ইউনিট ৮

ধারার যোগফল

ভূমিকা

গণিতে কতকগুলো সংখ্যা বা রাশিকে পরস্পর প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ... এভাবে সাজান হলে একটি অনুক্রম পাওয়া যায়। কোন অনুক্রমের পদগুলিকে পর পর '+' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করলে একটি ধারা পাওয়া যায়। বিভিন্ন নিয়মানুসারে পদগুলো সাজানো হলে বিভিন্ন প্রকার ধারা পাওয়া যায়। এই ইউনিটে আরোহ পদ্ধতি ও অন্তর প্রক্রিয়ায় কিভাবে সমান্তর ধারা, গুণোত্তর ধারা, ও অন্যান্য ধারায় যোগফল নির্ণয় করা যাবে সে সম্পর্কে আপনাদের ধারণা দেওয়া হবে। তাছাড়া বিভিন্ন সূত্রের সাহায্যে ধারার যোগফল নির্ণয় করায় পদ্ধতি শিখানো হবে।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি

- *আরোহ পদ্ধতিতে বিভিন্ন ধারার সমষ্টির সূত্র প্রমাণ করার দক্ষতা অর্জন করবেন।*
- *অন্তর প্রক্রিয়ায় ধারার যোগফল নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।*
- *বিভিন্ন ধারার যোগফল নির্ণয় করতে পারবেন।*

পাঠ ১ আরোহ্ পদ্ধতিতে ধারার যোগফল

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- আরোহ পদ্ধতিতে ধারার যোগফল সূত্র প্রমাণ ও প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন।

অনুক্রম ও ধারায় বর্ণনা

যদি $u_1, u_2, u_3 \,.....\, u_n$ কে সংখ্যার একটি অনুক্রম ধরা হয়, তবে $u_1+u_2+u_3+ \text{- - - - - - - -} + u_n+\text{- - - -}$ কে বাস্তব সংখ্যার ধারা বলা হয়। এখানে u_n কে অসীম ধারার n তম পদ বলা হয়। যদি কোন ধারার পদসংখ্যা নির্দিষ্ট থাকে তাহলে তাকে সান্ত ধারা বলা হয়।

আরোহ পদ্ধতি (Method of Induction)

ইহা বীজগণিতের একটি মৌলিক স্বীকার্য। স্বীকার্যটি হল কোন ধারার n পদের যোগফল নির্ণয়ে প্রথমে $n=k$ ধরে ধারার যোগফলের সত্যতা অনুমান করা হবে। তারপর $n=k+1$ ধরেও সত্যতা প্রমাণ করা হবে। এইভাবে যদি $n=k$ এবং $n=k+1$ এর জন্য ধারার যোগফল সত্য হয় তবে n এর সকল ধনাত্মক অখন্ড মানের জন্য যোগফলের সূত্রটি প্রমাণিত হবে।

উদাহরণ-1 ঃ **আরোহ পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন** $S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$.

সমাধান ঃ সূত্রটি আরোহ পদ্ধতিতে প্রমাণ করার প্রক্রিয়া নিম্নরূপ ঃ

মনে করুন, $a+(a+d)+(a+2d) \text{ - - - - } \{a+(n-1)d\}$ একটি সমান্তর ধারা।

প্রথমে ধারাটি থেকে ২টি পদ নিলে ঐ ধারার সমষ্টি হবে

$$\begin{aligned} S_2 &= a+(a+d) \\ &= 2a+d \\ &= \frac{2}{2}\{2a+(2-1)d\} \end{aligned}$$

সুতরাং সূত্রটি $n=2$ এর জন্য সত্য হল। এখন সূত্রটি $n=k$ এর জন্য সত্য মনে করুন।

$$\therefore \;\; S_k = \frac{k}{2}\{2a+(k-1)d\} \text{ - - - - - (i)}$$

(i) নং এর সাথে $(k+1)$ তম পদ যোগ করুন।

$$\begin{aligned} \therefore \;\; S_{k+1} &= \frac{k}{2}\{2a+(k-1)d\} + \{a+(k+1-1)d\} \\ &= ka + \frac{k}{2}(k-1)\; d+a+kd \\ &= (k+1)a + kd\left(\frac{k-1}{2}+1\right) \\ &= (k+1)a + \frac{kd(k+1)}{2} \\ &= \frac{k+1}{2}\; [2a+\{(k+1)-1\}d] \text{ - - - - - (ii)} \end{aligned}$$

সুতরাং সূত্রটি $n=k+1$ এর জন্যও সত্য। যেহেতু সূত্রটি $n=2$ এর জন্য সত্য, সুতরাং $n=3$ এর জন্যও সত্য। অনুরূপভাবে অগ্রসর হয়ে বলা যায় যে, n সংখ্যক সকল পদের সমষ্টি $S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$.

