ইউনিট ৪

নির্ণায়ক ও ম্যাট্রিক্স

ভূমিকা

গণিতে গাণিতিক সংঘটন বা অপারেশন প্রক্রিয়াধীন সংখ্যাকে অনেক সময় বিশেষ আকারে সাজিয়ে লেখা হয়। অনেক সময় সংখ্যাগুলোকে আয়তাকারে সাজিয়ে উভয় পাশে বন্ধনি দ্বারা আবদ্ধ করা হয়। ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক প্রকাশের জন্য এরূপ পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। এই ইউনিটে আমরা ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক সম্পর্কে জ্ঞান অর্জনের চেষ্টা করবো।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- *নির্ণায়ক সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন এবং নির্ণায়কের বিস্তৃতি সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন;*
- *নির্ণায়কের গুণাবলী, অনুরাশি ও সহগুণক সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন;*
- *নির্ণায়কের সাহায্যে বিভিন্ন সমস্যার সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন;*
- *ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন এবং বিভিন্ন প্রকার ম্যাট্রিক্স সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন;*
- *ম্যাট্রিক্স সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যার সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।*

পাঠ ১ নির্ণায়কের সংজ্ঞা ও বিস্তৃতি

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- নির্ণায়ক সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন,
- নির্ণায়কে বিস্তৃতি সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন।

সংজ্ঞা ঃ

নির্ণায়ক একটি বিশেষ আকারে লিখিত নির্দিষ্ট এক প্রকারের রাশি।
আমরা দুইটি একঘাত সমীকরণ নেই-

$$a_1x + b_1 = 0 \text{ .... (i)}$$
$$a_2x + b_2 = 0 \text{ .... (ii)}$$

সমীকরণ দুইটি হতে x– অপসারণ করে পাই-

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \text{ .... (iii)}$$

এই সম্পর্কটিকে $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ আকারেও লেখা হয়ে থাকে। বামপক্ষের রাশিটিকে নির্ণায়ক (determinant) বলা হয়। এই বিশেষ আকারে লিখিত রাশিটির দুইটি সারি (row) দুইটি কলাম (column) আছে। একে দ্বিতীয় পর্যায়ের নির্ণায়ক বলে।
আবার আমরা তিনটি একঘাত সমীকরণ নেই

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ ------------------------- (iv)}$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ ------------------------- (v)}$$
$$a_3x + b_3y + c_3 = 0 \text{ -------------------------- (vi)}$$

(v) এবং (vi) সমীকরণ দুইটি বজ্রগুণন পদ্ধতিতে সমাধান করে পাই,

$$\frac{x}{b_2c_3 - b_3c_2} = \frac{y}{-(a_2c_3 - a_3c_2)} = \frac{1}{a_2b_3 - a_3b_2}$$

x, y এর মান (iv) সমীকরণে বসিয়ে আমরা পাই

$$a_1\,(b_2\,c_3 - b_3c_2) - b_1\,(a_2\,c_3 - a_3\,c_2) + c_1\,(a_2b_3 - a_3\,b_2) = 0\text{- - - - - - - (vii)}$$

(vii) নং সম্পর্কটিকে নিম্নলিখিত আকারেও প্রকাশ করা যায়-

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ .... (viii)}$$

অথবা $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ ....(ix)

বামপক্ষের রাশিটি তৃতীয় পর্যায়ের নির্ণায়ক। এর তিনটি সারি এবং তিনটি কলাম আছে। (vii), (viii) এবং (ix) থেকে আমরা পাই-

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$
$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$$

ইহাই আলোচ্য নির্ণায়কের বিস্তৃতি।

a_1, b_1, c_1, a_2 ইত্যাদি বর্ণগুলিকে নির্ণায়কের উপাদান (element) এবং $a_1b_2c_3, a_1b_3c_2$ ইত্যাদি গুণফলকে নির্ণায়কের পদ (term) বলে। সারি এবং কলামের সংখ্যা নির্ণায়কের পর্যায় স্থির করে। a_1, b_2, c_3 উপাদানগুলি প্রধান কর্ণ তৈরী করে এবং এই পদগুলির গুণফল $a_1b_2c_3$ কে মুখ্যপদ বলে।

