ইউনিট ৬

বিন্যাস ও সমাবেশ

ভূমিকা

প্রাচীন কালের জ্যোতিষীরা সৌরজগতের গ্রহ ও নক্ষত্ররাজির অবস্থান সম্পর্কে কৌতুহলী হয়েই বিন্যাস ও সমাবেশের ধারণা সৃষ্টি করেন। এরপর পঞ্চদশ শতাব্দীর শেষ দিকে 'পেকিওলী' বিন্যাসের সাধারণ সূত্রটি উদ্ভাবন করেন। গণিতে বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিন্যাস ও সমাবেশ এর ধারণার বিশেষ অবদান রয়েছে। এই ইউনিটে আমরা বিন্যাস ও সমাবেশ সম্পর্কে বিস্তারিত জ্ঞান লাভের চেষ্টা করবো।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- *বিন্যাস ও সমাবেশের সূত্র বাস্তব জীবনে প্রয়োগের অভিজ্ঞতা অর্জন করবেন,*
- *সবগুলো ভিন্ন নহে এরূপ জিনিসের বিন্যাস সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন,*
- *সম্পূরক সমাবেশের সূত্রের প্রয়োগ ও প্রমাণ সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন।*

পাঠ ১ বিন্যাস ও সমাবেশের সংজ্ঞা ও ধারণা

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বিন্যাস ও সমাবেশ সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন।
- বিন্যাসের মূলতত্ত্ব সম্পর্কে জানতে পারবেন।

সংজ্ঞা ঃ

মনে করুন (l, m, n) তিনটি ভিন্ন অক্ষর। এখন তিনটি অক্ষর থেকে দুইটি অক্ষর একত্রে নিয়ে সাজানো যায় (lm, ln, mn, nm, ml, nl) এই ছয়ভাবে। আবার তিনটি অক্ষর থেকে তিনটি অক্ষর একত্র নিয়ে সাজানো যায় ($lmn, lnm, mnl, mnl, nml, nlm$) এই ছয়ভাবে। সুতরাং প্রথম ক্ষেত্রে সাজানো বা বিন্যাস সংখ্যা 6 এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রেও সাজানো বা বিন্যাস সংখ্যা 6। তাহলে বিন্যাস বা সাজানো বলতে আমরা বুঝি কতগুলো নির্দিষ্ট জিনিস থেকে সবকয়টি বা এর থেকে কম সংখ্যক কয়েকটি একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজনো যায় ততটি বিন্যাস। এই ক্ষেত্রে আমরা উপরের বিন্যাস দুইটিকে ${}^3P_2=6$ এবং ${}^3P_3=6$ প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করে থাকি।

আবার মনে করুন (l, m, n) তিনটি ভিন্ন অক্ষর। এখন তিনটি অক্ষর থেকে দুইটি অক্ষর একত্রে নিয়ে সমাবেশ বা দলগঠন করা যায় (lm, mn, nl) এই তিনভাবে। কিন্তু তিনটি অক্ষর থেকে একত্রে তিনটি নিয়ে সমাবেশ বা দল গঠন করা যায় (lmn) একভাবে। সুতরাং সমাবেশ বা দল গঠন বলতে আমরা বুঝি কতগুলো নির্দিষ্ট জিনিস থেকে সবকয়টি বা এর চেয়ে কম সংখ্যক কয়েকটি একত্রে নিয়ে যত প্রকারে দলগঠন বা সমাবেশ তৈরী করা যায় ততটি সমাবেশ বা দলগঠন।

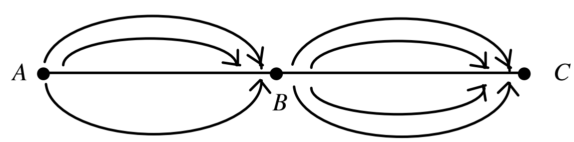
আমরা উপরের দুইটি সমাবেশকে ${}^3C_2 = 3$ এবং ${}^3C_3=1$ প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করে থাকি। সাধারণতঃ n সংখ্যক জিনিস থেকে r সংখ্যক জিনিসের বিন্যাস সংখ্যাকে ${}^nP_r$ এবং n সংখ্যক জিনিস থেকে r সংখ্যক জিনিসের সমাবেশ সংখ্যাকে ${}^nC_r$ প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়।

বিন্যাসের মূল তত্ত্ব ঃ

যদি প্রথম কাজটি x সংখ্যক বিভিন্ন পদ্ধতিতে সম্পন্ন করা হয় এবং দ্বিতীয় কাজটি y সংখ্যক বিভিন্ন পদ্ধতিতে সম্পন্ন করা হয়, তবে কাজ দুইটি একত্রে মোট $x \times y$ সংখ্যক পদ্ধতিতে সম্পন্ন হবে।

উদাহরণ-1 ঃ মনে করুন A স্থান হতে B স্থানে যেতে 3টি পথ আছে এবং B স্থান হতে C স্থানে যেতে 4টি পথ আছে। এখন একজন লোক B স্থান হয়ে A স্থান থেকে C স্থানে কত প্রকারে যেতে পারে?

