল হয়। যেমন, $2x-3$, $4x^2-3x+7$, $x^2-3xy+4y^2$, $x^3-3x^2y+xy^2+2y^7$ ইতাদি প্রত্যেকেই এক একটি বহুপদী। এখানে x, y হল চলক। বহুপদীতে চলক দ্বারা ভাগ করা যায় না। অর্থাৎ চলক কখনও হরে অবস্থান করতে পারে না।

যেমন, $\sqrt{2x}-\frac{3}{x}+5$, $\frac{x^2-3x+2}{x-3}$, $\sqrt{x^2-3x+1}$ এই বীজগাণিতিক রাশিগুলো বহুপদী নয়।

বহুপদী অনেক ধরনের হতে পারে। যেমন, এক চলকের বহুপদী, দুই চলকের বহুপদী ইত্যাদি। শুধুমাত্র একটি চলক দ্বারা গঠিত বহুপদীকে এক চলকের বহুপদী বলা হয়। দুটি চলক দ্বারা গঠিত বহুপদীকে দ্বিচলকের বহুপদী বলা হয়।

ধরুন, x একটি চলক। তাহলে $ax+b$, ax^2+bx+c, ax^3+bx^2+cx+d ইত্যাদি আকারের রাশিকে একটি চলক x এর বহুপদী বলা যায়, যেখানে a, b, c, d ইত্যাদি ধ্রুবক বা সংখ্যা নির্দেশ করে।

অনুরূপভাবে, $x^2-2xy+3y^2$ একটি দ্বিচলক বহুপদী। এক্ষেত্রে চলকদ্বয় হল x এবং y।

আবার $x^2-2xy+3z^2-4xyz$ হল একটি তিন চলকের বহুপদী। এক্ষেত্রে চলকত্রয় হল x, y, z.

বহুপদী বিশেষ ধরনের বীজগাণিতিক রাশি। এরূপ রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকে এবং পদগুলো এক বা একাধিক চলকের শুধুমাত্র ধনাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাত ও ধ্রুবকের গুণফল হয়।

বহুপদীর ঘাত (Degree of a Polynomial)

বহুপদীর সংজ্ঞা থেকে আমরা বলতে পারি, $a_0, a_1, a_2, - - - - - a_n$ ধ্রুবক (সংখ্যা) হলে

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+ - - - - - +a_n$ একটি বহুপদী যার চলক x.

এখন $a_0 \neq 0$ হলে প্রদত্ত বহুপদীতে x চলকটির সর্বোচ্চ ঘাত n.

সুতরাং $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+ - - - - - +a_n$, যেখানে $a_0, a_1, a_2, - - - - a_n$ ধ্রুবক এবং $a_0 \neq 0$ একটি n ঘাতবিশিষ্ট বহুপদী।

এক চলকের কোন বহুপদীতে চলকের বৃহত্তম ঘাতই ঐ বহুপদীর ঘাত নির্দেশ করে।

যেমন, x^4+3x^2+2x+3 এই বহুপদীটি একটি মাত্র চলক x এর বহুপদী। এখানে চলক x এর সর্বোচ্চ ঘাত 4।

সুতরাং x^4+3x^2+2x+3 বহুপদীর ঘাত 4।

উদাহরণ ঃ

বহুপদী	বহুপদীর ঘাত
x^3-3x^2+2	3
x^9+2	9
$3x+2$	1
4	0

উল্লেখ্য যে কোন ধ্রুবকের ঘাত 0, কেননা যদি c একটি ধ্রুবক হয়, তাহলে c কে cx° লেখা যায় (কারণ $x^\circ=1$)। এক্ষেত্রে x এর ঘাত 0 (শূন্য)। সুতরাং c ধ্রুবকটির ঘাত শূন্য।

একাধিক চলকবিশিষ্ট বহুপদীর ঘাত নির্ণয়ের নিয়মটি একটু ভিন্ন।

$ax^{\mathrm{m}}\mathrm{y}^n$ কোন বহুপদীর একটি পদ হলে $(\mathrm{m}+n)$ কে ঐ পদের ঘাত বলে। একাধিক চলকবিশিষ্ট বহুপদীর কোন পদের উচ্চতম ঘাতকে বহুপদীর ঘাত বলে। নিচে উদাহরণ দিয়ে বিষয়টি আলোচনা করা হলো ঃ

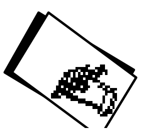
মনে করুন, $x^2+2x\mathrm{y}^2+5\mathrm{y}$ একটি বহুপদী। এর চলকদ্বয় হল x এবং y।

এখানে ১ম পদ হল x^2, এর ঘাত $=2$

দ্বিতীয় পদ $2x\mathrm{y}^2$, এর ঘাত $= 1+2 = 3$

তৃতীয় পদ $5\mathrm{y}$, এর ঘাত $= 1$

সেহেতু বহুপদীতে পদগুলোর বিভিন্ন ঘাতের মধ্যে সর্বোচ্চ ঘাত 3, সুতরাং বহুপদীর ঘাত =3.