পাঠ ২ নির্ণায়কের গুণাবলী, অনুরাশি এবং সহগুণক

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- নির্ণায়কের গুণাবলী প্রমাণ এবং সমস্যা সমাধানে তা প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন;
- অনুরাশি ও সহগুণক সম্পর্কে জ্ঞান লাভ এবং সমস্যা সমাধানে প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন।

নির্ণায়কের মৌলিক গুণাবলী ঃ

(১) কোন নির্ণায়কের সারিকে কলামে বা কলামকে সারিতে পরিবর্তন করলে নির্ণায়কের মানের কোন পরিবর্তন হয় না।

ধরুন, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

D এবং D_1 কে আলাদাভাবে বিস্তৃত করলে দেখা যাবে যে, $D = D_1$

(২) কোন নির্ণায়কের দুইটি সারি বা কলাম পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের পরমমান একই থাকে কিন্তু তার চিহ্নের পরিবর্তন হয়।

ধরুন, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং $D_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} D_1 &= a_2\,(b_1c_3 - b_3c_1) - b_2(a_1c_3 - a_3c_1) + c_2(a_1b_3 - a_3b_1) \\ &= -\,[\,a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)\,] \\ &= -D \end{aligned}$$

(৩) কোন নির্ণায়কের দুইটি সারি বা দুইটি কলাম সমান হলে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

ধরুন, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

D এর ২য় এবং ৩য় সারির স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের মান একই থাকে কিন্তু চিহ্নের পরিবর্তন হয়।

$\therefore\ D = -D$ বা, $2D = 0$ $\therefore\ D = 0$

(৪) কোন নির্ণায়কের কোন সারি বা কোন কলামের সকল উপাদানকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে ঐ নির্ণায়কের মানকেও ঐ সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হবে।

ধরুন, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং $D_1 = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

১ম নির্ণায়কের ১ম সারির সকল উপাদানকে k দিয়ে গুণ করে D_1 গঠন করা হয়েছে, এক্ষেত্রে $D_1 = \text{K}D$ হবে।

$$D_1 = ka_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - kb_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + kc_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= k \left\{ a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = kD$$

(৫) যদি একটি নির্ণায়কের যে কোন সারি (বা কলাম) এর প্রত্যেকটি উপাদান দুইটি পদ নিয়ে গঠিত হয়, তাহলে নির্ণায়কটিকে অপর দুইটি নির্ণায়কের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়।

অর্থাৎ $$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(৬) কোন নির্ণায়কের কোন একটি সারি বা কলামের উপাদানগুলোকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করে অপর একটি সারি বা কলামের উপাদানগুলোর সাথে যোগ অথবা বিয়োগ করলে যে নির্ণায়ক উৎপন্ন হয় তার মান প্রথমোক্ত নির্ণায়কের মানের সমান।

ধরুন, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ $\qquad D_1 = \begin{vmatrix} a_1+nb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+nb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+nb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

এক্ষেত্রে $D_1 = \begin{vmatrix} a_1+nb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+nb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+nb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} nb_1 & b_1 & c_1 \\ nb_2 & b_2 & c_2 \\ nb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$= D$ [$\therefore$ দ্বিতীয় নির্ণায়কের ১ম এবং ২য় কলাম সমান বলে তার মান শূন্য]

(৭) যদি নির্ণায়কের কোন সারি (কলাম) এর উপাদানগুলোকে অপর একটি সারি (কলাম) এবং অনুরূপ উপাদানের সহগুণক দ্বারা গুণ করা হয়, তাহলে গুণফলগুলোর সমষ্টি শূন্য হবে।

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এখানে $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ $B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

এবং $C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

এখন $a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1$

$$= a_2 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ [$\therefore$ ১ম এবং ২য় সারি সমান।]

অনুরাশি (minor) ও সহগুণক (cofacter) : যদি একটি প্রদত্ত নির্ণায়ক D এর যে কোন উপাদানের মধ্য দিয়ে একটি খাড়া ও একটি অনুভূমিক (harizontal) সরলরেখা টানা যায়, তাহলে বাকী উপাদানগুলি দিয়ে গঠিত নির্ণায়ককে ঐ উপাদানের অনুরাশি (minor) বলে।

যেমন $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের a_1, b_1, c_1 এর অনুরাশি