সমাধানঃ লোকটি A স্থান থেকে B স্থানে যেতে পারে 3 টি পথের যে কোন পথে। আবার B স্থান থেকে C স্থানে যেতে পারে 4 টি পথের যেকোন পথে। সুতরাং লোকটি A স্থান থেকে C স্থানে যেতে পারে B স্থান হয়ে $3\times4=12$ ভাবে।



পাঠ ২ সবগুলো ভিন্ন ভিন্ন জিনিসের বিন্যাস

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সবগুলো ভিন্ন ভিন্ন জিনিসের বিন্যাস নির্ণয় করতে পারবেন।

${}^nP_r$ এর মান নির্ণয় ঃ

সমাধান ঃ

মনে করুন $n=20$ জন ছাত্র এবং $r=10$ টি চেয়ার। এখন 20 জন ছাত্র, 10 টি চেয়ারে নিম্নভাবে বসতে পারে। প্রথমে আমরা 10 টি চেয়ারের নম্বর দিয়ে রাখি। চেয়ার নং 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10। এখন 1 নং চেয়ারে 20 জন ছাত্রের যে কোন একজন বসতে পারে। সুতরাং 1 নং চেয়ারটি 20 ভাগে সাজনো যায়। 1 নং চেয়ারটিতে একজন ছাত্র বসার পর 2নং চেয়ারটিতে 19 জন ছাত্রের যে কোন একজন বসতে পারে। এইভাবে 2নং চেয়ারটি 19 ভাবে সাজানো যায়। সুতরাং প্রথম দুইটি চেয়ারকে সাজানো যায় ${}^{20}P_2 = 20\times19$ ভাবে। পরবর্তীতে 3 নং চেয়ারটিকে সাজানো যায় 18 ভাবে। সুতরাং প্রথম তিনটি চেয়ার সাজানো যায় ${}^{20}P_3=20\times19\times18$ ভাবে। এক্ষেত্রে লক্ষ্য করা যায় চেয়ারের সংখ্যা যত, উৎপাদকের সংখ্যা তত।

এখন মনে করুন 20 জন ছাত্রের পরিবর্তে n জন ছাত্র এবং 10 টি চেয়ারের পরিবর্তে r টি চেয়ার। একই পদ্ধতিতে 1 নং চেয়ারটি পূরণ করা যায় n সংখ্যক ভাবে। 2 নং চেয়ারটি পূরণ করা যায় $(n-1)$ সংখ্যকভাবে। সুতরাং প্রথম দুইটি চেয়ার সাজানো যায় ${}^nP_2 = n(n-1) = n\{n-(2-1)\}$ ভাবে। এইভাবে 3 নং চেয়ারটি $(n-2)$ ভাবে সাজানো যায়। অতএব প্রথম তিনটি চেয়ার সাজানো যায় ${}^nP_3 = n(n-1)(n-2) = n(n-1)\{n-(3-1)\}$ ভাবে। এই নিয়মে অগ্রসর হয়ে আমরা r সংখ্যক চেয়ার সাজাতে পরি

${}^nP_r = n(n-1)(n-2)$ - - - - - - - r সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত।

$= n(n-1)(n-2) - - - - - - \{n-(r-1)\} = n(n-)(n-2) - - - (n-r+1) - - - - - \text{(i)}$

অনুসিদ্ধান্ত-1 ঃ (i) নং সূত্রে $r=n$ বসিয়ে, আমরা পাই

${}^nP_n = n(n-1)(n-2) - - - - - - (n-n+1) = n(n-1)(n-2) - - - - - 3.2.1$

এখন $n(n-1)(n-2)$ - - - - 3.2.1 কে $\lfloor\underline{n}$ বা $n\,!$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\lfloor\underline{n}$ বা $n!$ কে Factorial n বা গৌণিক n বলা হয়।

$\therefore\ {}^nP_n = \lfloor\underline{n}$ বা $n\,!$

অনুসিদ্ধান্ত-2 ঃ আমরা জানি, ${}^nP_r = n(n-1)(n-2) - - - - - - (n-r+1)$

$$= \frac{\{n(n-1)(n-2) - - - - - - - - - - - (n-r+1)\}\lfloor\underline{n-r}}{\lfloor\underline{n-r}}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) - - - - - (n-r+1)\,(n-r) - - - - 3.2.1}{\lfloor\underline{n-r}} = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}}$$

