ইউনিট ১০

সরলরেখা

ভূমিকা

স্কুল পর্যায়ে ইউক্লিডিয়ান জ্যামিতি পড়ানো হয়েছে। জ্যামিতিতে সরলরেখা শুধু অঙ্কনের মাধ্যমে সংজ্ঞা দেয়া হয়েছে। এখন আমরা এই শ্রেণীতে (x,y) স্থানাংকের মাধ্যমে বিভিন্ন শর্ত সাপেক্ষে সরলরেখার নানা রকম বীজগণিতীয় সমীকরণ পেয়ে থাকি।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- *সরলরেখার ঢাল (slope) সম্পর্কে বর্ণনা করতে পারবেন,*
- *সরলরেখার প্রমিত সমীকরণ সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন,*
- *দুটি সরলরেখার ছেদবিন্দু নির্ণয় করতে পারবেন,*
- *দুইটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করতে পারবেন,*
- *রেখা সমূহ সমান্তরাল ও লম্ব হওয়ার শর্ত নির্ণয় করতে পারবেন,*
- *তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হওয়ার শর্ত নির্ণয় করতে পারবেন,*
- *রেখা হতে বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করতে পারবেন।*

পাঠ ১ ঢাল নির্ণয়

উদ্দেশ্য

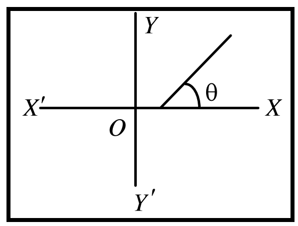
এই পাঠ শেষে আপনি-

- সরলরেখার ঢাল বা নতি বর্ণনা করতে পারবেন এবং তা প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

ঢাল=tanθ

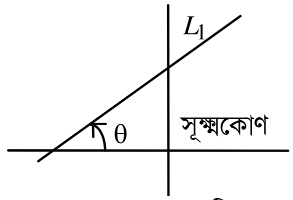
ঢাল বা নতি (Slope or Gradient) ঃ কোন একটি সরলরেখা ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে ঘুরে x- অক্ষের সাথে যে কোন উৎপন্ন করে, তাকে সরলরেখার নতি বলে। আর কোণের ট্যানজেন্টকে ঢাল (slope) বলে।

যদি একটি সরলরেখা x- অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে, θ হলো রেখাটির নতি এবং $\tan\theta$ হলো, সরলরেখাটির ঢাল। ইহাকে সাধারণতঃ m দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ $m = \tan\theta$.

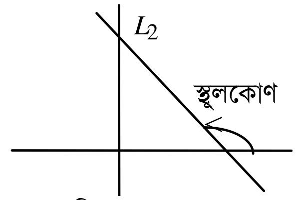


ঢালের চিহ্ন

১নং চিত্রে, L_1 সরলরেখাটি x- অক্ষের সাথে ধনাত্মকদিকে সূক্ষ্মকোণ করে আছে। এক্ষেত্রে ঢাল = $\tan\theta$ যা ধনাত্মক হবে।
২নং চিত্রে, L_2 সরলরেখাটি x- অক্ষের সাথে ধনাত্মক দিকে স্থূলকোণ করে আছে। এক্ষেত্রে, ঢাল = $-\tan\theta$ যা ঋণাত্মক।



১নং চিত্র



২নং চিত্র

ঢাল নির্ণয়

$$\text{ঢাল} = \frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভূজদ্বয়ের অন্তর}}$$