অনুশীলনী-৩.১

1. নিচের কোনটি বহুপদী এবং কোনটি বহুপদী নয় কারণসহ লিখুন ঃ

   (i) x^2-3x+2, (ii) $\frac{x^2-3}{x+1}$ (iii) $6x^3-\sqrt{2}\,x+\frac{1}{3}$

   (iv) $\sqrt{2}\,x-\frac{3}{x^2}+5$ (v) $3x^2-2xy+y^2$

   (vi) $\sqrt{x^2-3x+1}$

2. নিম্নলিখিত বহুপদীগুলোর প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের ঘাত বের করুন ঃ

   (i) $3x^5-6x^3+5$

   (ii) $6x^4y^2 - 3xy^3$

   (iii) $5x + 2y+3y^2$

3. নিম্নলিখিত বহুপদীগুলোর ঘাত নির্ণয় করুন ঃ

   (i) $5x^3y - 2xy - x3y^2 - 2x^3$

   (ii) $3x^4-2x^3-4x^2+9$

   (iii) $3x^2-4x+xy^9+x^2y^3z^{10}$

পাঠ ২ বহুপদী সমীকরণ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বহুপদী সমীকরণ কী জানতে পারবেন,
- বহুপদী সমীকরণের ঘাত নির্ণয়ের দক্ষতা অর্জন করবেন
- বহুপদী সমীকরণের মূলের ধারণা লাভ করবেন।

মনে করুন, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \text{- - - - - -} + a_n$, যেখানে a_0, a_1, a_2, ------, a_n ধ্রুবক এবং $a_0 \neq 0$.

যদি $f(x) = 0$ অর্থাৎ $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \text{- - - -} + a_n = 0$ ....(i) হয় তাহলে (i) নং কে একটি বহুপদী সমীকরণ বলা হয়।

(i) নং সমীকরণে x এর সর্বোচ্চ ঘাত n, সুতরাং বহুপদী সমীকরণটির ঘাত n। এখানে a_0 কে মুখ্য সহগ বলে।

x এর যে সকল মানের জন্য (i) নং বহুপদী সমীকরণটি সিদ্ধ হয় অর্থাৎ বহুপদীর মান শূন্য হয়, ঐ মানগুলোকে বহুপদী সমীকরণের মূল (root) বলা হয়।

উদাহরণ-1 : $x^3-6x^2+11x-6 = 0$ একটি বহুপদী সমীকরণ। এখানে x এর সর্বোচ্চ ঘাত 3। সুতরাং এই বহুপদী সমীকরণের ঘাত হল 3।

2: $4x^4 - 25x^3+50x^2-35x+6=0$ একটি বহুপদী সমীকরণ। x এর সর্বোচ্চ ঘাত 4 হওয়ায়, এটি একটি চতুর্ঘাত বহুপদী সমীকরণ। $x = 1, 2, 3, \frac{1}{4}$ এর জন্য এই বহুপদীর মান শূন্য হয়। সুতরাং এই বহুপদী সমীকরণের মূলগুলো হল ঃ $1, 2, 3, \frac{1}{4}$

উল্লেখ্য, বহুপদী সমীকরণ $f(x) = 0$ এর একটি মূল a হলে $f(a) = 0$ হবে।

ভাগশেষ উপপাদ্য ঃ যদি কোন বহুপদী $f(x)$ কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করা হয়, তাহলে ভাগশেষ হবে $f(a)$.

প্রমাণ ঃ এখানে ভাজক $(x-a)$ এর ঘাত 1.

সুতরাং $f(x)$ কে $(x-a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল হয় 0 (শূন্য) হবে অথবা অশূন্য ধ্রুবক হবে।

ধরা যাক্, ভাগশেষ R এবং ভাগফল $Q(x)$

এখন, ভাগের নিয়ম অনুসারে সকল x এর জন্য $f(x) = (x-a)\ Q(x) + R$ ----------- (i)

(i) নং সমীকরণে $x = a$ বসিয়ে পাই,

$f(a) = (a-a)\ Q(x) + R$

বা, $f(a) = 0.Q(x) + R = R$

$\therefore\ f(a) = R$ (ভাগশেষ)

সুতরাং $f(x)$ কে $(x-a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(a)$। (প্রমাণিত)

উৎপাদক উপপাদ্য ঃ যদি a, বহুপদী সমীকরণ $f(x)$ এর একটি মূল হয়, তবে $x-a$ বহুপদী $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে।

প্রমাণঃ যেহেতু, a বহুপদী সমীকরণ $f(x) = 0$ এর একটি মূল, সুতরাং a সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে অর্থাৎ $f(a) = 0$.

অতএব, ভাগশেষ উপপাদ্য থেকে পাই,

$f(x) = (x-a)\ Q(x) + f(a)$

সুতরাং $f(x) = (x-a)\ Q(x)$ যেহেতু $f(a) = 0$

অতএব, $f(x)$ বহুপদী $(x-a)$ দ্বারা বিভাজ্য।

সুতরাং $(x-a), f(x)$ এর একটি উৎপাদক। (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ঃ n ঘাত বিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণের n সংখ্যক মূল আছে।

প্রমাণ ঃ মনে করুন,

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \text{- - - - -} + a_n = 0$

আবার ধরুন, $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল α_1.

সুতরাং $f(x)$ বহুপদটি $x–\alpha_1$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হবে এবং ভাগফল একটি অখন্ড ফাংশন হবে যার ঘাত হবে $n–1$।

ভাগফলটি যদি $g_1(x)$ হয় তবে-

$f(x) = (x–\alpha_1)\, g_1(x)$ ----------------- (1)

আবার $g_1(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল α_2 হলে $(x–\alpha_2)$ দ্বারা $g_1(x)$ নিঃশেষে বিভাজ্য হবে এবং ভাগফল একটি অখন্ড ফাংশন হবে যার ঘাত $n–2$

ভাগফলটি যদি $g_2(x)$ হয় তবে $g_1(x) = (x–\alpha_2)\, g_2(x)$ - - - - - - - (2)

(1) নং (2) নং সমীকরণ থেকে পাই, $f(x) = (x–\alpha_1)\,(x–\alpha_2)\, g_2(x)$

অনুরূপভাবে অগ্রসর হলে $f(x)$ এর n সংখ্যক উৎপাদক পাওয়া যাবে।

অতএব, আমরা পাই, $f(x) = (x–\alpha_1)\,(x–\alpha_2)$ - - - - - - - $(x–\alpha_n)$

এখন $x = \alpha_1, \alpha_2,$ - - - - - -, α_n বসালে $f(x) = 0$ হবে।

সুতরাং $f(x) = 0$ সমীকরণের n সংখ্যক মূল আছে। (প্রমাণিত)

উদাহরণ-1 : $f(x) = x^3–8x^2+6x+60$ বহুপদীকে $x+2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

সমাধান ঃ এখানে $x+2 = x – (–2)$

আমরা জানি, $f(x)$ কে $x–a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(a)$.