অনুসিদ্ধান্ত-3 ঃ $\lfloor\underline{0}$ এর মান নির্ণয় ঃ

অনুসিদ্ধান্ত- 2 এ $r=n$ বসিয়ে, আমরা পাই, ${}^nP_n = \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-n}} = \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{0}}$

বা, $\lfloor\underline{n} = \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{0}}$ বা, $\lfloor\underline{0} = \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n}} = 1$

উদাহরণ-1 ঃ Equation শব্দটির সবগুলো অক্ষর একত্রে নিয়ে কতগুলো শব্দ তৈরী করা যায়।

সমাধানঃ Equation শব্দটিতে ৪টি অক্ষর আছে। এখন ৪টি অক্ষরের সবকয়টি একত্রে নিয়ে মোট বিন্যাস সংখ্যা হবে ${}^8P_8 = \lfloor\underline{8} = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40{,}320$

উদাহরণ-2 ঃ Courage শব্দটির সবগুলো অক্ষর ব্যবহার করে কতগুলো শব্দ গঠন করা যায়।

সমাধান ঃ Courage শব্দটিতে মোট 7 টি অক্ষর আছে। সুতরাং 7 টি অক্ষর একসাথে নিয়ে মোট বিন্যাস সংখ্যা হবে ${}^7P_7 = \lfloor\underline{7} = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040$

পাঠ ৩ সবগুলো ভিন্ন নয় এরূপ জিনিসের বিন্যাস

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সবগুলো ভিন্ন নয় এরূপ জিনিসের বিন্যাস নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

সবগুলো ভিন্ন নয় এইরূপ জিনিসের বিন্যাস নির্নয়

এখানে n সংখ্যক জিনিসের সবকয়টি একবারে নিয়ে বিন্যাস নির্ণয় করতে হবে যার p সংখ্যক জিনিস এক রকম, q সংখ্যক জিনিস দ্বিতীয় রকম, r সংখ্যক জিনিস তৃতীয় রকম এবং বাকীগুলো ভিন্ন ভিন্ন।

মনে করুন এইক্ষেত্রে মোট বিন্যাস সংখ্যা x; এখন P সংখ্যক একরকম জিনিসকে যদি P সংখ্যক ভিন্ন জিনিস দ্বারা বদলানো হয়, প্রতিক্ষেত্রে আমরা $\underline{\lfloor P}$ সংখ্যক নূতন বিন্যাস পাওয়া যাবে। সুতরাং প্রথম ক্ষেত্রে আমরা $x\times\underline{\lfloor P}$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাবে। অনুরূপভাবে, q সংখ্যক এক রকম জিনিসকে যদি q সংখ্যক ভিন্ন জিনিস দ্বারা বদলানো হয়, তবে দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $\underline{\lfloor q}$ সংখ্যক নূতন বিন্যাস পাওয়া যাবে। কাজেই দ্বিতীয় ক্ষেত্রে মোট $x.\underline{\lfloor p}.\underline{\lfloor q}$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাবে। আবার যদি r সংখ্যক একরকম জিনিসকে $\underline{\lfloor r}$ সংখ্যক ভিন্ন জিনিস দ্বারা বদলানো হয়, তবে তৃতীয় ক্ষেত্রে $\underline{\lfloor r}$ সংখ্যক নূতন বিন্যাস পাওয়া যাবে। সুতরাং তৃতীয় ক্ষেত্রে মোট $x\underline{\lfloor p}\,\underline{\lfloor q}\,\underline{\lfloor r}$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাবে। এইভাবে সবগুলো n সংখ্যক জিনিসই ভিন্ন হওয়ায় মোট বিন্যাস সংখ্যা হবে $\underline{\lfloor n}$.

$\therefore\ x\underline{\lfloor p}\,\underline{\lfloor q}\,\underline{\lfloor r}=\underline{\lfloor n}$

বা, $x=\dfrac{\in\underline{n}}{\in\underline{p}\ \in\underline{q}\ \in\underline{r}}$

উদাহরণ-1 ঃ 'Dhaka' শব্দটির বর্ণগুলিকে একত্রে নিয়ে মোট কত প্রকার বিন্যাস করা যায়?

সমাধানঃ Dhaka শব্দটির মোট 5টি বর্ণের মধ্যে 2 টি a আছে। সুতরাং সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা হবে = $\dfrac{\in\underline{5}}{\in\underline{2}}=\dfrac{5.4.3.2}{2}=60$

উদাহরণ-2 ঃ Capital শব্দটির বর্ণগুলিকে একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায়?

সমাধানঃ Capital শব্দটির 7টি অক্ষরের মধ্যে 2টি a আছে। সুতরাং এইক্ষেত্রে মোট বিন্যাস সংখ্যা হবে = $\dfrac{\in\underline{7}}{\in\underline{2}}$

$=\dfrac{7.6.5.4.3.2.1}{2}=2520$

উদাহরণ-3 ঃ 'Permutation' শব্দটির সবগুলো অক্ষর একত্রে নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যাবে নির্ণয় করুন ?