মনে করুন, AB একটি সরলরেখা যা x- অক্ষের সাথে θ কোণে নত এবং দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু $P(x_1,y_1)$ ও $Q(x_2,y_2)$ দিয়ে অতিক্রম করে।

x- অক্ষের উপর PN ও QL লম্ব আঁকুন। আবার $PM \perp QL$ টানুন।

$\therefore\ ON = x_1,\ OL = x_2$

$\therefore\ NL = PM = x_2 - x_1$

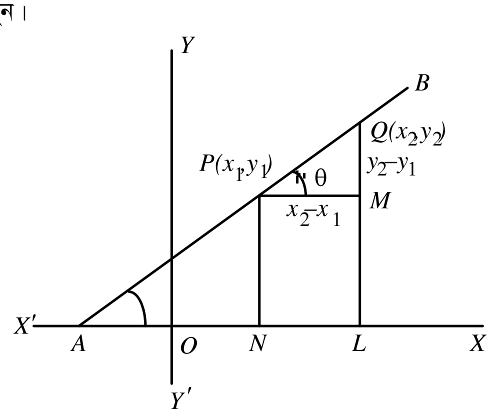
এবং $PN = ML = y_1,\ QL = y_2$

$\therefore\ BM = y_2 - y_1$

$\therefore\ \Delta PQM$ থেকে আমরা পাই,

$$\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ . \qquad \text{i.e. } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{i.e. ঢাল} = \frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভূজদ্বয়ের অন্তর}}$$



মনে রাখার বিষয়
১. দুটি সরলরেখার ঢাল সমান হলে, রেখাদ্বয় সমান্তরাল হয়।
২. দুটি সরলরেখার ঢালদ্বয়ের গুণফল -1 হলে, রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হয়।

উদাহরণ 1ঃ (1, 5) ও (3, –3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগরেখার ঢাল নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ রেখাটির ঢাল, $m = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{-3-5}{3-1} = \dfrac{-8}{2} = -4.$

উদাহরণ-2 ঃ (10,15) ও (12, 17) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল এবং x- অক্ষের সাথে রেখাটির নতি বাহির করুন।

সমাধান ঃ রেখাটির ঢাল, $m = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

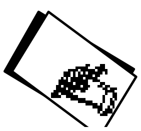
$$\Rightarrow m = \frac{17-15}{12-10} = \frac{2}{2} = 1.$$

ধরি, রেখাটির নতি θ। আমরা পাই,

$$m = \tan\theta = 1$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$



অনুশীলনী-১০.১

1. নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার ঢাল নির্ণয় করুন।
   (i) (0,0), (1, 3)
   (ii) (5,4), (2,3)
   (iii) (h,k), (0,0)
   (iv) $(ak^2, 2ak)$, $(ah^2, 2ah)$
2. x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে (a) 45°, (b) 135°, (c) 0° এবং (d) 90° কোণে আনত সরলরেখার ঢাল নির্ণয় করুন।
3. দেখান যে, $A(0, -1)$ ও $B(1,1)$ এবং $C(1,5)$ ও $D(-1,1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল।
4. দেখান যে, $A(3,3)$, $B(-3,1)$ এবং $C(-1,-1)$, $D(1,-7)$ বিন্দুদ্বয় দ্বারা গঠিত সরলরেখাদ্বয় AB ও CD পরস্পর লম্ব।
5. (x,y) ও $(2,-1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল -4 হলে, দেখান যে, $4x+y-9=0$.
6. $A(-2,-4)$ এবং $B(1,5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার ঢাল নির্ণয় করুন।

পাঠ ২ সরলরেখার প্রমিত সমীকরণ সমূহ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

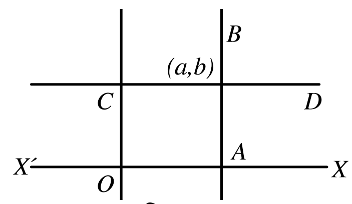
- সরলরেখার বিভিন্ন সমীকরণ নির্ণয় ও তা প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

অক্ষেরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ

$\boxed{x=a,\ y=b}$

x- অক্ষের উপর y- এর মান শূন্য এবং y- অক্ষের উপর x- এর মান শুন্য। সুতরাং x- অক্ষের সমীকরণ $\boxed{y=0}$ এবং y- অক্ষের সমীকরণ $\boxed{x=0}$

ধরা যাক, AB সরলরেখাটি y- অক্ষের সাথে সর্বদা 'a' দূরত্বে সঞ্চারিত হয়, উহার সমীকরণ $x = a$ যা y- অক্ষের সমান্তরাল। অনুরূপভাবে, CD রেখাটি x- অক্ষের সাথে b দূরত্বে সঞ্চারিত হলে, CD রেখার সমীকরণ, $y=b$ যা x- অক্ষের সমান্তরাল।



