ইউনিট ৯

স্থানাংক

ভূমিকা

প্রায় দু'হাজার বছর আগে প্রাচীন গ্রীকরা প্রথম গণিতের জ্যামিতি শাখাটি নিয়ে গবেষণা শুরু করেন। কিন্তু এর অনেক পর বর্তমান জ্যামিতির আত্মপ্রকাশ। আর এর পেছনে যার অবদান তিনি হলেন একজন ফরাসী গণিতবিদ। নাম রেনে দেকার্ত (Rene Descartes : ১৫৯৬-১৬৫০). তিনি দানিউব নদীর তীরে বসে মাথায় চিন্তা আনেন বীজগণিতকে কিভাবে জ্যামিতিতে প্রয়োগ করা যায়। তিনি গণিতের এই নব দিগন্তের সফলতাও আনেন। তিনি এর নাম দেন Analytical Geometry বা কার্তেসীয় বা স্থানাংক জ্যামিতি। কার্তেসীয় শব্দটি তাঁর নামানুসারে।

উদ্দেশ্য ঃ

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- *স্থানাংক সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন;*
- *কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক সম্পর্কে ধারণা লাভ এবং তা প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন;*
- *দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন;*
- *কোন রেখাংশকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্তি করতে পারবেন;*
- *ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে তা প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন;*
- *সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয়ের দক্ষতা অর্জন করবেন।*

পাঠ ১ স্থানাংকের ধারণা ও প্রয়োগ

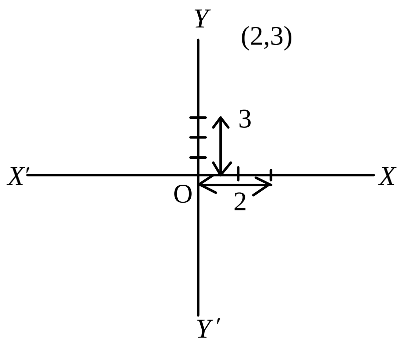
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

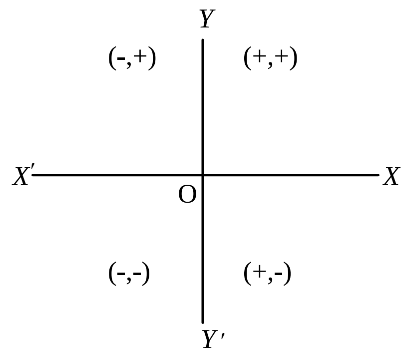
- স্থানাংক সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন।

একটি সমতলে অনুভূমিক বরাবর একটি সরলরেখা এবং তার উপর আর একটি লম্ব সরলরেখা অঙ্কন করলে অনুভূমিক রেখাকে x-অক্ষ, তার উপর লম্বরেখাকে y-অক্ষ এবং তাদের ছেদবিন্দুর নাম মূলবিন্দু (origin) বলা হয়। মুলবিন্দুকে সাধারণতঃ O দিয়ে নির্দেশ করা হয়।

x-অক্ষ ও y অক্ষকে বাস্তব সংখার সেট R এবং xy সমতলটি IR×IR ক্রমজোড় (ordered pair)-এর সেট দিয়ে প্রকাশ করা হয়।



চিত্র-১



চিত্র-২

চিত্রে $X'OX$ অনুভূমিকরেখা ও $Y'OY$ উল্লম্বরেখা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। $X'OX$ ও $Y'OY$ কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y- অক্ষ এবং তাদের ছেদ বিন্দু O-কে মুলবিন্দু ধরা হয়। কোন বিন্দু প্রতিস্থাপন করতে গেলে x- অক্ষ ও y- অক্ষকে সমান অনুপাতের এককে বিভক্ত করা হয়। চিত্রে (2,3) বিন্দুটি বসানো হয়েছে।

$X'OX$ ও $Y'OY$ রেখাদ্বয় সমতলটিকে ৪টি ভাগে ভাগ করেছে। প্রতিটি ভাগকে একটি চতুর্ভাগ (quadrant) বলে। মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে OX বরাবর x-এর ধনাত্মক ও OX' বরাবর x এর ঋণাত্মক মান ধরা হয়। অনুরূপভাবে OY বরাবর y-এর ধনাত্মক ও OY'- বরাবর y-এর ঋণাত্মক মান বসানো হয়। সুতরাং প্রথম চতুর্ভাগে x ও y-এর ধনাত্মক মান, ২য় চতুর্ভাগে x-এর ঋণাত্মক ও y-এর ধনাত্মক মান, ৩য় চতুর্ভাগে x ও y-এর ঋণাত্মক মান এবং ৪র্থ চতুর্ভাগে x- ধনাত্মক ও y-এর ঋণাত্মক মান বসবে। উপরের চিহ্নের আলোচনাকে ছক আকারে মনে রাখা যেতে পারে।

প্রথম চতুর্ভাগ	দ্বিতীয় চতুর্ভাগ	তৃতীয় চতুর্ভাগ	চতুর্থ চতুর্ভাগ
(+, +)	(–, +)	(–, –)	(+, –)

পাঠ ২ কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক

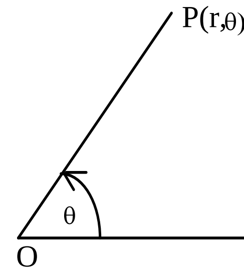
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন এবং তা প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

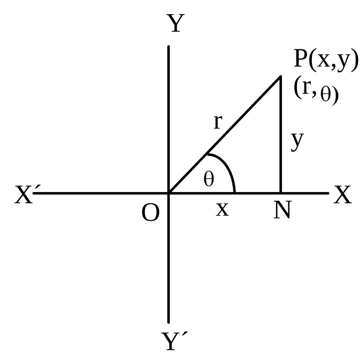
পোলার স্থানাংক (r, θ)

মনে করুন, একটি সমতলে O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং OX একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। ধরুন, রেখাটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP=\theta$ কোণ উৎপন্ন করে। যদি $OP=r$ হয়, তবে (r,θ) কে পোলারের স্থানাংক বলে। এখানে, O কে মেরু (pole) এবং OX কে মেরুরেখা বলা হয়।



কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংকের মধ্যে সম্পর্ক

আমরা $X'OX$ ও $Y'OY$ অক্ষদ্বয় দ্বারা সৃষ্ট সমতলে $P(x,y)$ বিন্দুটি স্থাপন করি। ধরুন তার পোলার স্থানাংক (r, θ) যেখানে $OP=r$, $\angle POX=\theta$.