যথাক্রমে - $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

কোন উপাদানের অনুরাশির পূর্বে যথাযোগ্য চিহ্ন বসিয়ে সহগুণক পাওয়া যায়, যথাযোগ্য চিহ্ন নির্ণয় করার নিয়ম ঃ
কোন উপাদান যদি r–তম সারি এবং c–তম কলামে অবস্থান করে তবে-
ঐ উপাদানের সহগুণক $= (-1)^{r+c} \times$ ঐ উপাদানের অনুরাশি।
কোন উপাদানের সহগুণক অনুরূপ বড় হাতের অক্ষর দিয়ে সূচিত হয়। যেমন a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক যথাক্রমে-

$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ $B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ $C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

উদাহরণ-1 ঃ $A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের একটি উপাদান 1 এর অবস্থান ২য় সারি ও ৩য় কলামে

$\therefore$ 1 এর অনুরাশি = ২য় সারি ও ৩য় কলাম বাদ দিয়ে

উৎপন্ন নির্ণায়ক = $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 14 - (-24) = 14+24 = 38$

অনুরূপভাবে 6 উপাদানের অনুরাশি = $\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 10 = -14$

1 উপাদানের সহগুণক $= (-1)^{2+3} \times 1$ উপাদানের অনুরাশি
$= -1 \times 38 = -38$

অনুরূপভাবে 6 উপাদানের সহগুক $= (-1)^{3+1} \times 6$ উপাদানের অনুরাশি
$= 1 \times (-14) = -14$

অনুরাশি ও সহগুণকের সাহায্যে নির্ণায়কের বিস্তৃতিঃ

ধরুন $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

তাহলে, $D = a_1 \times (a_1$ এর অনুরাশি$) - b_1 \times (b_1$ এর অনুরাশি$) + c_1 \times (c_1$ এর অনুরাশি$)$

কিন্তু a_1 এর সহগুণক $= (-1)^{1+1} \times a_1$ এর অনুরাশি $= a_1$ এর অনুরাশি $= A_1$
b_1 " " $= (-1)^{1+2} \times (b_1$ এর অনুরাশি$) = -(b_1$ এর অনুরাশি$) = B_1$
c_1 " " $= (-1)^{1+3} \times (c_1$ এর অনুরাশি$) = c_1$ এর অনুরাশি $= C_1$

$\therefore D = a_1 (a_1$ এর সহগুণক$) + b_1 (b_1$ এর সহগুণক$) + c_1 (c_1$ এর সহগুণক$)$

$= a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে,

$$\begin{aligned} D &= a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 \\ &= a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 \\ &= a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 \\ &= b_1B_1 + b_1B_1 + b_3B_3 \text{ ইত্যাদি} \end{aligned}$$

সুতরাং কোন নির্ণায়কের কোন সারি বা কলামের উপাদানগুলোকে তাদের নিজ নিজ সহগুণক দ্বারা গুণ করে গুণফলগুলো যোগ করলে যোগফল ঐ নির্ণায়কের মানের সমান হবে।

উদাহরণ-2ঃ মান নির্ণয় করুনঃ $\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix}$

প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} 67 - 19 \infty 3 & 19 & 21 \\ 39 - 13 \infty 3 & 13 & 14 \\ 81 - 24 \infty 3 & 24 & 26 \end{vmatrix}$

২য় কলামকে 3 দিয়ে গুণ করে ১ম কলাম থেকে বিয়োগ করে

$$= \begin{vmatrix} 10 & 19 & 21 \\ 0 & 13 & 14 \\ 9 & 24 & 26 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 10 & 19 & 20-19 \\ 0 & 13 & 1-13 \\ 9 & 24 & 26-24 \end{vmatrix}$$

৩য় কলাম থেকে ২য় কলাম বিয়োগ করে

$$= \begin{vmatrix} 10 & 19 & 2 \\ 0 & 13 & 1 \\ 9 & 24 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=10 \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 24 & 2 \end{vmatrix} +9 \begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} = 10 \infty 2 + 9(-7)$$

$$= 20 - 63 = -43$$

উদাহরণ-3 ঃ $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় করুন।

১ম কলাম থেকে ২য় ও ৩য় কলাম বিয়োগ করে প্রদত্ত নির্ণায়ক

$$= \begin{vmatrix} x+y-x-y & x & y \\ x-x-z-z & x+z & z \\ y-z-y-z & z & y+z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -2z & x+z & z \\ -2z & z & y+z \end{vmatrix}$$

$$= -2z \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x+z & z \\ 1 & z & y+z \end{vmatrix}$$