$\therefore$ ভাগশেষ $= f(–2)$ যেহেতু এক্ষেত্রে $a = –2$

$= (–2)^3 –8(–2)^2 + 6\,(–2) + 60$

$= –8–8∞4–12+60$

$= –52 + 60 = 8$

উদাহরণ-2 : প্রমাণ করুন, $g(x) = 2x^3–5x^2+6x–3$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x–1$.

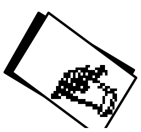
সমাধান ঃ আমরা জানি, $x–a$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে যদি $f(a) = 0$ হয়।

$\therefore\ g(1) = 2(1)^3 –5(1)^2 + 6(1) – 3$

$= 2 – 5 + 6 – 3 = 8 – 8$

$= 0$

সুতরাং $(x–1)$, $g(x)$- এর একটি উৎপাদক। (প্রমাণিত)



অনুশীলনী-৩.২

1. যদি $f(x) = 5x^3 + 6x^2 – ax + 6$ কে $x–2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 6 হয়, তবে a এর মান নির্ণয় করুন।
2. যদি $f(x) = 2x^3–5x^2+7x–6$ হয়, তবে $f(x)$ কে $x–2$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে তা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় করুন।
3. $x^4–5x^3+7x^2–a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x–2$ হলে, প্রমাণ করুন $a = 4$.
4. নিচের বহুপদী সমীকরণটির ঘাত, মূলের সংখ্যা কারণসহ উল্লেখ করুন ঃ

   $x^4 + 7x^3 – 9x^2 + 23x + 6$

পাঠ ৩ মূল ও সহগের সম্পর্ক

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- মূল ও সহগের মধ্যে সম্পর্ক জানতে পারবেন,
- এদের মধ্যকার সম্পর্ক প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন।

মনে করুন, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

এখন $ax^2 + bx + c = 0$

বা, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, যেহেতু উভয় পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করা হয়েছে।

এক্ষেত্রে α, β মূল হওয়ায় $(x-\alpha)$ এবং $(x-\beta)$, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ এর দুটি উৎপাদক।

অতএব, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x-\alpha)(x-\beta)$

বা, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$ --------------(1)

(1) নং এর উভয় পক্ষ থেকে সহগ সমীকৃত করে পাই,

$-(\alpha+\beta) = \frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

অর্থাৎ $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$\therefore \alpha+\beta = (-1)\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = (-1)^2\frac{c}{a}$

আবার মনে করুন, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ

$\therefore ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

বা, $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$

স্পষ্টতই, $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$ এবং $(x-\gamma)$; $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}$ এর উৎপাদক হবে।

সুতরাং $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

বা, $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+ (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$ -------(2)

(2) নং এর উভয় পক্ষ থেকে সহগ সমীকৃত করে পাই,

$-(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{c}{a}$, $-\alpha\beta\gamma = \frac{d}{a}$

অর্থাৎ $\alpha+\beta+\gamma = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma = (-1)\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = (-1)^2\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma = (-1)^3\frac{d}{a}$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে,

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \text{- - - - -} + a_n = 0$ সমীকরণের মূলগুলো

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \text{- - - - - - -}, \alpha_n$ হলে

মূলগুলোর যোগফল $= \alpha_1 + \alpha_2 + \text{- - - - - -} + \alpha_n$

$= \sum \alpha_1 = (-1)\frac{a_1}{a_0} = -\frac{a_1}{a_0}$

প্রত্যেকবার দুটি করে মূল দিয়ে গুণ করে প্রাপ্ত গুণফলগুলোর যোগফল = $\sum \alpha_1\alpha_2 = (-1)^2 \frac{a_2}{a_o} = \frac{a_2}{a_o}$

একইভাবে, $\sum \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = (-1)^3 \frac{a_3}{a_o} = -\frac{a_3}{a_o}$

সবগুলো মূলের একত্রে গুণফল, $\alpha_1\alpha_2 \text{ - - - - - - } \alpha_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_o}$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ উপরোক্ত আলোচনা থেকে লিখা যায়, $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের

মূলদ্বয়ের যোগফল $= -\frac{b}{a} = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{c}{a} = \frac{x \text{ বর্জিত পদ বা অনপেক্ষ পদ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

$ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের

মূলদ্বয়ের যোগফল $= -\frac{b}{a} = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{c}{a} = \frac{x \text{ বর্জিত পদ বা অনপেক্ষ পদ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

উদাহরণ-1 : $5x^2 - 17x + 9 = 0$ সমীকরণের মূল দুটি α, β হলে $\alpha+\beta$ এবং $\alpha\beta$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $5x^2 - 17x + 9 = 0$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha+\beta = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

$= -\left(\frac{-17}{5}\right) = \frac{17}{5}$

মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta = \frac{\text{অনপেক্ষ পদ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