সমাধানঃ Permutation শব্দটিতে মোট 11 টি অক্ষর আছে। যাহার মধ্যে 2 টি t আছে। সুতরাং নির্ণেয় শব্দ সংখ্যা = $\dfrac{\in\underline{11}}{\in\underline{2}}$

$=\dfrac{11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{2.1}$

$=19958400$

পাঠ ৪ পুনরাবৃত্তিমূলক বস্তুর বিন্যাস

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- পুনরাবৃত্তিমূলক বস্তুর বিন্যাস নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

পুনরাবৃত্তিমূলক বস্তুর বিন্যাস

এখানে n সংখ্যক জিনিস থেকে একবারে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে বিন্যাস নির্ণয় করতে হবে, যেখানে প্রত্যেকটি জিনিস r সংখ্যক বার পর্যন্ত পুনরাবৃত্তি হতে পারে।

মনে করুন, r সংখ্যক জিনিসের প্রথম স্থানটি n প্রকারে পূরণ করায় পর, দ্বিতীয় স্থানটিও n প্রকারে পূরণ করা যায়। অতএব প্রথম দুইটি স্থান $n\times n=n^2$ প্রকারে পূরণ করা যায়। অনুরূপভাবে তৃতীয় স্থানটিও n সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং প্রথম তিনটি স্থান $n\times n\times n=n^3$ প্রকারে পূরণ করা যায়। এইক্ষেত্রে লক্ষ করা যায় যে, যতগুলো স্থান পূরণ করা হয়, n এর সূচকও তত হয়। এইভাবে অগ্রসর হয়ে, আমরা r সংখ্যক স্থান $n\times n\times n\times - - - - \times n=n^r$ সংখ্যক উপায়ে পূরণ করতে পারি। অতএব, নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= n^r$

উদাহরণ-1 ঃ 3, 4, 5, 6, 7 এর প্রত্যেকটিকে যে কোন সংখ্যাক বার নিয়ে তিন অংকের কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধানঃ এখানে 5টি অংকের দ্বারা 3টি স্থান পূরণ করতে হবে যেখানে প্রতিটি অংক বারবার ব্যবহার করা যাবে। প্রথম স্থানটি 5 ভাবে পূরণ করার পর, দ্বিতীয় স্থানটিও 5 ভাবে পূরণ করা যাবে। সুতরাং প্রথম দুইটি স্থান পূরণ করা যাবে $5\times 5=5^2$ ভাবে। আবার তৃতীয় স্থানটিও 5 ভাবে পূরণ করা যায়। অতএব তিনটি স্থান পূরণ করা যাবে $= 5\times 5\times 5 = 5^3=125$ ভাবে।

বিন্যাস সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যা ও সমাধানঃ

উদাহরণ-1 ঃ স্বরবর্ণগুলো কেবলমাত্র জোড় স্থানে রেখে 'postage' শব্দটির অক্ষরগুলোকে কতভাবে সাজানো যায় নির্ণয় করুন?

সমাধান ঃ postage শব্দটিতে 3টি স্বরবর্ণ (o, a, e) এবং 4টি ব্যঞ্জনবর্ণ (p, s, t, g) আছে। এখন 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 এই সাতটি স্থানের মধ্যে তিনটি জোড়স্থান (2, 4, 6) রয়েছে। সুতরাং তিনটি জোড়স্থানে 3 টি স্বরবর্ণ রেখে বাকী 4 টি স্থান 4 টি ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা পূরণ করা যায় $^4p_4 = \lfloor\underline{4} = 4.3.2.1=24$ ভাবে। এবং 3 টি স্বরবর্ণ দ্বারা 3 টি জোড় স্থান পূরণ করা যায় $^3p_3 = \lfloor\underline{3} = 6$ ভাবে। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 24\times 6 = 144$

উদাহরণ-2 ঃ 'Algebra' শব্দটির বর্ণগুলি হতে প্রতিবারে 3টি বর্ণ নিয়ে কতটি শব্দ তৈরী করা যাবে?

সমাধানঃ 'Algebra' শব্দটিতে দুইটি a সহ মোট সাতটি বর্ণ আছে। এখন দুইটি a এর একটি এবং বাকী পাঁচটি বর্ণসহ (a, l, g, e, b, r) মোট ছয়টি বর্ণ থেকে তিনটি বর্ণ একসাথে নিয়ে গঠিত শব্দের সংখ্যা $= {}^6p_3 = 6.5.4 = 120$ টি। আবার দুইটি a এবং বাকী পাঁচটির থেকে একটি নিয়ে গঠিত শব্দের সংখ্যা $\{(a, a, l), (a, a, g), (a, a, e), (a, a, b)\ (a, a, r)\} = 5\times \dfrac{\lfloor\underline{3}}{2}$

$= 5\times 3 =15$ টি। সুতরাং মোট শব্দ সংখ্যা $= 120+15 = 135$.