২য় সারি থেকে ৩য় সারি বিয়োগ করে

$$= -2z\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x & -y \\ 1 & z & y+z \end{vmatrix}$$

$$= -2z\begin{vmatrix} x & y \\ x & -y \end{vmatrix}$$

$$= -2z\,(-xy - xy) = 4xyz$$

উদাহরণ-4 ঃ দেখান যে, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \end{vmatrix} = 0$

প্রদত্ত নির্ণায়কটির অনুরূপ সারি এবং কলামগুলির পস্পর স্থান বিনিময় করে পাই-

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

এখানে $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটি D দ্বারা সূচিত করা হলে

$$abcD = abc\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a^2 & abc \\ b & b^2 & abc \\ c & c^2 & abc \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} = -abc\begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & b^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix}$$ ২য় এবং ৩য় কলাম স্থান বিনিময় করে

$$= abc\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$ ১ম এবং ২য় কলাম স্থান বিনিময় করে

$$\therefore D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$\therefore$ প্রদত্ত নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0$

উদাহরণ-5 ঃ প্রমাণ করুন যে, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc\,(a-b)(b-c)(c-a)$

বাম পক্ষ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

১ম কলাম থেকে ২য় কলাম এবং ২য় কলাম থেকে ৩য় কলাম বিয়োগ করে

$$= abc \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc\,(a-b)\,(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & b+c \end{vmatrix}$$

$$= abc\,(a-b)\,(b-c)\,(b+c-a-b)$$

$$= abc\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a).$$

উদাহরণ-5 : প্রমাণ করুন $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2a & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

প্রদত্ত নির্ণায়কটির **১**ম, ২য় এবং ৩য় সারি **১**ম সারিতে যোগ করে পাই-

$$\begin{vmatrix} a-b-c+2b+2c & 2a+b-c-a+2c & 2a+2b+c-a-b \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

১ম কলাম থেকে ২য় কলাম এবং ২য় কলাম থেকে ৩য় কলাম বিয়োগ করে-

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c+a+b & -(a+b+c) & 2b \\ 0 & a+b+c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} a+b+c & -(a+b+c) \\ 0 & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\,\{(a+b+c)^2 - 0\}$$

$$= (a+b+c)^3$$

পাঠ ৩ নির্ণায়ক সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- নির্ণায়ক সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

নির্ণায়কের সাহায্যে একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান

$a_1x + b_1y = c_1$ - - - - - - - - - - - - - - (i)

$a_2x + b_2y = c_2$ - - - - - - - - - - - - - - (ii)

দুই চলক সমন্বিত দুইটি একঘাত সমীকরণ।

এখন (i) নং সমীকরণকে b_2 এবং (ii) নং সমীকরণকে b_1 দ্বারা গুণ করে (i) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাওয়া যায়-

$a_1b_2x - a_2b_1x = b_2c_1 - b_1c_2$

বা, $x(a_1b_2 - a_2b_1) = b_2c_1 - b_1c_2$

বা, $x = \dfrac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$,

অনুরূপভাবে (i) নং সমীকরণকে a_2 এবং (ii) নং সমীকরণকে a_1 দ্বারা গুণ করার পর বিয়োগ করে পাওয়া যায়

$y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

নির্ণায়ক আকৃতিতে x এবং y এর মান,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{Dx}{D} \quad \text{এবং } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{Dy}{D}$$

এক্ষেত্রে x ও y চলকদ্বয়ের সহগ দ্বারা উৎপন্ন নির্ণায়ক

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, অনুরূপভাবে $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ এবং

$Dy = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

একইভাবে তিন চলক সমন্বিত সমীকরণ জোট

$a_1x + b_1y + c_1z = \mathrm{d}_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = \mathrm{d}_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = \mathrm{d}_3$

সমাধান করে পাই-

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mathrm{d}_1 & b_1 & c_1 \\ \mathrm{d}_2 & b_2 & c_2 \\ \mathrm{d}_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a1 & b_1 & c_1 \\ a2 & b_2 & c_2 \\ a3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{Dx}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \mathrm{d}_1 & c_1 \\ a_2 & \mathrm{d}_2 & c_2 \\ a_3 & \mathrm{d}_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{Dy}{D}$$

$$\text{এবং } z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \mathrm{d}_1 \\ a_2 & b_2 & \mathrm{d}_2 \\ a_3 & b_3 & \mathrm{d}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{Dz}{D}$$