উদাহরণ-2 ঃ **আরোহ পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন, $1.2+2.5+3.8+....+n(3n-1)=n^2(n+1)$.**

সমাধান ঃ মনে করুন, $1.2+2.5+3.8+\text{- - - - - - - -}+n(3n-1)=n^2(n+1) \text{ - - - - - - (i)}$

যদি ধারাটি $n=k$ এর জন্য সত্য হয় তাহলে-

তাহলে, $1.2+2.5+3.8+ ---- +k(3k-1)=k^2(k+1)$ --- (ii)

(ii) এর উভয় পক্ষে $(k+1)(3k+2)$ যোগ করুন।

$\therefore\ 1.2+2.5+3.8+ ----- + k(3k-1)+(k+1)(3k+2)$

$$= k^2(k+1)+(k+1)(3k+2)$$

$$= (k+1)(k^2+3k+2)$$

$$= (k+1)(k+1)(k+2)$$

$$= (k+1)^2(k+2) \text{ ---- (iii)}$$

অতএব ধারাটি $n=k+1$ এর জন্যও সত্য।

সুতরাং সকল স্বাভাবিক সংখ্যা n এর জন্য ধারাটি সত্য।

উদাহরণ-3 ঃ আরোহ পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন, $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

সমাধান ঃ মনে করুন প্রথম দুইটি পদের যোগফল

$$S_2=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=\frac{2}{2+1}$$

সুতরাং ধারাটি $n=2$ এর জন্য সত্য।

মনে করুন ধারাটি $n=k$ এর জন্যও সত্য।

$$\therefore\ S_k=\frac{k}{k+1} \text{ ------- (i)}$$

(i) এর সাথে $(k+1)$ তম পদ যোগ করুন।

$$S_{k+1}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

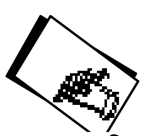
$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

$$=\frac{k+1}{(k+1)+1} \text{ ------ (ii)}$$

সুতরাং ধারাটি $n=k$ এর জন্য সত্য হলে $n=k+1$ এর জন্যও সত্য।

অতএব, যে কোন স্বাভাবিক সংখ্যা n এর জন্য ধারায় যোগফল সত্য।



অনুশীলনী-৮.১

আরোহ পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন ঃ

1. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+ ------ +\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

2. $1.2 + 2.3+3.4+ ----- +n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3. $1^3+3^3+5^3+ ------ + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

4. $1^2+3^2+5^2+ ---- + (2n-1)^2=\frac{n}{3}(4n^2-1)$.

পাঠ ২ অন্তর প্রক্রিয়ায় ধারার যোগফল

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- অন্তর প্রক্রিয়ায় ধারার যোগফল নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

অন্তর প্রক্রিয়ায় ধারার সমষ্টি নির্ণয় পদ্ধতি

মনে করুন $u_1+u_2+u_3+ - - - - +u_n$ একটি ধারা এবং S_n ধারার সমষ্টি। এ ধারার r তম পদ u_r কে v_r-v_{r-1} আকারে লিখে S_n এর মান নির্ণয় করা যায়। এভাবে ধারার সমষ্টি নির্ণয়ের পদ্ধতিকে অন্তর প্রক্রিয়া বলে।

যেমন, $u_r = v_r-v_{r-1}$ হলে,

$$u_1 = v_1-v_o,\ u_2 = v_2-v_1,\ u_3=v_3-v_2,\ - - - - - ,\ u_n=v_n-v_{n-1}.$$

$$\therefore\ S_n = u_1+u_2+u_3+ - - - - +u_n$$

$$= (v_1-v_o) + (v_2-v_1) + (v_3-v_2) + (v_n-v_{n-1})$$

$$= v_n-v_o.$$

অন্তর প্রক্রিয়ায় ধারার যোগফল নির্ণয়

উদাহরণ-1 ঃ যোগফল নির্ণয় করুন ঃ 1.2+2.3+3.4+ - - - -+n(n+1).

সমাধান ঃ মনে করুন ধারাটির যোগফল S_n.

এখন, প্রদত্ত ধারার r তম পদ,

$$u_r = r(r+1)$$

$$= \frac{1}{3}\ r(r+1)\ \{(r+2)-(r-1)\}.$$

$$= \frac{1}{3}\ r(r+1)(r+2) - \frac{1}{3}(r-1)\ r(r+1).$$

$$= v_r - v_{r-1}.$$

সুতরাং r=1, 2, 3 - - - - n বসিয়ে,

আমরা পাই, $u_1=v_1-v_o,\ u_2= v_2-v_1,\ - - - - - -\ u_n = v_n- v_{n-1}.$

$$\therefore\ S_n = u_1+u_2+ - - - - - - + u_n$$

$$= (v_1-v_o) + (v_2-v_1) + - - - - + (v_n-v_{n-1})$$

$$= v_n-v_o = \frac{1}{3}\ n\ (n+1)(n+2) - 0$$

$$= \frac{1}{3}\ n\ (n+1)(n+2).$$

$$\therefore\ S_n = \sum_{r=1}^{n} r\ (r+1) = \frac{1}{3}\ n\ (n+1)(n+2).$$

উদাহরণ-2 ঃ যোগফল নির্ণয় করুন ঃ
1.2.3+2.3.4+3.4.5+ - - - -+n (n+1)(n+2).