উদাহরণ-3 ঃ দুইজন $S.S.C$ ক্লাশের ছাত্রকে পাশাপাশি না বসিয়ে 16 জন $S.S.C$ ক্লাশের এবং 12 জন $H.S.C$ ক্লাশের ছাত্রকে কত প্রকারে এক লাইনে বসানো যায় নির্ণয় করুন?

সমাধান ঃ 12 জন $H..S.C$ ছাত্রের মাঝে মোট 13 টি স্থান আছে। সুতরাং 16 জন $S.S.C$ ছাত্রকে 13 টি স্থানে বসানো যায় $^{16}P_{13}$ ভাবে। এখন 12 টি স্থানে 12 জন $H.S.C$ ছাত্রকে বসানো যায় $^{12}P_{12}=\lfloor\underline{12}$ ভাবে। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{16}P_{13}\times \lfloor\underline{12}$

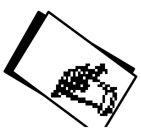
উদাহরণ-4 ঃ 'Cambridge' শব্দটির অক্ষরগুলো হতে প্রতি বারে 5 টি নিয়ে মোট কতগুলো ভিন্ন শব্দ গঠন করা যায় যেখানে সবকয়টি স্বরবর্ণ বর্তমান থাকবে?

সমাধান ঃ 'Cambridge' শব্দটিতে তিনটি স্বরবর্ণ (a, i,e) এবং ছয়টি ব্যঞ্জনবর্ণ (c, m, b, r, d, g) আছে। এখন 5 টি স্থানের 3 টি স্থান তিনটি স্বরবর্ণ দ্বারা পূরণ করা যায় ${}^5P_3 = 5.4.3 = 60$ ভাবে। বাকী 2 টি স্থান 6 টি ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা পূরণ করা যায় ${}^6P_2 = 6\times5 = 30$ ভাবে।

$\therefore$ মোট শব্দ সংখ্যা $= 60\times30 = 1800$

অনুশীলন করুন

1. নিম্নলিখিত শব্দসমূহের অক্ষরগুলোর সবকয়টিকে একবারে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় নির্ণয় করুন ঃ
   (i) Television (ii) Mathematics,
   (iii) Bangladesh.
2. 2, 3, 4, 5, 6, 7 অংকগুলোর একটিকেও পুনরাবৃত্তি না করে 5000 এবং 6000 এর মধ্যবর্তী কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যাবে?
3. 'Laughter' শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যাবে যেখানে প্রক্যেকটি শব্দ L দ্বারা আরম্ভ হবে।
4. স্বরবর্ণগুলোকে কেবল জোড় স্থানে রেখে Equation শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায় নির্ণয় করুন।
5. 10 টি বলের মধ্যে 8 টি লাল এবং 2 টি সবুজ। সবুজ বল দুইটি পাশাপাশি না রেখে বলগুলোকে এক সারিতে কত প্রকারে সাজানো যায় নির্ণয় করুন।
6. 0, 1, 2, 3, 4, 5 অংকগুলো দ্বারা ছয় অংশ বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় নির্ণয় করুন।
7. প্রত্যেক অংককে প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে 6, 5, 2, 3, 0 দ্বারা পাঁচ-অংকের কতগুলো বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যায় নির্ণয় করুন।



অনুশীলনী-৬.১

1. সবগুলো অক্ষর ক্ষেত্রে নিয়ে Parallel শব্দটিকে কত প্রকারে সাজানো যায় নির্ণয় করুন।
2. স্বরবর্ণগুলোকে কখনও পাশাপাশি না রেখে 'Triangle' শব্দটিকে কত রকমে সাজানো যায় নির্ণয় করুন।
3. 'Engineering' শব্দের অক্ষরগুলো দ্বারা কতগুলো ভিন্ন ভিন্ন শব্দ গঠন করা যায় নির্ণয় করুন।
4. দুইজন B.Sc ক্লাশের ছাত্রকে পাশাপাশি না বসিয়ে 12 জন H.S.C ক্লাশের ছাত্র এবং 6 জন B.Sc ক্লাশের ছাত্রকে কত ভাবে এক সারিতে বসানো যায় নির্ণয় করুন।
5. নিম্নের শব্দসমূহের অক্ষরগুলোর সব কয়টিকে একবারে নিয়ে কতভাবে সাজানো যায় নির্ণয় করুনঃ
   (i) Chittagong, (ii) Comilla (iii) Rajshahi (iv) Faridpur.