সমকোণী ত্রিভুজ OPN থেকে আমরা পাই,

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta \text{ - - - - - } (1)$$

এবং $\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta \text{ - - - - } (2)$

(2) কে (1) নং দ্বারা ভাগ করে $\frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \tan\theta$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

আবার, (1) ও (2) নং এর বর্গের যোগফল নিয়ে $x^2+y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$.

$$\Rightarrow r^2 = x^2+y^2$$

$$\therefore r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

উদাহরণ-1 ঃ কোন বিন্দুর পোলার স্থানাংক $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ হলে, তার কার্তেসীয় স্থানাংক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ আপনারা জানেন-

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

কিন্তু এক্ষেত্রে, $r=4,\ \theta=\frac{\pi}{6}$

$\therefore\quad x = 4\cos\frac{\pi}{6}\ ,\ y = 4\sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow\quad x = 4.\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ y = 4.\frac{1}{2}$

$\therefore\quad x = 2\sqrt{3}\ ,\quad y=2.$

$\therefore$ উক্ত বিন্দুটি কার্তেসীয় স্থানাংক $(2\sqrt{3}\ , 2)$.

উদাহরণ-2 ঃ $(1, \sqrt{3}\,)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ আপনারা জানেন, $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ এবং $r = \sqrt{x^2+y^2}$

এক্ষেত্রে, $y = \sqrt{3}\ ,\ x = 1.$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1}\ ,\ r = \sqrt{1^2+(\sqrt{3}^2)}$

$\Rightarrow\ \theta = \tan^{-1}\tan\frac{\pi}{3}\ ,\ r = \sqrt{4} = 2.$

$\therefore\quad \theta = \frac{\pi}{3},\quad r = 2.$

$\therefore$ বিন্দুটির পোলার স্থানাংক $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

উদাহরণ-3 ঃ একটি বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাংক $(-1, -1)$ এর পোলার স্থানাংক নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ বিন্দুটির পোলার স্থাংনাক (r, θ) হলে, আপনারা জানেন $r = \sqrt{x^2+y^2}$ এবং $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

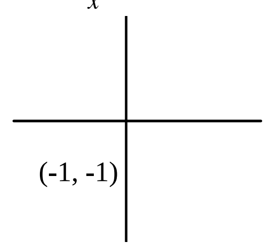
এখানে $x = r\cos\theta = -1,\qquad y = r\sin\theta = -1$

অতএব $r = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$.

$x = -1$ ও $y = -1$ বিধায় $(-1, -1)$ বিন্দুটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore\ \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

অতএব নির্ণেয় পোলার স্থানাংক $\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$



উদাহরণ-4 ঃ $r\cos2\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ সম্পর্ককে কার্তেসীয় স্থানাংক পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।

সমাধান ঃ $r\cos2\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

বা, $r^2\cos2\theta = 2r\sin^2\frac{\theta}{2}$

বা, $r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$

বা, $(r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 = r(1-\cos\theta)$ $\left[\because\ 2\sin^2\frac{\theta}{2} = (1-\cos\theta)\right.$

বা, $x^2 - y^2 = r - x$

বা, $x^2 - y^2 + x = r$

বা, $x^2 - y^2 + x = \sqrt{x^2+y^2}$

বা, $(x^2-y^2+x)^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$

$\therefore\ (x^2+x-y^2)^2 = x^2+y^2$

উদাহরণ-5 ঃ $x^2 - y^2 = a^2$ কে পোলার স্থানাংক পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।

সমাধানঃ $x^2 - y^2 = a^2$

বা, $r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = a^2$ $\quad [\because x = r\cos\theta, y = r\sin\theta]$

বা, $r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = a^2$

$\therefore \quad r^2\cos2\theta = a^2$ $\quad [\because \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos2\theta]$

উদাহরণ-6 ঃ একটি বিন্দুর পোলার স্থানাংক (2, 330) তার কার্তেসীয় স্থানাংক নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ মনে করুন বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাংক (x, y).

আপনারা জানেন, $x = r\cos\theta$, $\quad y = r\sin\theta$

অতএব $x = 2\cos330$ $\quad y = 2\sin330$

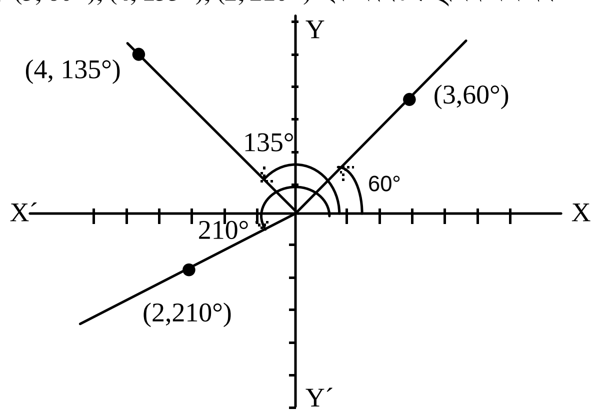
$\Rightarrow x = 2\cos(270 + 60)$ $\quad y = 2\sin(270 + 60)$

$= 2\sin60$ $\quad = -2\cos60$

$= 2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ $\quad = -2.\frac{1}{2} = -1$

অতএব বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাংক $(\sqrt{3}, -1)$.

উদাহরণ-7 ঃ পোলার স্থানাঙ্ক (3, 60), (4, 135), (2, 210) ছক কাগজে স্থাপন করুন।



অনুশীলনী-৯.১

1. (2, 5), (3, 0), (–3, 4), (5,–1), (–5, –4), (–3, 0), (0, 5) (0, –6) বিন্দুগুলি ছক কাগজের উপর স্থাপন করুন।
2. $\left(2, \frac{\pi}{3}\right), \left(3, \frac{\pi}{4}\right), \left(1, -\frac{\pi}{6}\right)$ স্থানাংকগুলি ছক কাগজে স্থাপন করুন।
3. কার্তেসীয় স্থানাংকের প্রদত্ত বিন্দগুলি পোলার স্থানাংকে প্রকাশ করুন।
   (i) $(\sqrt{3}, -1)$, (ii) $(-\sqrt{3}, 1)$, (iii) (1,0)
4. পোলার স্থানাংকের প্রদত্ত বিন্দুগুলি কার্তেসীয় স্থানাংকে প্রকাশ করুন।
   (i) $\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$, (ii) $\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$ (iii) $\left(5, -\frac{\pi}{4}\right)$, (iv) $\left(-2, \frac{\pi}{3}\right)$
5. নিম্নোক্ত সম্পর্কগুলিকে কাতেসীয় স্থানাংক পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।
   (i) $r = 6$, (ii) $\theta = \frac{\pi}{6}$ (iii) $r^2 = a^2\cos^2\theta$, (iv) $r = 2a\sin\theta$,
6. নিম্নোক্ত সম্পর্কগুলিকে পোলার স্থানাংক পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।
   (i) $x^2 + y^2 = 2ax$ (ii) $y = x\log x$, (iii) $y^2 = 4a(a-x)$, (iv) $xy = 3^2$,

পাঠ ৩ দূরত্ব নির্ণয় সূত্র

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

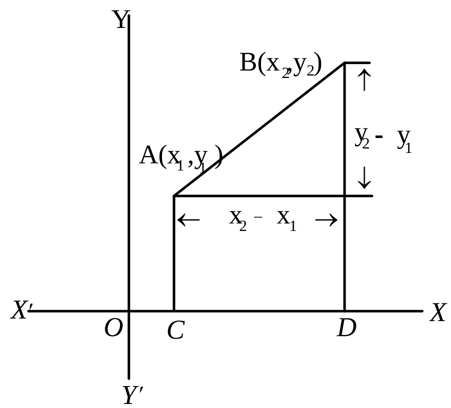
- দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব (Distance between two points):