সমাধান ঃ মনে করুন ধারাটির যোগফল S_n.
এখন প্রদত্ত ধারার r তম পদ,

$$u_r = r(r+1)(r+2)$$
$$= \frac{1}{4}\ r\ (r+1)(r+2)\{(r+3)-(r-1)\}$$
$$= \frac{1}{4}\ r(r+)(r+2)(r+3) - \frac{1}{4}\ (r-1)\ r(r+1)(r+2).$$
$$= v_r - v_{r-1}.$$

এখন, r=1, 2, 3 - - - n বসিয়ে আমরা পাই,

$$S_n = (v_1-v_o) + (v_2-v_1)+(v_3-v_2) - - - -+(v_n-v_{n-1}).$$
$$= v_n - v_o = \frac{1}{4}\ (n)\ (n+1)(n+2)(n+3)\ - 0.$$
$$= \frac{1}{4}\ n(n+1)(n+2)(n+3).$$
$$\therefore\ S_n = \sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2) = \frac{1}{4}\ n(n+1)(n+2)(n+3).$$

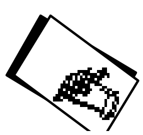
উদাহরণ-3 ঃ যোগফল নির্ণয় করুন ঃ

1.3.5+3.5.7+5.7.9+ - - - - - + (2n–1)(2n+1)(2n+3).

সমাধানঃ মনে করুন ধারাটির যোগফল S_n.

এখন প্রদত্ত ধারার r তম পদ,

$$u_r = (2r-1)(2r+1)(2r+3)$$
$$= \frac{1}{8}\ (2r-1)(2r+1)(2r+3)\ \{\ (2r+5) - (2r-3)\ \}$$
$$= \frac{1}{8}\ \{(2r-1)(2r+1)(2r+3)(2r+5) - (2r-3)(2r-1)(2r+1)(2r+3)\}.$$
$$= \frac{1}{8}\ (v_r - v_{r-1})\ .$$
$$\therefore\ S_n = \sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{1}{8}\ (v_n - v_o)$$
$$= \frac{1}{8}\ \{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5) - (-1)(1)(3)(5)\}$$
$$= \frac{1}{8}\ (2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5) + \frac{15}{8}\ .$$



অনুশীলনী-৮.২

যোগফল নির্ণয় করুন ঃ

1. 2.5.8+5.8.11+8.11.14+ - - - - - - - n পদ পর্যন্ত।
2. 1.2.3.4+2.3.4.5 +3.4.5.6+ - - - - - n পদ পর্যন্ত।
3. 1.2.4+2.3.5+3.4.6+ - - - - - - n পদ পর্যন্ত।

পাঠ ৩ বিভিন্ন ধারার যোগফল নির্ণয়

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বিভিন্ন ধারার যোগফল নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

বিভিন্ন ধারায় যোগফল নির্ণয় পদ্ধতি

a) সমান্তর ধারার সমষ্টি ঃ

মনে করুন একটি সমান্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর d , পদ সংখ্যা n এবং শেষ পদ l .

$\therefore$ যোগফল, $S_n = a+(a+d)+(a+2d)+ - - - - (l-d)+l- - - - -$ (i)

আবার পদগুলোকে উল্টাভাবে সাজালে দাড়ায়,

$$S_n = l+(l-d) + - - - - - + (a+d) + a - -- - - - - - \quad \text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) যোগ করে পাওয়া যায়,

$2S_n = (a+l) + (a+l) + - - - - n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

$\therefore \; S_n = \frac{1}{2}\, n\,(a+l) = \frac{1}{2} n \,\{a+a+(n-1)d\,\}$ $\quad \because$ শেষ পদ $l = a+(n-1)d.$

$$= \frac{n}{2}\;\{2a+(n-1)d\}.$$

অনুসিদ্ধান্ত 1 ঃ প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল, $1+2+3+- - - - - +n = \frac{n(n+1)}{2}$

অনুসিদ্ধান্ত 2 ঃ প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি,

$$1^2+2^2+3^2+ - - - +n^2 = \frac{1}{6}\; n(n+1)(2n+1).$$

অনুসিদ্ধান্ত 3 ঃ প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি,

$$1^3+2^3+3^3+ - - - + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

b) গুণোত্তর ধারার সমষ্টি ঃ

মনে করুন একটি গুণোত্তর ধারায় প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r এবং পদ সংখ্যা n, সুতরাং যোগফল, $S_n = a+ar+ar^2+- - - - - +ar^{n-1} - - - - - - -$ (i)