উদাহরণঃ (i) $x=3$ রেখাটি y- অক্ষের সমান্তরাল এবং y- অক্ষ থেকে সর্বদা 3 একক দূরে সঞ্চারিত হচ্ছে।

(ii) $y=9$ রেখাটি x- অক্ষের সমান্তরাল এবং x- অক্ষ থেকে সর্বদা 9 একক দূরে অবস্থিত।

মূলবিন্দুগামী ও x- অক্ষের সাথে একটি নির্দিষ্ট কোণে আনত সরলরেখার সমীকরণ-

$\boxed{y = mx}$

মনে করুন, মূলবিন্দু O এবং রেখাটি x- অক্ষের সাথে θ কোণে নত। রেখাটির উপর যে কোন বিন্দু $P(x,y)$ নিন। x- অক্ষের উপর PN লম্ব টানুন।

$\therefore$ $ON = x$, $PN=y$.

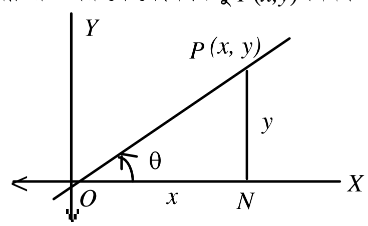
$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ OPN থেকে আমরা পাই,

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow y = \tan\theta . x. \text{ - - - - - - - (i)}$$

$\because$ ঢাল, $m = \tan\theta$

$\therefore$ (i) নং হতে পাওয়া যায় $y = mx.$



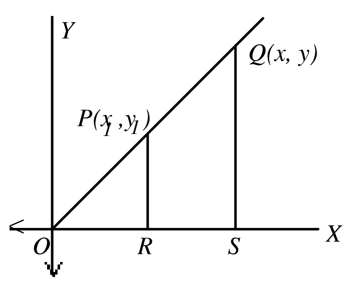
অনুসিদ্ধান্তঃ (i) $\theta = 0°$ হলে, OP, x- অক্ষের সাথে সমাপতিত হবে।

(ii) $\theta = 90°$, হলে OP, y অক্ষের সাথে সমাপতিত হবে।

মূলবিন্দু ও একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ-

$$\boxed{y = \frac{y_1}{x_1}x}$$

মনে করুন, মূলবিন্দু ও একটি নির্দিষ্ট বিন্দু $P(x_1, y_1)$ দিয়ে গমনকারী সরলরেখার উপর $Q(x,y)$ একটি বিন্দু। x- অক্ষের উপর PR ও QS লম্ব আঁকুন।



$\therefore$ $OR = x_1$, $OS=x$, $PR=y_1$, $QS=y$.

ΔOPR ও ΔOQS সদৃশ বলে আমরা পাই,

$$\frac{OR}{OS} = \frac{PR}{QS}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}$$

$$\therefore\ y = \frac{y_1}{x_1}x$$

উদাহরণ-1 ঃ মূলবিন্দু ও $(6, -5)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ আপনারা জানেন মূলবিন্দু ও একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ $y=\frac{y_1}{x_1}x$

এখানে, $(x_1, y_1) = (6, -5)$

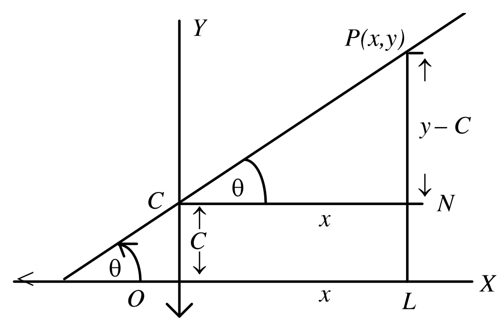
$$\therefore\ y = \frac{-5}{6}x$$

$$\Rightarrow 5x+6y = 0$$

y- অক্ষ থেকে একটি নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করে এবং x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে একটি কোণ উৎপন্নকারী সরলরেখার সমীকরণ-

$\boxed{y = mx+C}$

মনে করুন, y- অক্ষ থেকে $OC=C$ একক এবং x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্নকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।



সরলরেখাটির উপর যেকোন বিন্দু $P(x,y)$ নিন। x- অক্ষের উপর PL লম্ব টানুন। আবার, $CN \perp PL$ আঁকুন। $\therefore$ $OL=CN=x$ এবং $PN = y-C$.