$= \frac{9}{5}$

সুতরাং $\alpha+\beta = \frac{17}{5}$ এবং $\alpha\beta = \frac{9}{5}$

উদাহরণ-2 : $x^4+5x^3+3x+9 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো a, b, c, d হলে $\sum a, \sum abc$ এবং $abcd$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ, $x^4 + 5x^3 + 3x + 9 = 0$

অতএব, $x^4 + 5x^3 + 0.x^2 + 3x + 9 = 0$

[x এর শক্তির কোন পদ না থাকলে তার সহগ 0 (শূন্য) ধরতে হয়।]

সুতরাং $\sum a = (-1) \frac{5}{1} = -5,$

$\sum abc = (-1)^3 \frac{0}{1} = 0$

$abcd = (-1)^4 \frac{9}{1} = 9$

$\therefore \sum a = -5, \quad \sum abc = 0, \quad abcd = 9$

উদাহরণ-3 : কোন বহুপদী সমীকরণের মূলগুলো $\frac{1}{2}$, 2, –3 হলে সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ যেহেতু বহুপদী সমীকরণের মূলত্রয় $\frac{1}{2}$, 2, –3 সুতরাং সমীকরণটি হবে,

$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) \; \{x - (-3)\} = 0$

বা, $\left(\frac{2x-1}{2}\right)(x-2)(x+3) = 0$

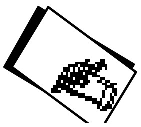
বা, $(2x-1)(x-2)(x+3) = 0$

বা, $(2x-1)(x^2+3x-2x-6) = 0$

বা, $(2x-1)(x^2+x-6) = 0$

বা, $2x^3+2x^2-12x-x^2-x+6 = 0$

বা, $2x^3+x^2-13x+6 = 0$



অনুশীলনী-৩.৩

1. $px^2+qx+r = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\alpha+\beta$ এবং $\alpha\beta$ এর মান নির্ণয় করুন।
2. $x^3+px^2+qx+r = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে $\sum\alpha, \sum\alpha\beta$ এবং $\alpha\beta\gamma$ এর মান কত?
3. $x^2-6x+p = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় a, b হলে $a+b$ এবং ab এর মান কত?
4. একটি সমীকরণের তিনটি মূল $4, -\frac{3}{2}, -2$ হলে সমীকরণটি নির্ণয় করুন।
5. $3x^2 + bx - 12 = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয়ের অন্তর 4 হলে, b এর মান নির্ণয় করুন।

পাঠ ৪ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।
- সমীকরণ সমাধান না করেই সমীকরণের মূলগুলো সম্বন্ধে ধারণা নিতে পারবেন।

দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি ঃ

$ax^2 + bx + c = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যেখানে $a \neq 0$ এবং a, b, c প্রত্যেকে বাস্তব সংখ্যা।

$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটি সমাধান করে পাওয়া যায়,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

অর্থাৎ সমীকরণটির মূল দুটি α, β হলে

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

এখানে $b^2 - 4ac$ রাশিটি দুটি সমাধানেই বর্গমূল চিহ্নের ভিতরে অবস্থিত। $(b^2 - 4ac)$ এর মান পর্যালোচনা করলেই দ্বিঘাত সমীকরণের মূল দুটির প্রকৃতি জানতে পারা যায়। এজন্য $(b^2 - 4ac)$ কে প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণটির নিশ্চায়ক বা নিরুপক (discriminant) বলা হয়।

যদি a, b, c বাস্তব রাশি হয়, তাহলে দ্বিঘাত সমীকরণটি সমাধান না করেও $(b^2 - 4ac)$ নিশ্চায়কটি দ্বারা সমীকরণটি মূলের প্রকতি জানা যায়। নিম্নে এ বিষয়ে আলোচনা করা হল ঃ

১। যদি $b^2 - 4ac = 0$ হয় অর্থাৎ $b^2 = 4ac$ হয়, তবে মূল দুটি $-\frac{b}{2a}$ এবং $-\frac{b}{2a}$ । এখানে মূল দুটি বাস্তব এবং সমান।
সুতরাং $\alpha = \beta = -\frac{b}{2a}$

২। যদি $b^2 - 4ac$ ধনাত্মক, অর্থাৎ $b^2 - 4ac > 0$ বা, $b^2 > 4ac$ হয়, তবে $\sqrt{b^2 - 4ac}$ বাস্তব সংখ্যা হবে। সুতরাং, এক্ষেত্রে মূল দুটি বাস্তব ও অসমান হবে।

৩। যদি $b^2 - 4ac$ ঋণাত্মক হয়, অর্থাৎ $b^2 - 4ac < 0$ বা, $b^2 < 4ac$ হয়, তবে মূল দুটি জটিল সংখ্যা হবে। এক্ষেত্রে এরা যুগলরূপে আসবে। মূল দুটি অসমান হবে।

৪। যদি $b^2 - 4ac$ একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হয়, তবে সমীকরণের মূল দুটি মূলদ এবং অসমান হবে।

উপরের আলোচনা নিচে সংক্ষেপে দেয়া হল ঃ

$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণে a, b, c বাস্তব ও মূলদ হলে এর মূল দুটি

১। বাস্তব ও সমান হবে, যদি $b^2 - 4ac = 0$ হয়।

২। বাস্তব ও অসমান হবে, যদি $b^2 - 4ac > 0$ হয়। অধিকন্তু $b^2 - 4ac$ একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হলে মূল দুটি মূলদ ও অসমান হবে।