পাঠ ৫ ${}^{n}C_{r}$ এর মান নির্ণয়

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ${}^{n}C_{r}$ এর মান নির্ণয় করতে পারবেন।

${}^{n}C_{r}$ এর মান নির্ণয় ঃ

নিম্নে বিন্যাস ও সমাবেশের পার্থক্য লক্ষ্য করুন।

(i) মনে করুন তিনটি ভিন্ন জিনিস (a, b, c) থেকে দুইটি জিনিস একসাথে নিয়ে বিন্যাস তৈরী করা যায় (ab, ba, bc, cb, ca, ac) 6 টি অর্থাৎ ${}^{3}P_{2} = 6$.

কিন্তু তিনটি ভিন্ন জিনিস (a, b, c) থেকে দুইটি জিনিস একসাথে নিয়ে সমাবেশ তৈরী করা যায় (ab, bc, ca) 3 টি অর্থাৎ ${}^{3}C_{2} = 3$.

এই দুইটি প্রতীকের মান সমান করা যায় ${}^{3}P_{2} = 6 = {}^{3}C_{2} \times \lfloor\underline{2}$ ভাবে।

(ii) আবার মনে করুন তিনটি ভিন্ন জিনিস (a, b, c) থেকে তিনটি জিনিস একসাথে নিয়ে বিন্যাস তৈরী করা যায় $(abc, acb, bca, bac, cab, cba)$ 6 টি অর্থাৎ ${}^{3}P_{3} = 6$.

কিন্তু তিনটি ভিন্ন জিনিস (a, b, c) থেকে তিনটি জিনিস একসাথে নিয়ে সমাবেশ করা যায় (abc) 1 টি অর্থাৎ ${}^{3}C_{3} = 1$. ।

এই দুইটি প্রতীকের মান সমান করা যায় ${}^{3}P_{3} = 6 = {}^{3}C_{3} \times \lfloor\underline{3}$ ভাবে।

সুতরাং সাধারণভাবে আমরা বলতে পারি ${}^{n}P_{r} = {}^{n}C_{r} \times \lfloor\underline{r}$

এই নিয়মটি আমরা নিভাবে ব্যাখ্যা করতে পারিঃ

মনে করুন, n সংখ্যক ভিন্ন জিনিস থেকে প্রত্যেকবার r সংখ্যক জিনিস একসাথে নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা হবে ${}^{n}C_{r}$। কিন্তু প্রত্যেক সমাবেশে r সংখ্যক ভিন্ন জিনিস আছে যাদেরকে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় $\lfloor\underline{r}$ ভাবে। সুতরাং ${}^{n}C_{r}$ সংখ্যক সমাবেশ থেকে ${}^{n}C_{r} \times \lfloor\underline{r}$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাবে।

আবার, n সংখ্যক কিন্তু জিনিস থেকে প্রত্যেকবার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা হবে ${}^{n}P_{r}$.

$$\therefore \quad {}^{n}C_{r} \times \lfloor\underline{r} = {}^{n}P_{r}$$

$$\text{বা,} \quad {}^{n}C_{r} = \frac{{}^{n}P_{r}}{\lfloor\underline{r}} = \frac{\dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}}}{\lfloor\underline{r}} = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{n-r}}$$

অনুসিদ্ধান্ত 1 ঃ n সংখ্যক ভিন্ন জিনিস থেকে সবগুলো একত্রে নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা হবে,

$${}^{n}C_{n} = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n}\,\lfloor\underline{n-n}} = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n}\,\lfloor\underline{o}} = 1 \quad [\text{ উপরের সূত্রে } r = n \text{ বসিয়ে }]$$

পাঠ ৬ সম্পূরক সমাবেশ (Complementary Cobination):

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সম্পুরক সমাবেশ সম্পর্কিত সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

আমরা জানি, $^3C_1 = \dfrac{\lfloor\underline{3}}{\lfloor\underline{1}\,\lfloor\underline{3-1}} = \dfrac{3.2}{2.1} = 3$

আবার, $^3C_{3-1} = {}^3C_2 = \dfrac{\lfloor\underline{3}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{3-2}} = \dfrac{3.2}{2} = 3$

$\therefore\ {}^3C_1 = {}^3C_{3-1}$

এখানে, $^3C_1$ এবং $^3C_{3-1}$ সমাবেশ দুইটিকে পরস্পর সম্পূরক সমাবেশ বলা হয়।

সুতরাং $^nC_r = \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{n-r}}$ এবং

$^nC_{n-r} = \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}\,\lfloor\underline{n-n+r}} = \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{n-r}}$

এইক্ষেত্রে, $^nC_r = {}^nC_{n-r}$

সুতরাং ^nC_r এবং $^nC_{n-r}$ সমাবেশ দুইটিকে পরস্পর সম্পূরক সমাবেশ বলা হয়।

প্রমাণ করুন ঃ $^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r.$

সমাধান ঃ বামপক্ষ $= {}^nC_r + {}^nC_{r-1}$

$= \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{n-r}} + \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r-1}\,\lfloor\underline{n-r+1}}$