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ PCN থেকে $\tan\theta = \frac{y-C}{x}$

$\Rightarrow y-C = \tan\theta \,.\, x.$

$\therefore$ $y = mx + C$ $\qquad$ $[\because \tan\theta = m]$

অনুঃ $C=0$ হলে, $y=mx$ রেখাটি মূলবিন্দুগামী রেখাকে বুঝায়।

উদাহরণ-2 ঃ একটি সরলরেখা y অক্ষ থেকে 15 একক দূরে ছেদ করে এবং x অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ আমরা জানি,

$$y = mx + C$$

$$\Rightarrow y = \tan 30° . x + 15$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{3}} + 15$$

$$\Rightarrow x - \sqrt{3}\,y + 15\sqrt{3} = 0$$

m ঢাল বিশিষ্ট ও (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ- $\boxed{y-y_1 = m(x-x_1)}$

মনে করুন, সরলরেখাটির সমীকরণ-

$y = mx+C$ - - - - - - - - (i)

কিন্তু (i) নং সরলরেখাটি (x_1, y_1) বিন্দু দিয়ে যায়,

$y_1 = mx_1+C$ - - - - - - - (ii)

(i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে, $y-y_1 = m(x-x_1)$

ইহাই নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ।

উদাহরণ-3 ঃ 45° কোণে আনত ও (4, 5) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ আপনারা জানেন $y-y_1 = m(x-x_1)$ - - - - - - - - (i)

এখানে, $(x_1, y_1) = (4, 5)$ এবং $m = \tan 45° \Rightarrow m = 1$

$\therefore$ (i) নং হতে, $y-5 = 1(x-4)$

$\Rightarrow x-y+1 = 0$

দুটি বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2}}$$

মনে করুন, (x_1, y_1) ও (y_2, y_2) দুইটি বিন্দু। আরও ধরুন, m ঢাল বিশিষ্ট ও (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$y-y_1 = m(x-x_1)$ - - - - - - - (i)

কিন্তু (i) নং সমীকরণটি (x_2, y_2) বিন্দুগামী

$$\therefore y_2-y_1 = m(x_2-x_1)$$

$$\Rightarrow m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

(i) নং এ m- এর মান বসিয়ে পাই-

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$\Rightarrow \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2}$$

অর্থাৎ (x_1, y_2) ও (y_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার সমীকরণ $\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2}$

উদাহরণ 4 ঃ (2,3) ও (5, 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ (2, 3) ও (5, 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজন সরলরেখার সমীকরণ-

$$\frac{x-2}{2-5} = \frac{y-3}{3-6} \qquad \left[\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} \text{ সূত্রের প্রয়োগ } \right]$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{-3}$$

$$\Rightarrow x-2 = y-3$$

$$\Rightarrow x-y+1 = 0$$

দুটি অক্ষ থেকে নির্দিষ্ট অংশের দৈর্ঘ্য ছেদকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়- [ছেদক আকৃতি]

$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$

ধরা যাক, L নামক সরলরেখাটি x ও y- অক্ষ থেকে যথাক্রমে $OA=a$ এবং $OB=b$ একক অংশে ছেদ করে। সরলরেখাটির উপর যেকোন একটি বিন্দু $P(x,y)$ নিন। x ও y অক্ষের উপর PN ও PM লম্ব আঁকুন।

$\therefore\ OM = PN = y;\ PM = ON = x.$

আমরা পাই,

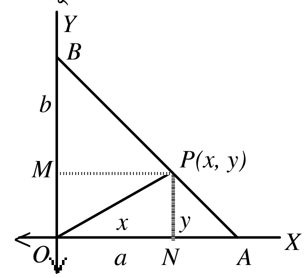
ΔAOB- এর ক্ষেত্রফল = ΔAOP- ক্ষেত্রফল + ΔBOP- এর ক্ষেত্রফল