যে কোন সমতলে $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ দুইটি বিন্দু নিন। x–অক্ষের উপর AC ও BD লম্বদ্বয় অঙ্কন করুন। $AN \perp BD$ অঙ্কন করুন।

চিত্র থেকে $OC = x_1, CA = y_1$

$OD = x_2, BD = y_2$



$ACDN$ আয়তক্ষেত্র বলে,

$CA = DN = y_1$

$CD = AN.$

$\therefore \quad AN = CD = OD - OC$

$\therefore \quad AN = x_2 - x_1$ - - - - - - - (1)

এবং $\quad BN = BD - DN$

$\Rightarrow BN = y_2 - y_1$ - - - - - (2)

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ABN থেকে আমরা পাই,

$AB^2 = AN^2 + BN^2$

$\Rightarrow AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ [(1) ও (2)- এর সাহায্যে]

$\therefore \; AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

অর্থাৎ

দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(\text{ভূজদ্বয়ের অন্তর})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর})^2}$

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

উদাহরণ-1 ঃ (2, 5) ও (6, 10) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ (2, 5) ও (6, 10) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$= \sqrt{(2-6)^2 + (5-10)^2}$ [এখানে ভূজদ্বয় 2, 6 এবং কোটিদ্বয় 5, 10]

$= \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2}$

$= \sqrt{16+25}$

$= \sqrt{41}$. একক।

উদাহরণ- 2ঃ x-অক্ষ ও $(-7, -9)$ হতে $(2, k)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে k-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করুন x– অক্ষ হতে $(2, k)$ বিন্দুর দূরত্ব $= k$

$(-7, -9)$ হতে $(2, k)$ এর দূরত্ব $= \sqrt{(-7-2)^2 + (-9-k)^2}$

$= \sqrt{(-9)^2 + (-9-k)^2}$

$$= \sqrt{(-9)^2+(-9)^2+2(-9)(-k)+(-k)^2}$$
$$= \sqrt{81+81+18k+k^2}$$
$$= \sqrt{162+18k+k^2}$$

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $k = \sqrt{162+18k+k^2}$

বা, $k^2 = 162 + 18k + k^2$

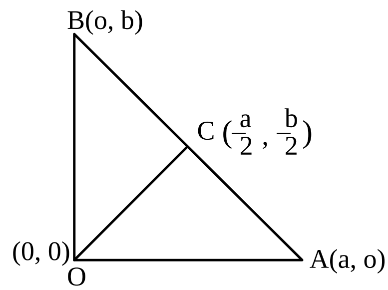
বা, $18k = -162$

$\therefore \quad k = \frac{-162}{18} = -9$

অতএব, k এর মান, $k = -9$.

উদাহরণ-3 ঃ বিশ্লেষণী প্রমাণের সাহায্যে প্রমান করুন যে, কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু হতে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো সমান দূরত্বে অবস্থিত।

সমাধান ঃ



মনে করুন AOB সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু ত্রয়ের স্থানাংক $O\ (o,o)$, $A(a,\ o)$ ও $B(o,\ b)$. যেহেতু AOB একটি সমকোণী ত্রিভুজ অতএব $AB^2 = OA^2 + OB^2 = a^2+b^2$

বা, $AB = \sqrt{a^2+b^2}$

C, যদি AB এর মধ্যবিন্দু হয় তবে $CA = CB = \frac{1}{2}\ AB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

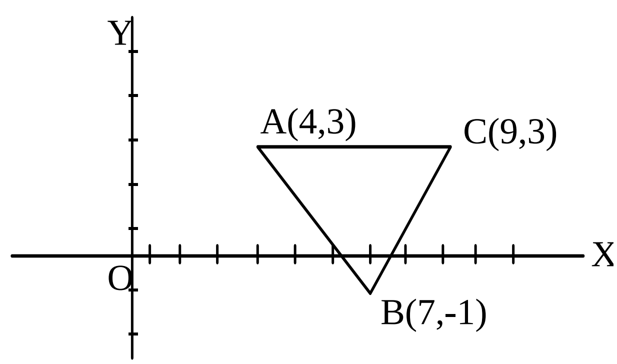
আবার $CO^2 = \left(\frac{a}{2}-o\right)^2 + \left(\frac{b}{2}-o\right)^2 = \frac{1}{4}\,(a^2+b^2)$

$\Rightarrow\ CO = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$

অতএব $CA = CB = CO$.

উদাহরণ-4 ঃ প্রমাণ কর (4, 3), (7, –1) এবং (9, 3) বিন্দুত্রয় একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

সমাধান ঃ



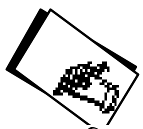
মনে করুন A, B, C বিন্দুত্রয় যথাক্রমে (4, 3), (7, –1) এবং (9, 3) আমরা জানি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান।

অতএব দূরত্বের সূত্রের সাহায্যে

$$AB = \sqrt{(4-7)^2 + (3+1)^2} \quad = \sqrt{9+16} \ = 5$$
$$BC = \sqrt{(7-9)^2 + (-1-3)^2} \quad = \sqrt{4+16} \ = \sqrt{20} \ = 2\sqrt{5}$$
$$AC = \sqrt{(9-4)^2 + (3-3)^2} \quad = \sqrt{25} \ = 5.$$

যেহেতু AB ও AC সমান। অতএব ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।



অনুশীলনী-৯.২

1. মূলবিন্দু হতে নিম্নোক্ত বিন্দুগুলির দূরত্ব নির্ণয় করুনঃ
   (i) (3,4), (ii) $(a+b, a-b)$, (iii) $(a\cos\theta, a\sin\theta)$, (iv) $(at^2, 2at)$

2. নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয়ের সরলরৈখিক দূরত্ব নির্ণয় করুনঃ
   (i) (3, 7) এবং (11,–1), (ii) $(\sqrt{2}, o)$ এবং $(0, \sqrt{7})$, (iii) $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ এবং $(\alpha\cos\beta, \alpha\sin\beta)$ (iv) (a, b) এবং (b, a).

3. দেখান যে, বিন্দুত্রয় $(a, 0)$, $(0, b)$ এবং (1, 1) সমরেখ হবে, যদি $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ হয়।

4. দেখান যে, $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, $\left(\lambda a, \frac{1-\lambda}{b}\right)$ এবং $\left(\frac{1-\lambda}{a}, \lambda b\right)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ।

5. একটি বিন্দু (1, 1), (2, 3) ও (–2, 2) বিন্দুত্রয় থেকে সমদূরবর্তী। বিন্দুটির স্থানাংক কত?