৩। জটিল ও অসমান হবে, যদি $b^2 - 4ac < 0$ হয়।

উদাহরণ-1 : $2x^2 + 6x + 5 = 0$ সমীকরণটির নিশ্চায়ক বের করুন এবং মূলের প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে,

$$2x^2 + 6x + 5 = 0$$

অতএব, নিশ্চায়ক $= (6)^2 - 4.2.5$

$= 36 - 40$
$= -4$
সুতরাং নিশ্চায়ক $= -4$

যেহেতু নিশ্চায়ক একটি বিয়োগবোধক সংখ্যা, অতএব প্রদত্ত সমীকরণের মূল দুটি জটিল (অবাস্তব) এবং অসমান হবে।

উদাহরণ-2 : প্রমাণ করুন যে, $(a+b)x^2 - (a+b+c)\,x + \frac{c}{2} = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সর্বদাই বাস্তব হবে।

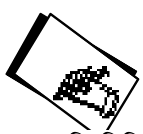
সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণটি, $(a+b)x^2 - (a+b+c)x + \frac{c}{2} = 0$

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের নিশ্চায়ক $= \{-(a+b+c)\}^2 - 4(a+b).\frac{c}{2}\ \}$

$= (a+b+c)^2 - 2c(a+b)$
$= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-2ac-2bc$
$= a^2+b^2+c^2+2ab$
$= (a+b)^2 + c^2$

a, b, c এর বাস্তব মানের জন্য $(a+b)^2+c^2$ এর মান সর্বদাই ধনাত্মক বা শূন্য।
সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় সর্বদাই বাস্তব। (প্রমাণিত)

উদাহরণ-3 : a এর মান কত হলে $x^2 - 6x - 1 + a(2x+1) = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় সমান হবে?
সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণটি,
$x^2-6x-1+a\,(2x+1) = 0$
বা, $x^2 - 6x-1+2ax+a = 0$
বা, $x^2+(2a-6)x + a-1 = 0$
প্রদত্ত সমীকরণের মূল দুটি সমান হলে নিশ্চায়কের মান শূন্য হবে।
$\therefore$ নিশ্চায়ক $= (2a-6)^2 - 4.1.(a-1) = 0$
বা, $4a^2 - 24a + 36 - 4a + 4 = 0$
বা, $4a^2 - 28a + 40 = 0$
বা, $a^2 - 7a + 10 = 0$
বা, $(a-5)\,(a-2) = 0$
সুতরাং $a = 5$ অথবা 2



অনুশীলনী-৩.৪

1. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলোর মূলের প্রকৃতি নির্ণয় করুন ঃ
   (i) $3x^2 + 2x - 7 = 0,$ (ii) $2x^2 - 3x - 2 = 0$
   (iii) $25x^2 + 20x + 4 = 0$
2. a এর মান কত হলে $(4-a)x^2 + (2a+4)x + (8a+1) = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় সমান হবে?
3. প্রমাণ করুন যে, $(a+3)x^2 + (6-2a)x + (a-1) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব হলে a এর মান $\frac{3}{2}$ এর চেয়ে বৃহত্তর হবে না।
4. a এর মান ধনাত্মক এবং 3 অপেক্ষা বৃহত্তর না হলে দেখান যে, $(a-2)x^2 - (8-2a)x - (8-3a) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব হবে।
5. k এর মান কত হলে $x^2-2(5+2k)x + 3(7+10k) = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় সমান হবে?

পাঠ ৫ দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- কোন দ্বিঘাত সমীকরণের মূল দেয়া থাকলে সমীকরণ গঠনের দক্ষতা অর্জন করবেন।

দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন

মনে করুন, কোন দ্বিঘাত সমীকরণের প্রদত্ত দুটি মূল α, β। আবার মনে করুন, নির্ণেয় সমীকরণটি $ax^2+bx+c=0$

তাহলে $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখন, $ax^2 + bx + c = 0$

বা, $a\left(x^2+ \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$

বা, $x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0$

বা, $x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right) x + \frac{c}{a} = 0$

বা, $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$

অর্থাৎ x^2- (মূলদ্বয়ের যোগফল) x + মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

উপরোক্ত সূত্রটি ব্যবহার করে আমরা প্রদত্ত যে কোন দুটি মূল দ্বারা দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করতে পারি।

উদাহরণ-1 : এমন একটি সমীকরণ গঠন করুন যার মূলদ্বয় 3 এবং 5.

সমাধান ঃ নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় 3 এবং 5.

সুতরাং মূলদ্বয়ের যোগফল $= 3 + 5 = 8$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $= 3.5 = 15$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণটি হবে,

$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল)x + মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

বা, $x^2 - 8x + 15 = 0$

উদাহরণ-2 : $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুটি α,β হলে $\frac{1}{\alpha^2}$ এবং $\frac{1}{\beta^2}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

সুতরাং $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখন এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে যার মূলদ্বয় $\frac{1}{\alpha^2}$ এবং $\frac{1}{\beta^2}$

$$\text{সুতরাং } \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2.\frac{c}{a}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{\frac{c^2}{a^2}}$$

$$=\frac{\frac{b^2-2ac}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}}$$

$$=\frac{b^2-2ac}{a^2}\infty\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$$

আবার, $\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{\beta^2}$

$$=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}=\frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{1}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{a^2}{c^2}$$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ,

x^2- (মূলদ্বয়ের যোগফল) $x+$ মূলদ্বয়ের গুণফল $=0$

বা, $x^2-\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)x+\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{\beta^2}=0$

বা, $x^2-\left(\frac{b^2-2ac}{c^2}\right)x+\frac{a^2}{c^2}=0$

বা, $c^2x^2-(b^2-2ac)x+a^2=0$

উদাহরণ-3 : বাস্তব সহগবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করুন যার একটি মূল $-1+i\sqrt{5}$.