(i) নং কে r দ্বারা গুণ করে পাওয়া যায়, $rS_n = ar+ar^2+ - - - - - +ar^{n-1}+a^n - - - -$ (ii)

(ii) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে,

$$rS_n - S_n = (ar+ar^2+- - - - - +ar^n) - (a+ar+ar^2+- - - - -+ ar^{n-1})$$

বা, $(r-1)\, S_n = a(r^n-1)$

$\therefore \; S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ যখন $r>1$

আবার, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ যখন $r<1$.

অনুসিদ্ধান্ত−1 ঃ গুণোত্তর ধারায় পদসংখ্যা অসীম হলে, $S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$.

উদাহরণ 1 ঃ 6+66+666+- - - - - ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করুন,

$S = 6+66+666+ \cdots + n$ সংখ্যক পদ

$= 6(1+11+111+ \cdots n$ সংখ্যক পদ)।

বা, $\frac{S}{6} = 1+11+111+ \cdots n$ সংখ্যক পদ।

বা, $\frac{9S}{6} = 9+99+999+ \cdots n$ সংখ্যক পদ। [উভয় পক্ষকে 9 দ্বারা গুণ করে]

$= (10-1) + (100-1) + (1000-1) + \cdots n$ সংখ্যক পদ

$= (10+10^2+10^3+ \cdots +10^n) - (1+1+ \cdots +n$ সংখ্যক পদ)

$$= 10.\frac{10^n-1}{10-1} - n$$

$$= \frac{10}{9}(10^n-1) - n$$

$$\therefore\ S = \frac{60}{81}(10^n-1) - \frac{6}{9}\ n.$$

উদাহরণ 2 ঃ যোগফল নির্ণয় করুন ঃ 1.4+2.5+3.6+- - - - - - +$n(n+3)$

সমাধান ঃ মনে করুন, ধারার যোগফল

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} r(r+3)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (r^2+3r) = \sum_{r=1}^{n} r^2 + 3\sum_{r=1}^{n} r$$

$$= \frac{1}{6}\ n\ (n+1)(2n+1) + 3.\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{6}\ n(n+1)\{(2n+1)+9\}.$$

$$= \frac{1}{6}\ n(n+1)(2n+10)$$

$$= \frac{1}{3}\ n(n+1)(n+5).$$

উদাহরণ 3 ঃ যোগফল নির্ণয় করুন ঃ $1.2^2+2.3^2+3.4^2+ \cdots n$ পদ পর্যন্ত।

সমাধান ঃ মনে করুন, $u_r = r(r+1)^2$

$= r(r^2+2r+1)$

$= r^3+2r^2+r.$

$$\therefore\ S_n = \sum_{r=1}^{n} (r^3+2r^2+r) = \sum_{r=1}^{n} r^3 + 2\sum_{r=1}^{n} r^2 + \sum_{r=1}^{n} r$$

$$= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 + 2.\frac{1}{6}\ n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}\ n(n+1)$$

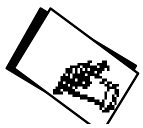
$$= \frac{1}{2}\, n(n+1)\left\{\frac{1}{2}\, n(n+1) + \frac{2}{3}\,(2n+1)+1\right\}.$$

$$= \frac{1}{2}\, n(n+1)\,.\,\frac{\{3n(n+1)+4(2n+1)+6\}}{6}$$

$$= \frac{1}{12}\, n(n+1)\,\left\{3n^2+3n+8n+4+6\right\}$$

$$= \frac{1}{12}\, n(n+1)(3n^2+11n+10)$$

$$= \frac{1}{12}\, n(n+1)(n+2)(3n+5).$$



অনুশীলনী-৮.৩

যোগফল নির্ণয় করুন

1. $1.5.9+2.6.10+3.7.11+\text{- - - - -}\ n$ পদ পর্যন্ত।
2. $2.4.6^2 + 4.6.8^2 + 6.8.10^2 +\text{- - - -}\ n$ পদ পর্যন্ত।
3. $\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \text{- - - - -}n$ পদ পর্যন্ত।
4. $\frac{1}{1.3} + \frac{2}{1.3.5} + \frac{3}{1.3.5.7} + \text{- - - - - - -}\ n$ পদ পর্যন্ত।
5. $1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \text{- - - - - - -}\ n$ পদ পর্যন্ত।
6. $1+\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \text{- - - - - -}$
7. $\frac{4}{7} - \frac{5}{7^2} + \frac{4}{7^3} - \frac{5}{7^4} + \frac{4}{7^5} - \frac{5}{7^6} + \text{- - - - - - -}$