6. প্রমাণ করুন যে, (4, 3), (6, 4), (5, 6) এবং (3, 5) বিন্দু চারটি একটি বর্গক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দু।

7. দেখান যে, (a, a), $(-a, -a)$ এবং $(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ বিন্দুত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

8. একটি বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাংক (2, –3) এবং (–3, 7)। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

9. একটি বিন্দুর কোটি তার ভূজের দ্বিগুণ, যদি তার দূরত্ব (4, 3) বিন্দু থেকে $\sqrt{10}$ একক হয়, তবে বিন্দুটির স্থানাংক বাহির করুন।

10. কোন বিন্দুর কোটি 3 এবং বিন্দুটির দূরত্ব (5, 3) থেকে 4 একক হলে, বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় করুন।

পাঠ ৪ অনুপাত সূত্র

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- কোন রেখাংশকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত করতে পারবেন।

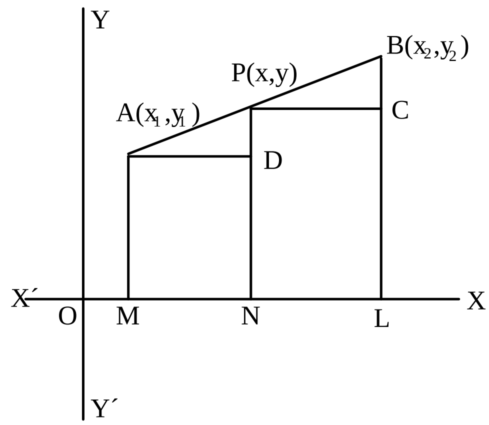
বিভাগীয় সূত্র ঃ

(i) অন্তর্বিভাগীয় সূত্র ঃ

মনে করুন, $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখা $P(x,y)$ বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। P বিন্দুটির স্থানাংক নির্ণয় করতে হবে। দেয়া আছে, $AP : PB = m_1 : m_2$

$\Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$,

এখন, x–অক্ষের উপর AM, PN ও BL লম্ব টানুন। আবার, $AD \perp PN$, $PC \perp BL$ অঙ্কন করুন।



$\therefore \quad AM = DN = y_1, \ PN = CL = y_2$

$\therefore \quad PD = PN - DN = y - y_1$

এবং $\quad BC = BL - CL = y_2 - y$

আবার, $OM = x_1$, $ON = x$, $OL = x_2$

$\therefore \ MN = AD = ON - OM = x - x_1$

এবং $\quad NL = PC = OL - ON = x_2 - x$.

ΔAPD ও ΔPBC সদৃশ্য বলে, $\frac{AP}{PB} = \frac{AD}{PC}$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

$$\Rightarrow m_2x - m_2x_1 = m_1x_2 - m_1x.$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)x = m_1x_2 + m_2x_1$$

$$\therefore \ x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$$

আবার, একই শর্ত সাপেক্ষে $\frac{AP}{PB} = \frac{PD}{BC}$.

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$$\Rightarrow m_2y - m_2y_1 = m_1y_2 - m_1y.$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)y = m_1y_2 + m_2y_1.$$

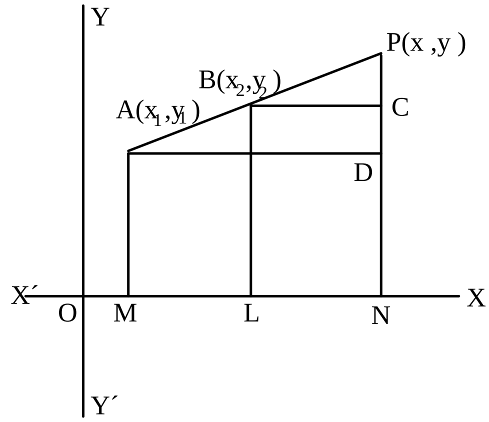
$$\therefore \ y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

অন্তর্বিভাগীয় সূত্র ঃ $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$, $y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$

(ii) বহির্বিভক্তির সূত্র ঃ

মনে করুন, $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখাটি $P(x,y)$ বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত হয়। অর্থাৎ $AP : PB = m_1 : m_2$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$$



এখন, x- অক্ষের উপর AM, BL, PN লম্ব অঙ্কন করুন।
আবার, $AD \perp PN$, $BC \perp PN$ অঙ্কন করুন।

$\therefore$ $AM = DN = y_1$

$BL = CN = y_2$

$\therefore$ $PD = PN - DN = y - y_1$

$PC = DN - BL = y - y_2$

আবার, $OM = x_1$, $OL = x_2$, $ON = x$

$\therefore$ $AD = MN = ON - OM = x - x_1$

এবং $BC = LN = ON - OL = x - x_2$

$\therefore$ ΔAPD ও ΔBPC সদৃশ, আমরা পাই,

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AD}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2}$$

$$\Rightarrow m_1x - m_1x_2 = m_2x - m_2x_1$$

$$\Rightarrow (m_1 - m_2)x = m_1x_2 - m_2x_1.$$

$$\therefore x = \frac{m_1x_2 - m_2x}{m_1 - m_2}$$

আবার, একই শর্তসাপেক্ষে

$$\frac{AP}{PB} = \frac{PD}{PC}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2}$$

$$\Rightarrow m_1y - m_1y_2 = m_2y - m_2y_1$$

$$\Rightarrow (m_1 - m_2)y = m_1y_2 - m_2y_1$$

$$\therefore y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$$

বহির্বিভাগীয় সূত্র ঃ $x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}$, $y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ অন্তর্বিভক্তির ক্ষেত্রে, $m_1 = m_2$ হলে, $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$
অর্থাৎ দুটি বিন্দুর মধ্যবিন্দুর স্থানাংক।

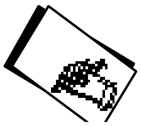
1.	অন্তর্বিভক্ত বিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$
2.	বহির্বিভক্ত বিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$
3.	উভয় বিভক্তি অনুপাত বের করার সময় k:1 ধরতে হবে।

উদাহরণ-1ঃ (1, 2) ও (6, 7) বিন্দু দুটির সংযোগ রেখাকে (3, 4) বিন্দুটি যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তা নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ মনে করুন, (1, 2) ও (6, 7) বিন্দু দুটির সংযোগ রেখাটি (3, 4) বিন্দুতে k :1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। সুতরাং বিভক্ত বিন্দুর ভূজ

$$3 = \frac{k.6 + 1.1}{k + 1}$$

$\Rightarrow\ 3k+3 = 6k+1$
$\Rightarrow\ 3k = 2$
$\Rightarrow\ \dfrac{k}{1} = \dfrac{2}{3}$
i.e. $k : 1 = 2 : 3$
$\therefore$ প্রয়োজনীয় অনুপাত $= 2 : 3$.