এক্ষেত্রে D সমীকরণ জোটের চলকত্রয়ের সহগ দ্বারা উৎপন্ন নির্ণায়ক, D এর মানে x এর সহগের কলামে ধ্রুবকের কলাম, y এর সহগের কলামে ধ্রুবক পদের কলাম এবং z এর সহগের কলামে ধ্রুবকপদের কলাম স্থাপন করলে যথাক্রমে Dx, Dy, Dz পাওয়া যায়। নির্ণায়কের সাহায্যে একঘাত সমীকরণ জোটের এরূপ সমাধান পদ্ধতি ক্রেমারের নিয়ম (Cramer's Rule) বলে পরিচিত।

উদাহরণ-1 ঃ সমাধান করুন ঃ $4x + 3y = 2$

$8x + 9y = 6$

এক্ষেত্রে $D = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 24 = 12$

$$Dx = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0, \quad Dy = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 16 = 8$$

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{0}{12} = 0, \qquad y = \frac{Dy}{D} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

অতএব নির্ণেয় সমাধান $= \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$

উদাহরণ-2 ঃ সমাধান করুনঃ $2x - y - z = 4$, $x-2y+z = 5$, $x - y + 2z = 1$

সমাধান ঃ

এক্ষেত্রে $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

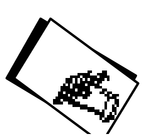
$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$\therefore\ x = \frac{D_x}{D} = \frac{O}{-6} = 0, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{18}{-6} = -3$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{6}{-6} = -1$$

অতএব নির্ণেয় সমাধান $= \{0, -3, -1\}$



অনুশীলনী-৪.১

1. সমাধান করুন ঃ

(i) $\begin{vmatrix} 29 & 16 & 22 \\ 25 & 31 & 25 \\ 63 & 54 & 46 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 265 & 240 & 219 \\ 240 & 225 & 198 \\ 219 & 196 & 181 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$

2. প্রমাণ করুন ঃ

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = 0$

(iii) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

(iv) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & \text{b} \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} =2\ (a+b+c)^3$

(v) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix} =-2(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)$

(vi) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

(vii) $\begin{vmatrix} x^2 & yz & zx+z^2 \\ x^2+xy & y^2 & zx \\ xy & y^2+yz & z^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2z^2$

(viii) $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = -\ (ax^2+2bxy+cy^2)\ (ca-b^2)$

3. নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান করুন ঃ

(i) $x+3y = 7$
$3x+y = -3$

(ii) $2x+3y = 4$
$x-y = 7$

(iii) $x+y+z = 1$
$x+2y+z = 2$
$x+y+2z = 0$

(iv) $x+y+z = 0$
$3x+2y+z = 1$
$x - y - 2z = 1$

(v) $2x+y-2z = 10$
$3x + 2y +2z = 1$
$5x + 4y + 3z = 4$

(vi) $2x+3y-2z = 2$
$3x + 4y - 3z = 2$
$5x - 3y + 2z = 5$

পাঠ ৪ ম্যাট্রিক্স এর সংজ্ঞা এবং বিভিন্ন প্রকার ম্যাট্রিক্স

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা বলতে পারবেন;
- বিভিন্ন প্রকার ম্যাট্রিক্স সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন।

সংজ্ঞা ঃ

কিছু নির্দিষ্ট গাণিতিক সংঘটন বা অপারেশন প্রক্রিয়াধীন কতগুলো সংখ্যাকে আয়তকারে সাজিয়ে উভয় পার্শ্বে বন্ধনী (bracket) দ্বারা আবদ্ধ করলে ম্যাট্রিক্স উৎপন্ন হয়। সাধারণভাবে ম্যাট্রিক্স প্রকাশের জন্য [ ] ব্রাকেট ব্যবহার করা হয়। তবে () ব্রাকেট বা ‖ ‖ প্রতীকও ব্যবহার করা হয়। কোন ম্যাট্রিক্সের অন্তর্গত সংখ্যাগুলোকে ঐ ম্যাট্রিক্সের উপাদান বলা হয় এবং তাদের কয়েকটি সারি ও কলামে সাজিয়ে ম্যাট্রিক্স গঠন করা হয়।