$\Rightarrow \frac{1}{2}.OA.OB = \frac{1}{2}.OA.PN + \frac{1}{2}.OB.PM$

$\Rightarrow \frac{1}{2}a.b = \frac{1}{2}.a.y + \frac{1}{2}.b.x$

$\Rightarrow ab = ay + bx.$

$\therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$



উদাহরণ 5 ঃ একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় হইতে যে অংশদ্বয় ছেদ করে, তাদের সমষ্টি ও অন্তর যথাক্রমে 9 এবং 5 একক; সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করুন, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ - - - - - - - - - - - (1)

যাহা x- অক্ষ থেকে a একক এবং y- অক্ষ থেকে b একক অংশ কেটে নেয়।

প্রশ্নমতে, $a+b=9$ - - - - - - - - (2)

এবং $a-b=5$ - - - - - - - - (3)

অথবা $b-a=5$ - - - - - - - - (4)

(2) ও (3) নং সমীকরণ বিয়োগ করে, $2a=14$

$\therefore\ a=7$

(2) নং হতে (3) নং সমীকরণ যোগ করে, $2b=4$

$\therefore\ b=2.$

আবার, (2) নং ও (4) নং সমীকরণ বিয়োগ করে $2b=14.$

$\therefore\ b=7$

এবং (2) নং হতে (4) নং সমীকরণ বিয়োগ করে $2a=4$

$\therefore\ a=2.$

$\therefore$ সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{7}+\frac{y}{2}=1 \Rightarrow 2x+7y=14$

অথবা $\frac{x}{2}+\frac{y}{7}=1 \Rightarrow 7x+2y=14.$

মূলবিন্দু থেকে কোন সরলরেখার লম্ব দূরত্ব x- অক্ষের সাথে α কোণে উৎপন্ন করলে সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

$\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha = P}$

মনে করুন, মূলবিন্দুর থেকে AB সরলরেখাটির লম্ব দূরত্ব, $OP=P.$ আবার ধরুন P বিন্দুটির স্থানাংক $P(x,y)$ এবং $\angle AOP = \alpha$। সুতরাং $\angle BOP = 90°-\alpha.$

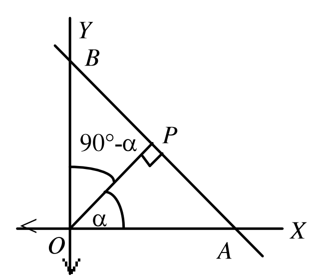
এখন ΔAOP হতে

$\cos\alpha = \frac{OP}{OA}$

$\Rightarrow OA = \frac{OP}{\cos\alpha}$ - - - - - - - - - (i)

এবং ΔBOP থেকে,

$\cos(90°-\alpha) = \frac{OP}{OB}$



$$\Rightarrow OB = \frac{OP}{\sin\alpha} \text{ - - - - - - - - - - - - } (2)$$

আবার, AB সরলরেখাটির সমীকরণ

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1 \text{ [ছেদক আকৃতির]}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{OP}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{OP}{\sin\alpha}} = 1 \qquad \text{[(1) ও (2) এর সাহায্যে]}$$

$$\Rightarrow x\cos\alpha + y\sin\alpha = OP$$

$$\Rightarrow x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$$

উদাহরণ 6 ঃ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা অক্ষ দুটির সাথে $16\sqrt{3}$ বর্গএকক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন করে এবং মূলবিন্দু থেকে উক্ত রেখার উপর অংকিত লম্ব x অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে।

সমাধান ঃ মনে করুন, মূলবিন্দু থেকে রেখাটির লম্ব দূরত্ব $=P$, দেয়া আছে $\alpha = 60°$

$\therefore$ সরলরেখাটির সমীকরণ, $x\cos 60° + y\sin 60° = P$

$$\Rightarrow x.\frac{1}{2} + y.\frac{\sqrt{3}}{2} = P \text{ - - - - - - - } (i)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2P} + \frac{y}{\frac{2P}{\sqrt{3}}} = 1$$