অনুশীলনী-৯.৩

1. নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার মধ্যবিন্দু নির্ণয় করুন।
   (a) $(0, -5)$ এবং $(6, 8)$, (b) $(20, 10)$ এবং $(10, 20)$, (c) $(2a-x, 1)$ এবং $(x, -5)$, (d) $(x+y, x-y)$ এবং $(x-y, x+y)$.
2. $(1, 3)$ ও $(2, 7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখাটি যে বিন্দুতে $3:-4$ অনুপাতে বিভক্ত হয়, তা নির্ণয় করুন।
3. $(-1, 2)$ ও $(4, -5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখাটি $2:3$ অনুপাতে যে বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত হয়, তা নির্ণয় করুন।
4. দেখান যে, $(2, -2)$ ও $(-1, 4)$ বিন্দুর সংযোগরেখাকে অক্ষরেখা দুটি সমান তিনভাগে বিভক্ত করে।
5. $(-8, 13)$ এবং $(12, -2)$ প্রান্তবিন্দু বিশিষ্ট সরলরেখাকে $(5, 5)$ বিন্দুটি যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, তাহা নির্ণয় করুন।
6. একটি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র $(2, 2)$। তার দুইটি শীর্ষবিন্দু $(1,2)$ ও $(3,1)$ হলে, তৃতীয়টি বাহির করুন।
7. $A(-1,5)$, $B(3,1)$ ও $C(5,7)$ বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুর সমন্বয়ে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
8. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে, বিশ্লেষণী প্রমাণ দ্বারা দেখান যে, $AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$

পাঠ ৫ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

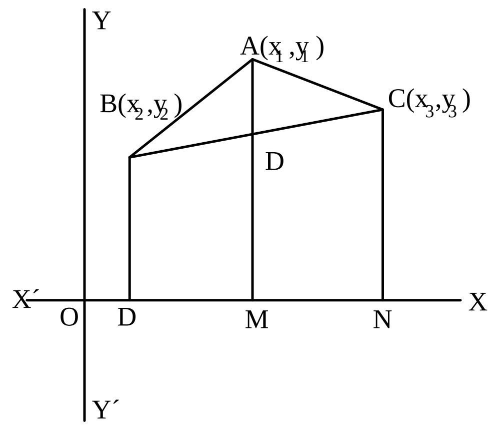
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে তা প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন।

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a triangle)

মনে করুন, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় $A(x_1, y_1)$, $B(x_2,y_2)$ ও $C(x_3,y_3)$, x- অক্ষের উপর BD, AM, CN লম্ব আঁকি।



$OD = x_2$, $OM = x_1$, $ON = x_3$

$\therefore\ DM = OM - OD = x_1 - x_2$

$MN = ON - OM = x_3 - x_1$

$DN = ON - OD = x_3 - x_2$

আবার, $BD = y_2$, $MA = y_1$, $CN = y_3$.

ট্রাপিজিয়াম $BDMA$- এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের ক্ষেত্রফল) * উচ্চতা

$$= \frac{1}{2}(BD + AM).DM$$

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2)$$

অনুরূপভাবে, ট্রাপিজিয়াম $AMNC$- এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(AM + CN).MN$

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)$$

এবং ট্রাপিজিয়াম $BDNC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(BD + NC).DN$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$\therefore\ \Delta ABC$- এর ক্ষেত্রফল = (ট্রাপিজিয়াম $BDMA$-এর ক্ষেত্রেফল+ট্রাপিজিয়ম $AMNC$ এর ক্ষেত্রফল)- ট্রাপিজিয়ম $BDNC$– এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}[\,x_1(y_1 + y_2 - y_1 - y_3) - x_2(y_1 + y_2 - y_2 - y_3) + x_3(y_1 + y_3 - y_2 - y_3)$$

$$\Delta = \frac{1}{2}[\,x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2) \text{ ----------(*)}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ - - - - - - - (1)}$$

(*) থেকে $\Delta = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2)$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \text{ ———————— } (2)$$

শিখন ফল ঃ

(*) ও (2) নং-এর তুলনায় (1) নং সূত্র ব্যবহার করা সুবিধাজনক।

ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{or} \quad \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

উদাহরণ-1 ঃ **একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি যথাক্রমে $A\left(a, \frac{1}{a}\right)$, $B\left(b, \frac{1}{b}\right)$, $C\left(c, \frac{1}{c}\right)$ দেখান যে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{2abc}$**

সমাধানঃ ক্ষেত্রফল $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & \frac{1}{a} & 1 \\ b & \frac{1}{b} & 1 \\ c & \frac{1}{c} & 1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a-b & \frac{1}{a}-\frac{1}{b} & 0 \\ b-c & \frac{1}{b}-\frac{1}{c} & 0 \\ c & \frac{1}{c} & 1 \end{vmatrix}$$

১ম সারি থেকে ২য় সারি

এবং ২য় সারি ৩য় সারি বিয়োগ করে।

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a-b & \frac{b-a}{ab} \\ b-c & \frac{c-b}{bc} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a-b & -\frac{a-b}{ab} \\ b-c & -\frac{b-c}{bc} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{ab} \\ 1 & -\frac{1}{bc} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2b}(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{a} \\ 1 & -\frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2b}(a-b)(b-c)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)$$

$$= \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2abc}$$ বর্গ একক।

উদাহরণ-2 ঃ দেখান যে, $(-1, 3)$, $(2, 9)$ ও $(-3, -1)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ।

সমাধান ঃ তিনটি বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

সমাধানঃ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ [১ম থেকে ২য় এবং ২য় থেকে ৩য় সারি বিয়োগ করে।]

$= \frac{1}{2}(-30+30)$

$= 0.$

যেহেতু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য অতএব বিন্দুগুলি সমরেখ।

শিখন ফল

(x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে, যদি তাদের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হয়। i.e.

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ হয়।

উদাহরণ-3 ঃ যদি (x, y) $(1,2)$ ও $(2,1)$ বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $x+y = 21$

সমাধানঃ আমরা পাই, ক্ষেত্রফল = 9 বর্গ একক।

$\Rightarrow \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9$ [১ম থেকে ২য় এবং ২য় থেকে ৩য় সারি বিয়োগ করে।]

$\Rightarrow (x-1)+y-2 = 18$

$\Rightarrow x+y = 21.$

উদাহরণ-4ঃ $A(1,2)$, $B(7,2)$ ও $C(9, 5)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বাহির করুন এবং B বিন্দু থেকে AC বাহুর উপর লম্বদূরত্ব বাহির করুন।

সমাধান ঃ $A(1,2)$, $B(7,2)$ ও $C(9, 5)$ বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

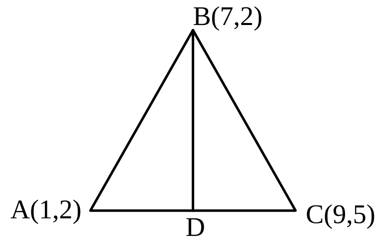
$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ [১ম থেকে ২য় সারি বিয়োগ করে।]

$$= \frac{1}{2} \times -6\ (2-5)$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9 \text{ বর্গ একক।}$$

এখন, $AC = \sqrt{(1-9)^2+(2-5)^2}$

$= \sqrt{64+9} \quad = \sqrt{73}$ একক।



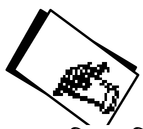
মনে করুন, B বিন্দু থেকে AC–এর লম্ব BD.