$= \dfrac{\lfloor\underline{n}}{r\lfloor\underline{r-1}\,\lfloor\underline{n-r}} + \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r-1}\,(n-r+1)\lfloor\underline{n-r}}$ $\qquad \because \lfloor\underline{r} = r\lfloor\underline{r-1}$ এবং $\lfloor\underline{n-r+1} = (n-r+1)\lfloor\underline{n-r}$

$= \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r-1}\,\lfloor\underline{n-r}}\left\{\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{n-r+1}\right\}$

$= \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r-1}\,\lfloor\underline{n-r}} \times \dfrac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}$

$= \dfrac{(n+1)\lfloor\underline{n}}{r\lfloor\underline{r-1}\,(n-r+1)\lfloor\underline{n-r}}$

$= \dfrac{\lfloor\underline{n+1}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{n-r+1}}$ $\qquad \because \lfloor\underline{n+1} = (n+1)\lfloor\underline{n}$

$= {}^{n+1}C_r =$ ডানপক্ষ

উদাহরণ-1 ঃ যদি $^nC_6 = {}^nC_8$ হয়, তবে $^nC_{10}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে, $^nC_6 = {}^nC_8$

বা, $^nC_{n-6} = {}^nC_8$ $[\therefore\ {}^nC_6 = {}^nC_{n-6}\ ]$

$\therefore\ n-6 = 8$ or $n = 14$

$\therefore\ {}^nC_{10} = {}^{14}C_{10} = \dfrac{\lfloor\underline{14}}{\lfloor\underline{10}\,\lfloor\underline{14-10}} = 1001$

উদাহরণ-**2** ঃ 14 টি বাহুবিশিষ্ট একটি সামতলিকে ক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দুর সংযোগ রেখা দ্বারা কতগুলো ত্রিভুজ গঠন করা যাবে? এই ক্ষেত্রে সামতিলক ক্ষেত্রের কতগুলো কর্ণ হবে?

সমাধানঃ (i) 14 বাহু বিশিষ্ট সামতলিক ক্ষেত্রটির 14 টি বিন্দু আছে। সুতরাং 14 টি বিন্দুর যে কোন তিনটি বিন্দুর সংযোগ রেখার সাহায্যে গঠিত ত্রিভুজের সংখ্যা, $^{14}C_3 = \dfrac{\lfloor 14}{\lfloor 3 \lfloor 14-3} = \dfrac{14.13.12}{3.2.1} = 364$

(ii) আবার 14 টি বিন্দুর যে কোন দুইটি বিন্দু সংযোগ করে গঠিত সরলরেখায় সংখ্যা হবে
$^{14}C_2 = \dfrac{\lfloor 14}{\lfloor 2 \lfloor 12} = \dfrac{14.13}{2} = 91$ টি। এর মধ্যে 14 টি বাহু কর্ণ নয়। সুতরাং নির্ণেয় কর্ণের সংখ্যা =91–14=77 টি।

উদাহরণ-3 ঃ একটি প্রশ্নের দুইটি গ্রুপে 5 টি করে মোট 10 টি প্রশ্ন আছে। একজন পরীক্ষার্থীকে মোট 6 টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হইবে এই শর্তে যে সে কোন গ্রুপ থেকেই 4 টি প্রশ্নের বেশি উত্তর দিতে পারবে না। সে কতভাবে প্রশ্নগুলো বাছাই করতে পারে।

সমাধান ঃ একজন পরীক্ষার্থী নিম্নভাবে প্রশ্নগুলো বাছাই করতে পারেন -

	A-group 5 টি প্রশ্ন	B–group (5 টি প্রশ্ন)
(i)	4	2
(ii)	3	3
(iii)	2	4

(i) নং এর ক্ষেত্রে বাছাই সংখ্যা $= {}^5C_4 \times {}^5C_2 = \dfrac{\lfloor 5}{\lfloor 4 \lfloor 1} \times \dfrac{\lfloor 5}{\lfloor 2 \lfloor 3} = 5 \times \dfrac{5.4}{2} = 50$

(ii) " " " $= {}^5C_3 \times {}^5C_3 = \dfrac{5.4.3}{6} \times 5.2 = 100$

(iii) " " " $= {}^5C_2 \times {}^5C_4 = 10 \times 5 = 50$

মোট বাছাই সংখ্যা = 50+100+50 = 200

উদাহরণ-4 ঃ 3 টি শূন্য পদের জন্য 12 জন প্রার্থী আছে। একজন ভোটার 3 টির বেশী ভোট দিতে পারবেন না। তিনি কত প্রকারে ভোট দিতে পারবেন?