যা x অক্ষ থেকে $2P$ একক এবং y অক্ষ থেকে $\frac{2P}{\sqrt{3}}$ একক অংশ কেটে নেয়।

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2} \cdot 2P.\frac{2P}{\sqrt{3}} = 16\sqrt{3}$

$$\Rightarrow 2P^2 = 48$$

$$\Rightarrow P^2 = 24.$$

$$\therefore P = 2\sqrt{6}.$$

$\therefore$ (1) নং-এ, $P=2\sqrt{6}$ বসিয়ে, আমরা পাই,

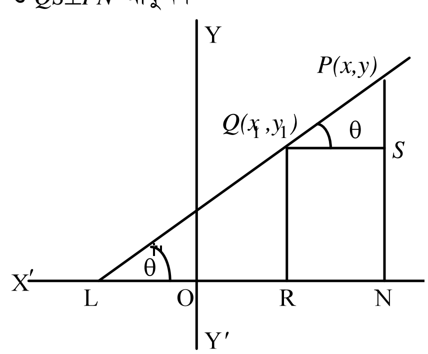
$$\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2} = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow x+\sqrt{3}\,y = 4\sqrt{6}$$

একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা, x- অক্ষের সাথে θ কোণ করে আছে এবং যার উপরিস্থিত একটি চলমান বিন্দু ও একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর দূরত্ব $=r$.

$$\boxed{\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r.}$$

মনে করুন, LQP একটি সরলরেখা। ইহা x- অক্ষের সাথে θ কোণ করে আছে। এর উপর $P(x,y)$ একটি চলমান বিন্দু ও $Q(x_1,y_1)$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দেয়া আছে। x- অক্ষের উপর QR, PN লম্ব ও $QS\perp PN$ আঁকুন।



$\therefore$ $OR = x_1$, $ON=x$, $QR = SN=y_1$, $QP=r$,

এবং $RN = QS = x-x_1$; $PS = y-y_1$.

$\therefore$ ΔPQS থেকে $\cos\theta = \frac{QS}{QP} = \frac{x-x_1}{r}$

$$\Rightarrow \frac{x-x_1}{\cos\theta} = r \text{ - - - - - - - } (1)$$

এবং $\sin\theta = \frac{y-y_1}{r}$

$$\Rightarrow \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r \text{ - - - - - - - - } (2)$$

(1) ও (2) হতে $\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r$

উদাহরণ-7 ঃ $P(3,4)$ বিন্দুগামী সরলরেখা x- অক্ষের সাথে $\frac{\pi}{6}$ কোণ উৎপন্ন করে এবং $12x+5y+10=0$ রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ- এর মান বাহির করুন।

সমাধান ঃ x অক্ষের সাথে $\frac{\pi}{6}$ কোণ উৎপন্নকারী এবং $P(3,4)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$$\frac{x-3}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{y-4}{\sin\frac{\pi}{6}} = r.$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{y-4}{\frac{1}{2}} = r.$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}\ r + 3,$$

$$y = \frac{1}{2}\ r + 4$$

$\therefore$ r- এর যেকোন মানের জন্য Q বিন্দুটির স্থানাংক $= \left(\frac{\sqrt{3}\,r}{2} + 3, \frac{1}{2}r + 4\right)$

Q বিন্দুটি $12x+5y+10 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

$$\therefore\ 12\left(\frac{\sqrt{3}\,r}{2} + 3\right) + 5\left(\frac{1}{2}r + 4\right) + 10 = 0$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{3}\ r + 36 + \frac{5}{2}\ r + 20 + 10 = 0$$