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= 9$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ .\ AC.\ BD = 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ .\ \sqrt{73}\ .BD = 9$$

$$\therefore \quad BD = \frac{9\times 2}{\sqrt{73}} = 2.11 \text{ একক।}$$



অনুশীলনী-৯.৪

1. নিম্নের বিন্দুগুলির দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
   (i) (3, 0), (8, 0) ও (7, 3)
   (ii) (2,3), (0, 3) ও (2, –3)
   (iii) (–3,–2), (1, 4) ও (2, 3)

2. দেখান যে, নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি সমরেখ।
   (i) $(8a, 0), (0, 8b), (a, 2b)$
   (ii) $(a\cos\theta, b\sin\theta), (0, 0), (-a\cos\theta, -b\sin\theta)$
   (iii) $\left(a, \frac{1}{bc}\right), \left(b, \frac{1}{ca}\right), \left(c, \frac{1}{ab}\right)$

3. h এর কোন মানের জন্য $(-1, 2), (2, -1)$ এবং $(h, 3)$ বিন্দুগুলির সমরেখ?

4. A, B, C বিন্দু তিনটির স্থানাংক যথাক্রমে $(6, 3), (-3, 5), (4, -2)$ এবং P বিন্দু স্থানাংক (x,y) হলে, দেখান যে, $\frac{\Delta PBC}{\Delta ABC} = \frac{x+y-2}{7}$

5. $(a, 2-a), (1-a, 2a)$ ও $(-4-a, 6-2a)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে, a– এর মান নির্ণয় করুন।

6. ABC ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ বিন্দু হলো $A(3,4)$, $BC(-4, 3)$ এবং $C(8, 6)$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন এবং A হতে BC বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

7. (1,1), (8, 4), (5,–2) ও (4, –7) চারটি শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

8. ΔABC–এর শীর্ষবিন্দু A,B,C– এর স্থানাংক যথাক্রমে $(3, 5), (-3, 3)$ ও $(-1, -1)$ এবং D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB এর মধ্যবিন্দু। ΔABC ও ΔDEF এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় এবং দেখান যে, $\Delta ABC = 4\Delta DEF$.

পাঠ ৬ সঞ্চারপথ ও তার সমীকরণ নির্ণয়

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সঞ্চারপথ কি তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- অক্ষরেখার সমান্তরাল অপসারণ করতে পারবেন;
- সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

সঞ্চারপথের সংজ্ঞা ঃ

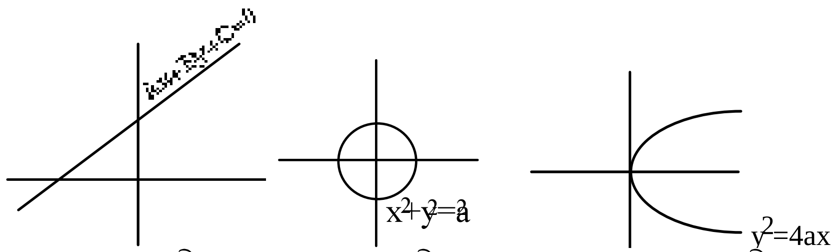
কোন সমতলে এক বা একাধিক শর্ত পূরণ করে কোন চলমান বিন্দু যে পথ রচনা করে, তাকে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ (locus) বলে।

উদাহরণস্বরূপ

(ক) কোন সমতলে কোন চলমান বিন্দু যদি গতি পরিবর্তন না করে একটি নির্দিষ্ট দিকে চলে, তাকে আমরা সরলরেখা বলি।

(খ) কোন সমতলে কোন চলমান বিন্দু যদি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে নির্দিষ্ট দূরত্ব বজায় রেখে চলে, তাকে আমরা বৃত্ত বলে।

এভাবে বিভিন্ন শর্ত সাপেক্ষে আমরা বিভিন্ন বিন্দুর সঞ্চারপথ যেমন পরাবৃত্ত, অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত ইত্যাদি পাব। এসব বিভিন্ন বক্ররেখার সমীকরণ x ও y এর সাথে সম্পর্কযুক্ত। যেমন ঃ



১. সরলরেখার সমীকরণ ২. বৃত্তের সমীকরণ ৩. পরাবৃত্তের সমীকরণ।

সংজ্ঞা ঃ

যদি কোন বিন্দুগুচ্ছ কোন সরলরেখা, সমতল বা শূন্যে এক বা একাধিক শর্ত মেনে কোন সরলরেখা বা বক্ররেখার সৃষ্টি করে তাকেই ঐ বিন্দুগুচ্ছের সঞ্চার পথ বলে।

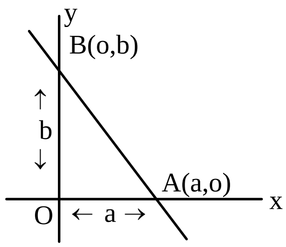
উচ্চ মাধ্যমিক শ্রেণীর জ্যামিতিটা স্থানাংক নির্ভরশীল। কার্তেশীয় পদ্ধতিতে চলমান বিন্দুর স্থানাংক সাধারণতঃ (x,y) ও (x, y, z) ধরা হয়, কারণ x, y, z পরিবর্তনশীল স্থানাংকের প্রতীক চিহ্ন হিসেবে সর্বজন স্বীকৃত। যেহেতু স্থানাংকের মাধ্যমে ও প্রয়োজনে অঙ্কনের সাহায্যে সঞ্চারপথ গুলো দেখাতে হবে, সেহেতু প্রতিটি বক্ররেখা বা সরলরেখা বিভিন্ন গাণিতিক শর্তে (x, y) সম্বলিত এক-এক রকম বীজগণিতীয় সমীকরণ হবে।

অর্থাৎ সঞ্চার পথের সংজ্ঞা বা শর্ত হতে চলমান বিন্দুর স্থানাংকদ্বয়ের মধ্যে একটি গাণিতিক সম্পর্ক অর্থাৎ সমীকরণ পাওয়া যায়; বিপরীতক্রমে সমীকরণ হতে এর সঞ্চারপথ পাওয়া যায়।

উদাহরণ স্বরূপ ঃ

1. **(i) গাণিতিক শর্তঃ** $(a, 0)$ ও $(0, b)$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখা মূলবিন্দু হতে ধনাত্মক দিকে a ও b বিন্দুতে x– অক্ষ ও y– অক্ষকে ছেদ করবে।

(ii) বীজগণিতীয় সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

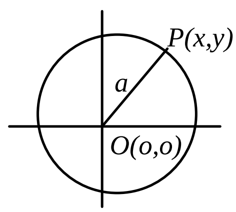


সরলরেখা : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

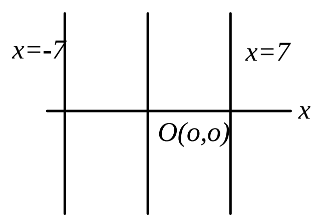
2. **(i) গাণিতিক শর্তঃ** মূলবিন্দু $(0,0)$ হতে সমান দূরবর্তী বিন্দুগুচ্ছ সমষ্টি

(ii) বীজগণিতিক সমীকরণঃ $x^2+y^2=a^2$

(iii)