সমাধান ঃ মনে করুন, ভোটার 12 জন প্রার্থীর মধ্যে 1 জনকে বা 2 জনকে বা 3 জনকে ভোট দিতে পারেন। সুতরাং নির্ণেয় ভোট দেয়ার উপায়-

$$= {}^{12}C_1 + {}^{12}C_2 + {}^{12}C_3$$
$$= 12 + \frac{12.11}{2} + \frac{12.11.10}{6}$$
$$= 12 + 66 + 220 = 298$$

উদাহরণ-5 ঃ 3 জন মহিলা সহ 9 জনের মধ্যে হতে 5 জনের একটি কমিটি কত রকমে গঠন করা যায় যাতে অন্ততঃ পক্ষে একজন মহিলা থাকবে?

সমাধান ঃ আমরা নিম্নলিখিতভাবে কমিটি গঠন করতে পারি-

	মহিলা (3 জন)	অন্যান্য (6 জন)
(i)	1	4
(ii)	2	3
(iii)	3	2

(i) নং এর ক্ষেত্রে বাছাই সংখ্যা $= {}^3C_1 \times {}^6C_4 = 3 \times \dfrac{\lfloor 6}{\lfloor 4 \lfloor 2} = 3 \times \dfrac{6.5}{2} = 45$

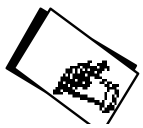
(ii) " " " $= {}^3C_2 \times {}^6C_3 = \dfrac{\lfloor 3}{\lfloor 2 \lfloor 1} \times \dfrac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \lfloor 3} = 3 \times \dfrac{6.5.4}{6} = 60$

(iii) " " " $= {}^3C_3 \times {}^6C_2 = 1 \times \dfrac{6.5}{2} = 15$

মোট কমিটির সংখ্যা = 45+60+15 = 120

অনুশীলন করুন

1. 6 জন ভদ্রলোক ও 4 জন মহিলা সমন্বয়ে গঠিত একটি পরিষদ থেকে 5 জন ভদ্রলোক ও 2 জন ভদ্র মহিলা সমন্বয়ে একটি কমিটি কত রকমে গঠন করা যেতে পারে?
2. ভিন্ন ভিন্ন 10 টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 5 টি স্বরবর্ণ হতে প্রতিবারে 3 টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2 টি স্বরবর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যায়?
3. সাতটি সরল রেখায় দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 1´´, 2´´, 3´´, 4´´, 5´´, 6´´, 7´´। তাদের দ্বারা কতগুলো চতুর্ভুজ গঠন করা যাবে নির্ণয় করুন।
4. এক ব্যক্তির 6 জন বন্ধু আছে। তিনি কতভাবে এক বা একাধিক বন্ধুকে একটি ডিনারে দাওয়াত করতে পারেন?
5. প্রমাণ করুন ঃ ${}^{n}C_{r} = {}^{n-2}C_{r} + 2.{}^{n-2}C_{r-1} + {}^{n-2}C_{r-2}$.



অনুশীলনী-৬.২

1. একটি 10 ভুজের কৌণিক বিন্দুগুলোর সংযোগ রেখার সাহায্যে কতগুলো ত্রিভুজ গঠন করা যাবে নির্ণয় করুন।
2. 7 জন বিজ্ঞান ও 5 জন মানবিক বিভাগের ছাত্র থেকে 6 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে। বিজ্ঞানের ছাত্রদেরকে সংখ্যা গরিষ্ঠতা দিয়ে কত প্রকারে কমিটি গঠন করা যাবে নির্ণয় করুন।
3. 'America' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে প্রত্যেকবার 3 টি বর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যায় নির্ণয় করুন।
4. দুইজন নির্দিষ্ট ব্যক্তিকে সর্বদা বর্জন করে 10 জন ব্যক্তির মধ্য থেকে 5 জনকে কত প্রকারে বাছাই করা যায় নির্ণয় করুন।
5. 14 খেলোয়াড়ের মধ্যে 5 জন বল করতে পারে এবং 2 জন উইকেট রক্ষা করতে পারে। অন্ততঃ একজন উইকেট রক্ষক ও তিনজন বলার নিয়ে কত প্রকারে 11 জনের একটি ক্রিকেট দল গঠন করা যায় নির্ণয় করুন।
6. একটি নৌকার নাবিক দলে 12 জন লোক আছে। তাদের মধ্যে 4 জন কেবল এক পাশে দাঁড় টানতে পারে এবং 4 জন কেবল অপর পাশে দাঁড় টানতে পারে। নৌকায় উভয় পাশে সমান সংখ্যক নাবিক দিয়ে তাদেরকে মোট কত প্রকার সাজানো যাবে নির্ণয় করুন।