$$\Rightarrow 12\sqrt{3}\ r + 72 + 5r + 40 + 20 = 0$$

$$\Rightarrow r\,(12\sqrt{3} + 5) = -132.$$

$$\therefore\ r = -\frac{132}{12\sqrt{3} + 5}$$

অতএব নির্ণেয় দূরত্ব $\frac{132}{12\sqrt{3} + 5}$

উদাহরণ 8 ঃ $12y-3x-4 = 0$ সরলরেখাটির

(i) ঢাল নির্ণয় করুন

(ii) x ও y অক্ষের ছেদবিন্দুর স্থানাংক বাহির করুন।

সমাধান ঃ (i) দেয়া আছে,

$$12y-3x-4 = 0 \text{ - - - - - - - } (i)$$

$$\Rightarrow y = +\frac{3}{12}\ x + \frac{4}{12}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{4}\ x + \frac{1}{3}$$ যাহা $y = mx+C$ আকারের।

$\therefore$ রেখাটির ঢাল $= \frac{1}{4}$

(ii) (i) নং এ, $x = 0$ বসিয়ে, $12y = 4$ $\therefore\ y = \frac{1}{3}$

এবং $\therefore$ x- অক্ষের উপর ছেদবিন্দুর স্থানাংক $= \left(0, \frac{1}{3}\right)$

FmÄ $y = 0$ mKxP~, $x = -\frac{4}{3}$

$\therefore$ y- অক্ষের উপর ছেদবিন্দু $= \left(-\frac{4}{3}, 0\right)$.

উদাহরণ 9 ঃ 2 ঢাল বিশিষ্ট ও (2,7) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার সমীকরণ বাহির করুন। সরলরেখাটি y- অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে, তা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ 2 ঢাল বিশিষ্ট ও (2, 7) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $y–7 = 2(x–2)$.

$\Rightarrow$ $2x–y+3 = 0$ - - - - - - - - - (i)

যেহেতু রেখাটি y- অক্ষকে ছেদ করে, অতএব x=0,

সুতরাং (i) নং হতে পাওয়া যায় $2.0 – y+3 = 0$

$\Rightarrow$ $y = 3$.

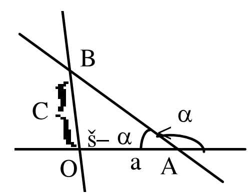
$\therefore$ রেখাটি y- অক্ষকে (0, 3) বিন্দুতে ছেদ করে।

উদাহরণ 10 ঃ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা x- অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে ও x- অক্ষকে a দূরত্বে ছেদ করে।

সমাধান ঃ এখানে, $m = \tan\alpha$

$\tan(\pi–\alpha) = \frac{C}{a}$

$\Rightarrow$ $C = – a \tan\alpha$.



$\therefore$ সরলরেখাটির সমীকরণ, $y = \tan\alpha.\ x –a \tan\alpha$ [$y=mx+C$ সূত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow$ $x–a = \frac{y}{\tan\alpha}$

$\therefore$ $x – y \cot\alpha = a$

উদাহরণ 11 ঃ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ (–5, 4) বিন্দুতে 1 ঃ 2 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

সমাধান ঃ মনে করুন, সরলরেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ - - - - - - - (i)

যা x- অক্ষকে $A(a,0)$ ও y- অক্ষকে $B(0,b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, AB রেখাটি (–5,4) বিন্দুতে 1ঃ 2 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

$\therefore$ $– 5 = \frac{1.0+2.a}{1+2}$ $\Rightarrow$ $2a = –15$ $\therefore$ $a = –\frac{15}{2}$

এবং $4 = \frac{1.b+2.0}{1+2}$ $\Rightarrow b = 12$.