উদাহরণঃ একটি বিন্দু এরূপভাবে গতিশীল যে $y-$ অক্ষ হতে এর দূরত্ব সর্বদাই 7 একক। বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।



মনে করুন গতিশীল বিন্দুটির স্থানাংক (x, y), y- অক্ষ হতে দূরত্বের সংখ্যামান হল। x।

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $|x|=7$

$\Rightarrow x=\pm 7$

$\therefore x=7$ এবং $x=-7$ এরাই বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ।

উদাহরণঃ একটি বিন্দু এরূপভাবে চলে যে, মূলবিন্দু এবং $(0, 8)$ বিন্দু হতে এর দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত 1ঃ3 হয়। বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তরঃ মনে করুন চলমান বিন্দুটি $P(x, y)$

মূলবিন্দু হতে P এর দূরত্ব $=\sqrt{x^2+y^2}$ এবং $(0, 8)$ বিন্দু হতে P এর দূরত্ব $=\sqrt{x^2+(y-8)^2}$

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\sqrt{x^2+y^2}$ ঃ $\sqrt{x^2+y-8^2}=1$ঃ 3

বা, $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+(y-8)^2}}=\dfrac{1}{3}$

বা, $\dfrac{x^2+y^2}{x^2+(y-8)^2}=\dfrac{1}{9}$ [বর্গ করে]

বা, $x^2+y^2+2y-8=0$

$\therefore x^2+(y+1)^2=3^2$, নির্ণেয় সঞ্চার পথের সমীকরণ।

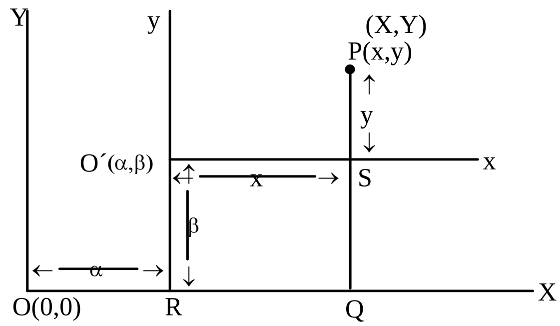
সুতরাং যে কোন সঞ্চারপথের উপর সব বিন্দুর স্থানাংকই তার সমীকরণকে সিদ্ধ করে, পক্ষান্তরে যে সব বিন্দুর স্থানাংক সমীকরণকে সিদ্ধ করে, তাদের প্রত্যেকটি ঐ সমীকরণ বিশিষ্ট সঞ্চারপথটির উপর অবস্থিত।

অতএব সরলরেখা এবং বৃত্তের পরিধি, অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত প্রভৃতি বক্ররেখাও সঞ্চারপথ।

মনে রাখার বিষয় ঃ

(i)	সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয়ে চলমান বিন্দুর স্থানাংক সাধারণতঃ (x, y) ধরা হয়।
(ii)	শুধুমাত্র সঞ্চারপথের উপর যে কোন বিন্দুর স্থানাংক ঐ সঞ্চারপথটির সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

❒ **অক্ষরেখার সমান্তরাল অপসারণ (*P*arallel Translation of *Ax*es):** (অক্ষের দিক পরিবর্তন না করে, এদের সমান্ত রাল অপসারণ সম্পর্কিত)



মনে করুন আমাদের আদি অক্ষরেখাদ্বয় OX ও OY এবং মূলবিন্দু O। এখন প্রথম চতুর্ভাগে O' একটি বিন্দু ধরুন যার স্থানাংক (α,β)। এই O' রেখা ভেদ করে আদি X- অক্ষ ও Y- অক্ষ এর সমান্তরাল করে $O'x$ ও $O'y$নতুন অক্ষরেখা টানা হলো।

এখন আদি অক্ষরেখাদ্বয় X, Y ও মূলবিন্দু $O\ (0, 0)$ প্রেক্ষিতে নতুন অক্ষরেখা x ও y এবং মূলবিন্দু $O'\ (\alpha,\beta)$ পাওয়া গেল।

প্রথম চতুর্ভাগে P একটি বিন্দু নেয়া হলো যার স্থানাংক (x, y), $xO'y$ এর প্রেক্ষিতে এবং (X, Y), XOY এর প্রেক্ষিতে।

এখন (x,y) ও (X,Y) এর মধ্যে সম্পর্ক জানতে হবে। P বিন্দু হতে OX -অক্ষের উপর PQ ও O' বিন্দু হতে OX অক্ষের উপর $O'R$ এর উপর লম্ব টানা হলো। PQ, $O'x$ অক্ষকে S বিন্দুতে ছেদ করে।

অতএব $OQ=X$, $PQ=\text{Y}$, $O'S=x$, $PS=\text{y}$

এখন চিত্র হতে,

$$OQ = OR + RQ$$

$$X = OR + O'S$$

$$\therefore\ X = \alpha + x$$

আবার, $PQ = PS+QS = PS + O'R$

$$Y = y + \beta$$

মনে রাখার বিষয় ঃ

1.	$X = \alpha + x$
	$Y = \beta + y$
2.	$x = X - \alpha$
	$y = Y - \beta$

নোটঃ আলোচ্য অনুচ্ছেদটি উচ্চ-মাধ্যমিক জ্যামিতির সিলেবাস বহির্ভূত কিন্তু কণিক অধ্যায়টির কিছু সংখ্যক সমস্যা সমাধানের সুবিধার্থে আলোচিত হলো।

উদাহরণ-1 ঃ $P(-2,0)$, $Q(2,0)$ ও $R(6,8)$ বিন্দুগুচ্ছো দেওয়া আছে। একটি সেট এমনভাবে গঠন করা হয়েছে যে এর যে কোন বিন্দু S এর জন্য $PS^2+QS^2=2RS^2$. সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

উত্তরঃ সঞ্চারপথের সংজ্ঞা অনুযায়ী এখানে দেওয়া আছে।

(i) P, Q, R বিন্দুগুচ্ছো

(ii) গাণিতিক শর্ত, $PS^2+QS^2=2RS^2$

মনে করুন, S এর স্থানাংক (x,y) তাহলে আমরা লিখতে পারি,

$PS^2 = (x+2)^2+(y-0)^2 = x^2+4x+4+y^2$

$QS^2 = (x-2)^2+(y-0)^2 = x^2-4x+4+y^2$

$RS^2 = (x-6)^2+(y-8)^2 = x^2-12x+36+y^2-16y+64$

প্রদত্ত শর্তানুযায়ী, $PS^2+QS^2 = 2RS^2$
বা, $x^2+4x+4+y^2+x^2-4x+4+y^2 = 2(x^2-12x+36+y^2-16y+64)$
বা, $2x^2+2y^2+8 = 2x^2-24x+72+2y^2-32y+128$
বা, $24x+32y-192 = 0$
বা, $3x+4y-24 = 0$

অতএব নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ $3x+4y-24 = 0$.