সমাধান ঃ দেয়া আছে, দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি মূল $-1+i\sqrt{5}$, যা একটি জটিল সংখ্যা।

যেহেতু জটিল মূল জোড়ায় জোড়ায় আসে, সুতরাং অপর মূলটি হবে $-1-i\sqrt{5}$

এখন মূলদ্বয়ের যোগফল $=-1+i\sqrt{5}-1-i\sqrt{5}=-2$

মূলদ্বয়ের গুণফল $=(-1+i\sqrt{5})(-1-i\sqrt{5})$

$=(-1)^2-(i\sqrt{5})^2$

$=1-i^25=1+5$, যেহেতু $i^2=-1$

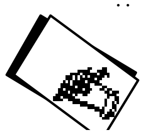
$=6$

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ,

x^2- (মূলদ্বয়ের যোগফল)$x+$ মূলদ্বয়ের গুণফল $=0$

অর্থাৎ $x^2-(-2)x+6=0$

$\therefore\ x^2+2x+6=0$



অনুশীলনী-৩.৫

1. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূল দুটি α,β হলে $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2$ এর মান নির্ণয় করুন।
2. $7x^2-5x-3=0$ সমীকরণের মূল দুটি α,β হলে $\frac{1}{\alpha}+\frac{3}{\beta}$ এবং $\frac{3}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় করুন।
3. $x^2+x+1=0$ সমীকরণের মূলদুটি α,β হলে এরূপ একটি সমীকরণ গঠন করুন যার মূল দুটি α^2 এবং β^2.
4. $4x^2-6x+1=0$ সমীকরণের মূল দুটি α,β হলে $\alpha+\frac{1}{\beta}$ এবং $\beta+\frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় করুন।
5. $x^2+px+q=0$ সমীকরণের মূল দুটি α,β হলে $(\alpha-\beta)^2$ এবং $(\alpha+\beta)^2$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় করুন।
6. $2x^2-8x+7=0$ সমীকরণের মূল দুটি α,β হলে $\alpha^2+\beta$ এবং $\beta^2+\alpha$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় করুন।
7. $bx^2+cx+c=0$ সমীকরণের মুল দুটি α,β হলে প্রমাণ করুন $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{c}{b}}=0$

পাঠ ৬ সাধারণ মূলের শর্ত

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দুটি দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ মূল থাকার শর্ত নির্ণয় করতে পারবেন।
- সাধারণ মূলের শর্ত প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন।

দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ মূলের শর্ত

(ক) যে শর্ত সাপেক্ষে $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণ দুটির একটি মূল সাধারণ হবে তা নির্ণয় ঃ

মনে করুন, সাধারণ মূলটি α.

এই সাধারণ মূলটি উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।

সুতরাং $a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 = 0$

$a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2 = 0$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে পাওয়া যায়,

$$\frac{\alpha^2}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{\alpha}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$\therefore \alpha = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_1a_2 - c_2a_1}$ এবং $\alpha = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ---------- (1)

বা, $\dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

বা, $(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

(1) নং সমীকরণ থেকে মূল α এর মান হল-

$\dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_1a_2 - c_2a_1}$ বা, $\dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

উল্লেখ্য, যদি $a_1x^2 + b_1x + c_1=0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল α হয়, তবে $a_1x^2 + b_1x + c_1$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2$ রাশি দুটির একটি সাধারণ উৎপাদক $(x-\alpha)$ হবে।

সুতরাং যে শর্ত সাপেক্ষে $a_1x^2+b_1x+c_1= 0$ এবং $a_2x^2+b_2x+c_2 = 0$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল থাকে, সে শর্তেই $a_1x^2+b_1x+c_1$ এবং $a_2x^2+b_2x+c_2$ রাশি দুটির একটি সাধারণ একঘাত উৎপাদক থাকবে।

(খ) যে শর্ত সাপেক্ষে $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণ দুটির দুটি মূলই সাধারণ হবে তা নির্ণয় করতে হবে।

মনে করুন, α এবং β সমীকরণ দুটির সাধারণ মূল।

সুতরাং $\alpha + \beta = -\dfrac{b_1}{a_1} = -\dfrac{b_2}{a_2}$

$\therefore \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ ----------- (1)

আবার $\alpha\beta = \dfrac{c_1}{a_1} = \dfrac{c_2}{a_2}$

$\therefore \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ ---------- (2)

(1) এবং (2) নং থেকে পাই;

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

উদাহরণ-1 : যদি $ax^2+bx+c=0$ এবং $cx^2+bx+a=0$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল থাকে, তবে প্রমাণ করুনঃ

$a+b+c = 0$ অথবা $a-b+c = 0$

সমাধান ঃ মনে করুন, সাধারণ মূল α

সুতরাং $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

$c\alpha^2 + b\alpha + a = 0$

বজ্রগুণন প্রক্রিয়ার মাধ্যমে পাওয়া যায়,

$$\frac{\alpha^2}{ab-bc} = \frac{\alpha}{c^2-a^2} = \frac{1}{ab-bc}$$

$\therefore \quad \alpha = \frac{ab-bc}{c^2-a^2}$ এবং $\alpha = \frac{c^2-a^2}{ab-bc}$

অতএব, $\frac{ab-bc}{c^2-a^2} = \frac{c^2-a^2}{ab-bc}$

বা, $(c^2-a^2)^2 = (ab-bc)(ab-bc) = b^2(a-c)^2$

বা, $\{(c+a)(c-a)\}^2 = b^2(a-c)^2$

বা, $(c+a)^2(c-a)^2 = b^2(c-a)^2$

বা, $(c+a)^2(c-a)^2 - b^2(c-a)^2 = 0$

বা, $(c-a)^2\{(c+a)^2 - b^2\} = 0$

বা, $(c-a)^2(c+a+b)(c+a-b) = 0$

$\therefore \quad c-a = 0$ বা $c = a$

$c+a+b = 0$

অথবা $c+a-b = 0$

কিন্তু $c = a$ হতে পারে না, কারণ এক্ষেত্রে সমীকরণ দুটি একই হয়ে যায় এবং তাদের দুটি মূলই সাধারণ মূল হয়ে যায়।

অতএব, $a+b+c = 0$ অথবা $a-b+c = 0$

উদাহরণ-2 : যদি $x^2-ax+b = 0$ এবং $x^2-bx+a = 0$ সমীকরণ দুটির কেবল একটি মূল সাধারণ থাকে তাহলে প্রমাণ করুন, $a+b = -1$

সমাধান ঃ মনে করন, সাধারণ মূলটি α.