যেমন (i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ দুইটি ম্যাট্রিক্স

(i) নং ম্যাট্রিক্সকে $\left.\begin{matrix} x+2y-3z=0 \\ 4x-y+7z=0 \end{matrix}\right\}$ সমমাত্রিক একঘাত সমীকরণদ্বয়ের সহগ (coefficient) ম্যাট্রিক্স বা $\begin{matrix} x+2y=-3 \\ 4x-y=7 \end{matrix}$ অসমমাত্রিক সমীকরণদ্বয়ের বর্ধিত (augmented) ম্যাট্রিক্স বলে।

ম্যাট্রিক্স এর মাত্রা (order) ঃ কোন ম্যাট্রিক্স সারি সংখ্যা m ও কলাম সংখ্যা n হলে তার মাত্রা $m\times n$ হবে। উপরে উল্লেখিত ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের মাত্রা যথাক্রমে 2×3 এবং 3×3.

বিভিন্ন প্রকারের ম্যাট্রিক্স ঃ

রো ম্যাট্রিক্স (Row Matrix)ঃ একটি মাত্র সারি বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে রো ম্যাট্রিক্স বলে।

$A = [\, a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\dots\dots\, a_{1n}]$ একটি রো ম্যাট্রিক্স। এর সারি সংখ্যা 1 এবং কলামের সংখ্যা n, সুতরাং এটা $(1\times n)$ পর্যায়ের ম্যাট্রিক্স।

কলাম ম্যাট্রিক্স (Column Matrix)ঃ একটি মাত্র কলাম বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে কলাম ম্যাট্রিক্স বলে।

$B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ \vdots \\ am_1 \end{bmatrix}$ একটি কলাম ম্যাট্রিক্স। এর কলামের সংখ্যা 1 কিন্তু সারির সংখ্যা m। সুতরাং ম্যাট্রিক্সটি $(m\times1)$ পর্যায়ের।

বর্গ ম্যাট্রিক্স (Square Matrix)ঃ যে ম্যাট্রিক্স এর সারি এবং কলামের সংখ্যা সমান তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলে।

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ একটি বর্গম্যাট্রিক্স।

এর সারি এবং কলামের সংখ্যা n। n সংখ্যক সারি এবং n সংখ্যাকে কলাম বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সের পর্যায় n।

কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Diagonal Matrix)ঃ যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের $a_{ij}=0$ যখন $i \neq j$, তখন ম্যাট্রিক্সটিকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলে।

$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$ একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স।

স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar Matrix) :

যে ডায়াগোনাল ম্যাট্রিক্সের অশূন্য উপাদানগুলো সমান, তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলে।

$D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

অভেদ ম্যাট্রিক্স (Identity বা unit Matrix) :

স্কেলার ম্যাট্রিক্সের অশূন্য উপাদানগুলো একক হলে ম্যাট্রিক্সটিকে অভেদ ম্যাট্রক্স বা ইউনিট (unit) ম্যাট্রিক্স বলে। n পর্যায়ের ইউনিট ম্যাট্রিক্সকে I_n দিয়ে নির্দেশ করা হয়। যেমন-

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

শূন্য ম্যাট্রিক্স (Null Matrix বা Zero Matrix) : কোন ম্যাট্রিক্সের সবগুলো উপাদান শূন্য হলে তাকে শূন্য ম্যাট্রিক্স বা বিদেহী ম্যাট্রিক্স বলে। $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স।

ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স (Transpose Matrix)ঃ কোন ম্যাট্রিক্সের সারিগুলো কলাম এবং কলামগুলো সারিতে পরিণত করে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স বলে। ম্যাট্রিক্স A এর ট্রান্সপোজকে A^t বা A^T দ্বারা নির্দেশ করা হয়। A এর পর্যায় $m \times n$ হলে A^t এর পর্যায় $n \times m$ হবে।

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Symmetric Matrix)ঃ কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর ক্ষেত্রে যদি $A^t = A$ হয় তবে A কে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলে।

$A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$ একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স কেননা,

$$A^t = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} = \mathrm{A}$$

ইডেমপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স (Idempotent Matrix) : কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A- এর জন্য $A^2 = A$ হলে ম্যাট্রিক্সটিকে ইডেমপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স বলে। $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ একটি ইডেমপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স।

নিল পোটেন্ট ম্যাট্রিক্স (Nilpotent Matrix) : কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর জন্য $A^P = 0$ হলে A কে P সূচকের নিলপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স বলে। $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ একটি নিলপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স।