উদাহরণ-2 ঃ $M\left(t-\frac{1}{t}, t+\frac{1}{t}\right)$ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

উত্তর ঃ এখানে M এর স্থানাংকের ভূজ $x = t-\frac{1}{t}$

$\Rightarrow x^2 = t^2+\frac{1}{t^2} - 2$ - - - - - - - - - (i)

M এর স্থানাংকের কোটি $y = t+\frac{1}{t}$

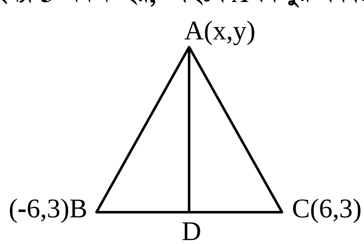
$\Rightarrow y^2 = t^2+\frac{1}{t^2} + 2$ - - - - - - - (ii)

এখন (ii) নং হতে (i) নং বিয়োগ করে পাই- $y^2-x^2 = t^2+\frac{1}{t^2} + 2 - t^2 - \frac{1}{t^2} + 2$

অর্থাৎ $y^2-x^2 = 4$

অতএব নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ $y^2-x^2 = 4$.

উদাহরণ-3 ঃ $A(x,y)$, $B(-6,-3)$ এবং $C(6,3)$ বিন্দুগুলো একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়। BC বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য যদি একটি স্থির সংখ্যা 3 একক হয়, তাহলে A বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।



সমাধান ঃ যেহেতু D, BC এর মধ্যবিন্দু, অতএব D এর স্থানাংক $D= (0,0)$

প্রশ্নানুসারে $AD = 3 = \sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow 9 = x^2+y^2$

$\therefore$ A বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $x^2+y^2 = 9$

অনুশীলনী-৯.৫

1. একটি বিন্দু এমনভাবে চলে যে উহা (2,3) ও (4,5) বিন্দু থেকে সর্বদা সমদূরবর্তী। বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

2. একটি বিন্দু এমনভাবে চলে যেন $y-$ অক্ষ থেকে এবং (1,1) বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী। বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

3. কোন বিন্দুর x অক্ষ থেকে দূরত্ব, তার (1,1) বিন্দু থেকে দূরত্বের দ্বিগুণ। বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

4. $A(2,3)$ এবং $B(-1,4)$ দুটি স্থির বিন্দু। P একটি চলমান বিন্দু যা সর্বদা $PA:PB=2:3$ মেনে চলে। তার সঞ্চারপথ নির্ণয় করুন।

5. $D(x,y)$, $E(-6,-3)$ এবং $F(6,3)$ একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু, D বিন্দু এমনভাবে চলমান যে, EF বাহুর মধ্যবিন্দু থেকে উক্ত বিন্দুর দূরত্ব সর্বদা 5 একক। D বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

6. একটি বিন্দু এমনভাবে চলনশীল যে, y–অক্ষ থেকে তার দূরত্ব সর্বদা 7 একক। বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

7. একটি বিন্দু এমনভাবে চলমান যে, (1,0) এবং (–1,0) বিন্দুদ্বয় থেকে এর দূরত্বের সমষ্টি সর্বদা 2 একক হয়। বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় করুন।

এক নজরে এই ইউনিটের সংক্ষিপ্ত বিষয়বস্তু ঃ

1. মূল বিন্দুর স্থানাংক (0,0)
2. x– অক্ষের উপর যে কোন বিন্দুর কোটি শূন্য এবং y– অক্ষের উপর যে কোন বিন্দুর ভুজ শূন্য।
3. y– অক্ষ হতে (x_1, y_1) বিন্দুর দূরত্ব $=x_1$ এবং x- অক্ষ হতে (x_1,y_1) বিন্দুর দূরত্ব $=y_1$
4. কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংকের মধ্যে সম্পর্ক হলো

   $x = r\cos\theta$

   $y = r\sin\theta$

   এবং $r = \sqrt{x^2+y^2}$

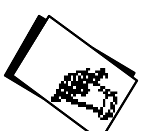
   $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$
5. (x_1, y_1) এবং (x_2,y_2) প্রান্তদ্বয় বিশিষ্ট সরলরেখা $m_1 : m_2$ অনুপাতে বিভক্ত হলে ঃ

   অন্তর্বিভাগ বিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$ এবং বহির্বিভাগ বিন্দুর স্থানাংক

   $\left(\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}\right)$
6. (x_1,y_1) এবং (x_2,y_2) প্রান্তদ্বয় বিশিষ্ট সরলরেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$
7. (x_1, y_1), (x_2,y_2) ও (x_3,y_3) বিন্দুত্রয়কে শীর্ষবিন্দু ধরে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

   $=\frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]$

   এবং শীর্ষ বিন্দুত্রয়ের একটি মূলবিন্দু হলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$
8. তিনটি সমরেখ বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু ধরে কল্পিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য।
9. এক বা একাধিক শর্তাধীনে বা সংজ্ঞানুসারে চলমান বিন্দুর পথই সঞ্চারপথ।
10. নির্দিষ্ট সংজ্ঞা বা শর্তই সঞ্চারপথটির সমীকরণ।



উত্তরমালা

অনুশীলনী-৯.১

3. (i) $\left(2, \frac{11\square}{3}\right)$, (ii) $\left(2, \frac{5\square}{6}\right)$, (iii) (1, 0)

4. (i) $(3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ (ii) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (iii) $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ (iv) $(-1, -\sqrt{3})$.

5. (i) $x^2+y^2 = 36.$ (ii) $x = \sqrt{3}\,y.$

   (iii) $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ (iv) $x^2+y^2 = 2ay$

6. (i) $r = 2a\cos\theta$ (ii) $r\cos\theta = e^{\tan\theta}$

   (iii) $r(1\pm\cos\theta) = \pm 2a$ (iv) $r^2\sin 2\theta = 18.$

অনুশীলনী-৯.২

1. (i) 5 একক, (ii) $\sqrt{2(a^2+b^2)}$ একক, (iii) a একক (iv) $at\sqrt{t^2+4}$ একক।
2. (i) $8\sqrt{2}$, (ii) 3 (iii) $2a\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, (iv) $(a-b)\sqrt{2}$.
5. $\left(-\frac{1}{14}, \frac{39}{14}\right)$
8. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.
9. (3, 6) অথবা (1, 2).
10. 9 অথবা 1.

অনুশীলনী-৯.৩

1. (a) $(3, \frac{3}{2})$, (b) (15, 15), (c) (a, –2), (d) (x, y).
2. (–2, –9).
3. $\left(1, -\frac{4}{5}\right)$; (–11, 6).
5. 13:5.
6. (2,3)
7. 40 বর্গ একক।

অনুশীলনী-৯.৪

1. (i) $\frac{15}{2}$ বর্গ একক।
   (ii) 6 বর্গ একক।
   (iii) 5 বর্গ একক।
8. 14 বর্গ একক, $\frac{7}{2}$ বর্গ একক।

অনুশীলনী-৯.৫

1. $x+y = 7$.
2. $y^2=2x-4y+5=0$
4. $5(x^2+y^2)-44x-22y+49=0$
5. $x^2+y^2=25$
6. $x+7=0$.