সুতরাং $\alpha^2 - a\alpha + b = 0$

$\alpha^2 - b\alpha + a = 0$

বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায়,

$$\frac{\alpha^2}{-a^2+b^2} = \frac{\alpha}{b-a} = \frac{1}{-b+a}$$

$\therefore \quad \alpha = \frac{b^2-a^2}{b-a}$, $\alpha = \frac{b-a}{a-b}$

$\therefore$ আমরা পাই,

$$\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{b-a}{a-b}$$

বা, $(b^2-a^2)(a-b) = (b-a)^2$

বা, $(b-a)^2 + (b-a)\,(b^2-a^2) = 0$

বা, $(b-a)^2 + (b-a)\,(b-a)\,(b+a) = 0$

বা, $(b-a)^2 + (b-a)^2\,(b+a) = 0$

বা, $(b-a)^2\,[1+b+a] = 0$

কিন্তু $b-a$ ◘ 0, কারণ তাহলে সমীকরণ দুটি একই হয়। সুতরাং $1+b+a = 0$

অর্থাৎ $a+b = -1$

উদাহরণ-3 : যদি $px^2+2x+1=0$ এবং $x^2+2x+p=0$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল থাকে, তাহলে p এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করুন, সাধারণ মূলটি α.

তাহলে, $p\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$

$\alpha^2 + 2\alpha + p = 0$

বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায়,

$$\frac{\alpha^2}{2p-2} = \frac{\alpha}{1-p^2} = \frac{1}{2p-2}$$

বা, $\dfrac{\alpha^2}{2(p-1)} = \dfrac{\alpha}{(1+p)(1-p)} = \dfrac{1}{2(p-1)}$

বা, $\dfrac{\alpha^2}{2} = \dfrac{\alpha}{-(p+1)} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha = -\dfrac{2}{1+p}$ বা, $\alpha = -\dfrac{1+p}{2}$

সুতরাং $-\dfrac{2}{1+p} = -\dfrac{1+p}{2}$

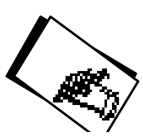
বা, $(1+p)^2 = 4$

বা, $1+2p+p^2 = 4$

বা, $p^2 + 2p - 3 = 0$

বা, $(p+3)(p-1) = 0$

অতএব, $p = 1$, বা, -3



অনুশীলনী-৩.৬

1. $x^2+kx-6k = 0$ এবং $x^2-2x-k=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে k এর মান নির্ণয় করুন।
2. $px^2+qx+1=0$ এবং $qx^2+px+1=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে প্রমাণ করুন $p+q+1 = 0$
3. যদি $x^2+bx+ca = 0$ এবং $x^2+cx+ab=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে, তবে প্রমাণ করুন $a+b+c = 0$
4. যে শর্ত সাপেক্ষে $ax^2-bx+c=0$ এবং $bx^2-cx+a = 0$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল হতে পারে তা নির্ণয় করুন।
5. $x^2+ax+b = 0$ এবং $x^2+bx+a = 0$ (a◘b) সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল থাকলে, প্রমাণ করুন $2x^2 + (a+b)x = (a+b)^2$ সমীকরণের সমাধান $x = 1$ এবং $x = -\frac{1}{2}$ হবে।

পাঠ ৭ প্রতিসম রাশির মান

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দ্বিঘাত ও ত্রিঘাত সমীকরণের মূলের প্রতিসম রাশির মান নির্ণয় করতে পারবেন।
- প্রতিসম রাশির মান প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

মূলের প্রতিসম (Symmetric) রাশির মান

দুই বা ততোধিক চলকের কোন ফাংশনে দুটি চলকের অবস্থান বিনিময় করলে যদি ফাংশনের কোন পরিবর্তন না হয়, তবে তাকে প্রতিসম ফাংশন বলা হয়।

α, β কোন দ্বিঘাত সমীকরণের মূল হলে α ও β সম্বলিত কোন রাশিমালায় α এর পরিবর্তে β এবং β এর পরিবর্তে α লিখলে যদি রাশিমালাটির কোন পরিবর্তন না হয় তবে রাশিমালাটিকে মূলের প্রতিসম ফাংশন বলে। প্রতিসম ফাংশনের মান নির্ণয়ের জন্য ফাংশনটি, মূল দুটির যোগফল এবং গুণফলের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়।

মনে করন, একটি ত্রিঘাত সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ তাহলে $\alpha+\beta+\gamma$ রাশিতে α ও β এর অবস্থান বিনিময় করলে আমরা পাই, $\beta+\alpha+\gamma$