সিংগুলার ম্যাট্রিক্স (Singular Matrix) ঃ কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক শূন্য হলে ম্যাট্রিক্সটিকে সিংগুলার ম্যাট্রিক্স বলে। $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$ একটি সিংগুলার ম্যাট্রিক্স।

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -24 + 24 = 0$

ম্যাটিক্সের সমতা ঃ $A = [\,a_{ij}\,]$ এবং $B = [\,b_{ij}\,]$ ম্যাট্রিক্সদ্বয়কে সমান ম্যাট্রিক্স (Equal Matrix) বলা হয় যদি তাদের পর্যায় সমান হয় এবং একটির উপাদান দ্বিতীয়টির সংশ্লিষ্ট উপাদানের সমান হয়। দুইটি সমান ম্যাট্রিক্সের জন্য $[a_{ij}] = [b_{ij}]$, $\begin{pmatrix} i=1,2,3\text{- - - - - - -} m \\ j = 1, 2, 3 \text{ - - - - - -} n \end{pmatrix}$

পাঠ ৫ ম্যাট্রিক্সের যোগ, বিয়োগ এবং গুণফল ও বিভিন্ন সমস্যার সমাধান

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ম্যাটিক্সের যোগ, বিয়োগ গুণ নির্ণয় এবং সমস্যা সমাধানে তা প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন।

ম্যাট্রিক্সের যোগ, বিয়োগ ঃ

দুইটি ম্যাট্রিক্স A ও B যোগের জন্য বা বিয়োগের জন্য উপযোগী হবে যদি তাদের মাত্রা একই হয়। A ও B ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের যোগফল বা বিয়োগফল অপর একটি ম্যাট্রিক্স C হবে যার মাত্রা A ও B এর মাত্রার সমান হবে

এবং যার উপাদানগুলো A ও B ম্যাট্রিক্সের প্রতিসঙ্গী উপাদানগুলোর যোগফল বা বিয়োগফল হবে।

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+3 & -2+0 & 2+2 \\ 4-7 & 5+1 & 6+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -3 & 6 & 14 \end{bmatrix}$$

এবং $A - B = \begin{bmatrix} 1-3 & -2-0 & 2-2 \\ 4+7 & 5-1 & 5-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 11 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

$$B - A = \begin{bmatrix} 3-1 & 0+2 & 2-2 \\ -7-4 & 5-1 & 8-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 11 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A - B \neq B - A$$

যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ হয়

কোন স্কেলার K এর জন্য $K.A = \begin{bmatrix} K.1 & K.2 \\ K.2 & K.3 \end{bmatrix}$ হবে।

ম্যাট্রিক্সের গুণন (Multiplication of Matrices)

A ও B দুইটি ম্যাট্রিক্স হলে তাদের গুণফল AB গুণনের জন্য উপযোগী হবে যদি A অর্থাৎ বামপাশের ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা, B অর্থাৎ ডান পাশের ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যার সমান হয়। অন্যথায় তারা গুণনযোগ্য নয়।

ধরি A একটি 2×3 ম্যাট্রিক্স এবং B একটি 3×2 ম্যাট্রিক্স, তাহলে A এবং B এর গুণফল $(2\times3).(3\times2) = (2\times2)$ ম্যাট্রিক্স হবে।

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

কিন্তু $C=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -2 & 3\\ 4 & -7\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 9 & 8\end{bmatrix}$ হলে

CD নির্ণয় সম্ভব নয়। কারণ CD গুণন যোগ্য নয়। তাই কোন A ম্যাট্রিক্সের মাত্রা $m\times n$ এবং B ম্যাট্রিক্সের মাত্রা $n\times p$ হলে AB গুণন যোগ্য কারণ বামদিকের ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা n এবং ডানদিকের ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যাও n। কিন্তু BA গুণনযোগ্য নয়। AB এর গুণফল ম্যাট্রিক্সের মাত্রা $m\times p$ হবে।

উদাহরণ-1 : $A=\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ হলে (i) $A+B$ (ii) $B+C$ (iii) $C-A$ (iv) $3A+4B-$ 2c নির্ণয় করুন, (v) দেখান যে, $A+(B-C)=(A+B)-C$.