আবার β ও γ এর অবস্থান পরিবর্তন করলে আমরা পাই, $\gamma+\alpha+\beta$

কিন্তু $\alpha+\beta+\gamma$, $\beta+\alpha+\gamma$ এবং $\gamma+\alpha+\beta$ এর প্রত্যেকের মান একই। অর্থাৎ দুটি করে নিয়ে মূলের অবস্থান বিনিময় করলে $\alpha+\beta+\gamma$ এর মানের পরিবর্তন হয় না। এ ধরনের রাশিকে বলা হয় প্রতিসম রাশি।

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\gamma+\beta^2\alpha+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta$ ইত্যাদি প্রত্যেক α, β, γ দ্বারা গঠিত প্রতিসম ফাংশন। প্রচলিত রীতি অনুসারে যোগফল বুঝাতে $\sum$ প্রতীক ব্যবহার করা হয়। $\sum\alpha^3$ দ্বারা $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ বুঝায় এবং $\sum\alpha^2\beta^2$ দ্বারা $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$ বুঝায়।

দুই বা ততোধিক চলকের কোন ফাংশনে দুটি চলকের অবস্থান বিনিময় করলে যদি ফাংশনের কোন পরিবর্তন না হয়, তবে তাকে প্রতিসম ফাংশন বলা হয়।

উদাহরণ-1 : $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $(1+\alpha+\alpha^2)(1+\beta+\beta^2)$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

সুতরাং $\alpha+\beta=\sum\alpha=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

এখন, $(1+\alpha+\alpha^2)(1+\beta+\beta^2)$

$$= 1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta+\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta+\beta^2\alpha+\alpha^2\beta^2$$
$$= 1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha\beta)^2$$
$$= 1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2.\frac{c}{a}+\frac{c}{a}.\left(-\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{c}{a}\right)^2$$
$$= 1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}-\frac{bc}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}$$
$$= \frac{1}{a^2}(a^2-ab+ac+b^2-2ac-bc+c^2)$$
$$= \frac{1}{a^2}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

উদাহরণ-2 : $x^3+ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূল α, β, γ হলে $\sum\alpha^3\beta$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x^3+ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ। সুতরাং আমরা পাই,

$$\sum\alpha=\alpha+\beta+\gamma=-a$$
$$\sum\alpha\beta=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$$
$$\alpha\beta\gamma=-c$$

এখন $\sum\alpha^3\beta = \alpha^3\beta+\alpha^3\gamma+\beta^3\alpha+\beta^3\gamma+\gamma^3\alpha+\gamma^3\beta$

$= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) - (\alpha^2\beta\gamma+\beta^2\alpha\gamma+\gamma^2\alpha\beta)$

$= [\,(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)]\,(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma\,(\alpha+\beta+\gamma)$

$= [(\sum\alpha)^2 - 2\sum\alpha\beta]\,(\sum\alpha\beta) - \alpha\beta\gamma(\sum\alpha)$

$= [(-a)^2 - 2b]\,(b) - (-c)\,(-a)$

$= (a^2-2b)b - ac$

$= a^2b - 2b^2 - ac$

অতএব, $\sum\alpha^3\beta = a^2b - 2b^2 - ac$

অনুশীলনী-৩.৭

1. $x^3 + ax^2 + bx + c= 0$ সমীকরণের মূল তিনটি α, β, γ হলে $\sum\alpha^2\beta$ এবং $\sum\alpha^3$ এর মান নির্ণয় করুন।
2. $ax^2+bx+c = 0$ সমীকরণের মূল দুটি α, β হলে নিচের প্রতিসম রাশিগুলোর মান নির্ণয় করুন ঃ
   $\sum\alpha^2, \sum\alpha^3, \sum\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)$
3. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে $\sum(\alpha-\beta)^2$ এবং $\sum\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$ এর মান নির্ণয় করুন।
4. $x^3 + px^2 + qx + \mathrm{r} = 0$ সমীকরণের মূলগুলো a, b, c হলে $\sum a^2$ এর মান নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

অনুশীলনী-৩.১

1. (i) বহুপদী, (ii) বহুপদী নয়, (iii) বহুপদী
   (iv) বহুপদী নয় (v) বহুপদী, (vi) বহুপদী নয়।
2. (i) 5, 3, 0 (ii) 6, 4 (iii) 1, 1, 2
3. (i) 5, (ii) 4, (iii) 15

অনুশীলনী-৩.২

1. a=32, 2. P(2) =2, 4. ঘাত = 4, মূল 4 টি।

অনুশীলনী-৩.৩

1. $-\frac{q}{p}, \frac{r}{p}$ 2. $-p, q, -r$ 3. 6, p 4. $2x^3-x^2-22x-24 = 0$ 5. $b = 0$

অনুশীলনী-৩.৪

1. (i) বাস্তব ও অসমান, (ii) বাস্তব ও অসমান
   (iii) বাস্তব ও সমান
2. 0 বা 3 5. 2 বা, $\frac{1}{2}$

অনুশীলনী-৩.৫

1. $\dfrac{4b^2(a^2+c^2)-2ac(a-c)^2}{a^2c^2}$
2. $3x^2+20x-3=0$
3. $x^2+x+1=0$
4. $4x^2-30x+25=0$
5. $x^2-2(p^2-2q)x+p^4-4p^2q=0$
6. $4x^2-52x+151=0$

অনুশীলনী-৩.৬

1. 0, 3, 8
2. $a(a^3+b^3+c^3-3abc)=0$

অনুশীলনী-৩.৭

1. $-ab+3c, -a^3+3ab-3c$
2. $\dfrac{b^2-2ac}{a^2}, \dfrac{3abc-b^3}{a^3}, \dfrac{b^4+2a^2c^2-4ab^2c}{a^4}, \dfrac{b^2-2ac}{c^2}$
3. $2a^2-6b, \dfrac{1}{c}(ab-3c)$
4. p^2-2q.