(i) $A+B=\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2+1 & -5-2 & 1-3\\ 3+0 & 0-1 & -4+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -7 & -2\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

(ii) $B+C=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1+0 & -2+1 & -3+2\\ 0+1 & -1-1 & 5+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 6\end{bmatrix}$$

(iii) $C-A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & -4\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0-2 & 1+5 & 2-1\\ 1-3 & -1-0 & 1+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 6 & 1\\ -2 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

(iv) $3A+4B-2C=3\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & -4\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}6 & -15 & 3\\ 9 & 0 & -12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & -8 & -12\\ 0 & -4 & 20\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 2 & 4\\ 2 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6+4-0 & -15-8-2 & 3-12-4\\ 9+0-2 & 0-4+2 & -12+20-2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & -25 & -13\\ 7 & -2 & 6\end{bmatrix}$$

(v) $A+(B-C)=\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -3 & -5\\ -1 & 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -8 & -4\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$(A+B)-C=\begin{bmatrix}3 & -7 & -2\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -8 & -4\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$\therefore\ A+(B-C)=(A+B)-C$

উদাহরণ-2 : $A=\begin{bmatrix}5 & -7 & 1\\ -1 & 2 & -3\\ 4 & -2 & -16\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 5 & 1\end{bmatrix}$

দেখান যে, $AB \neq BA$

$$AB = \begin{bmatrix} 15-4+1 & 10-21+5 & 5-14+1 \\ -3+4-3 & -2+6-15 & -1+4-3 \\ 12-4-16 & 8-6-80 & 4-4-16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & -8 \\ -2 & -11 & 0 \\ -8 & -78 & -16 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 15-2+4 & -21+4-2 & 3-6-16 \\ 10-3+8 & -14+6-4 & 1-9-32 \\ 5-5+4 & -7+10-2 & 1-15-16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -19 & -19 \\ 15 & -12 & -39 \\ 4 & 1 & -30 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ AB \neq BA$

উদাহরণ-3 : দেখান যে, $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ একটি ইডেমপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স।

ধরি প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স A

তাহলে $A^2 = A.\,A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4+2-4 & -4-6+8 & -8-8+12 \\ -2-3+4 & 2+9-8 & 4+12-12 \\ 2+2-3 & -2-6+6 & -4-8+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$$

$\therefore\ A$ একটি ইডেমপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স।

উদাহরণ-4 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ হলে দেখান যে, $A^2 + 2A - 11\mathrm{I}$ একটি বিদেহী ম্যাট্রিক্স।

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+8 & 2-6 \\ 4-12 & 8+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$$

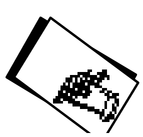
$$A^2+2A-11\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 11\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ এটা একটি বিদেহী ম্যাট্রিক্স।

উদাহরণ-5: $A = [2 \quad 1]$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

$$AB = [2+4 \quad -4+5 \quad 0-3] = [6 \quad 1 \quad -3]$$



অনুশীলনী-৪.২

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে

   (i) $A+B$, (ii) $A-C$, (iii) -2A নির্ণয় করুন এবং দেখান যে, (iv) $A+(B-C)=(A+B)-C$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ হলে

(i) AB এবং AC নির্ণয় করুন, (ii) দেখান যে, $AB + AC = A(B+C)$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, C = [\,1 \;\; 2 \;\; -5 \;\; 6\,]$ হলে দেখাও যে, $(AB)C = A(BC)$ এবং ABC নির্ণয় করুন।

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ হলে $A^3 - 2A^2 + A - I$ নির্ণয় করুন।

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে $3A - 4B$ এর মান নির্ণয় করুন।

6. মান নির্ণয় করুন।

(i) $[4 \;\; 5 \;\; 6] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

7. দেখান যে, $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ একটি ইডেমপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স।

উত্তরমালা

অনুশীলনী-৪.১

1. (i) 132 (ii) 0 (iii) $1+x_1+x_2+x_3$ (iv) $4a^2b^2c^2$

3. (i) $\{-2, 3\}$ (ii) $\{5, -2\}$ (iii) $\{1, 1, -1\}$ (iv) $\{0, 1, -1\}$ (v) $\{1, 2, -3\}$ (vi) $\{1, 2, 3\}$

অনুশীলনী-৪.২

1.(i) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -10 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

2.(i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 14 & 64 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 6 & 15 & 10 \\ 10 & 1 & 15 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} -13 & -3 & 18 \\ 4 & 17 & 0 \end{bmatrix}$

6. (i) [17] (ii) $\begin{bmatrix} 20 \\ 29 \end{bmatrix}$