$\therefore$ (i) নং এ, a ও b- এর মান বসিয়ে, আমরা পাই,

$$\frac{x}{-\frac{15}{2}} + \frac{y}{12} = 1.$$

$$\Rightarrow -\frac{2x}{15} + \frac{y}{12} = 1$$

$$\Rightarrow 8x – 5y + 60 = 0.$$

অনুশীলনী-১০.২

1. $(-3, 5)$ বিন্দুগামী ও x- অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
2. $(4, 7)$ বিন্দুগামী y- অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
3. মূলবিন্দু ও $(1, 2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
4. মূলবিন্দুগামী ও x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $60°$ কোণে আনত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
5. একটি সরলরেখা $(0, 3)$ বিন্দু দিয়ে গমন করে এবং x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।
6. একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সংগে একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে যার অতিভুজের দৈর্ঘ্য 13 একক এবং ক্ষেত্রফল 30 বর্গএকক। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।
7. $16x+9y-7 = 0$ এবং $x \cos\alpha + y\sin\alpha = P$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে, P- এর মান নির্ণয় করুন।
8. $(-5, 3)$ বিন্দুগামী ও $\frac{2}{3}$ ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
9. একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ $(-4, 3)$ বিন্দুতে 5 ঃ1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।
10. একটি সরলরেখা $(1,3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশের সমষ্টি ৪একক। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।
11. মূলবিন্দু থেকে কোন সরলরেখার লম্বদূরত্ব 4 একক এবং উহা x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।
12. একটি সরলরেখা $(4,10)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং y- অক্ষকে 5 একক দূরে ছেদ করে। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

পাঠ ৩ সরল রেখার সাধারণ সমীকরণ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ যে $Ax + By + C = 0$ আকারে প্রকাশ করা যায় তা বর্ণনা, ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ

$A\text{x} + B\text{y} + C = 0$ কে সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ বা আদর্শ সমীকরণ (Standard equation) বলে। সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ যে সরলরেখার বিভিন্ন সমীকরণের সাথে সমতুল্য তা নিম্নে দেখান হল।

(i) $A\text{x} + B\text{y} + C = 0$

বা, $B\text{y} = -A\text{x} - C$

বা, $\text{y} = -\frac{A}{B}\text{x} - \frac{C}{B}$

উপরোক্ত সমীকরণটি ব ঢাল ও হ অক্ষ থেকে উ একক অংশ কর্তিত সরলরেখার সমীকরণ হ = বস+উ এর সমতূল্য।

(ii) $A\text{x} + B\text{y} + C = 0$

বা, $A\text{x} + B\text{y} = -C$

বা, $\frac{A\text{x}}{-C} + \frac{B\text{y}}{-C} = 1$

বা, $\frac{\text{x}}{-\frac{C}{A}} + \frac{\text{y}}{-\frac{C}{B}} = 1$

উপরোক্ত সমীকরণটি x অক্ষ থেকে a এবং y অক্ষ থেকে b একক দৈর্ঘ্য কর্তনকারী সরলরেখার সমীকরণ $\frac{\text{x}}{\text{a}} + \frac{\text{y}}{\text{b}} = 1$ এর সমতুল্য।

(iii) সরলরেখার আদর্শ সমীকরণ $A\text{x} + B\text{y} + C = 0$ এবং মূলবিন্দু থেকে কোন রেখার লম্ব দূরত্ব P যা x অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্নকারী সরলরেখার সমীকরণ $\text{x}\cos\alpha + \text{y}\sin\alpha = \text{P}$ বা $\text{x}\cos\alpha + \text{y}\sin\alpha - \text{P} = 0$ যদি একই সরলরেখা নির্দেশ করে তবে তাদের অনুরূপ সহগগুলো সমানুপাতিক হবে।

অর্থাৎ $\frac{A}{\cos\alpha} = \frac{B}{\sin\alpha} = \frac{C}{-P}$

অতএব, $\frac{A}{\cos\alpha} = \frac{C}{-P}$ এবং $\frac{B}{\sin\alpha} = \frac{C}{-P}$

বা, $\cos\alpha = \frac{-AP}{C}$ এবং $\sin\alpha = \frac{-BP}{C}$

এখন $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{A^2P^2}{C^2} + \frac{B^2P^2}{C^2}$

বা, $1 = \frac{P^2}{C^2}(A^2 + B^2)$

বা, $P^2 = \frac{C^2}{A^2 + B^2}$

বা, $P = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

কিন্তু লম্ব দূরত্ব P সব সময় ধনাত্মক, অতএব $\sqrt{A^2 + B^2}$ এর চিহ্ন C এর অনুরূপ হবে।

C এর ধনাত্মক মানের জন্য $P = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{-AP}{C} = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

এবং $\sin\alpha = \frac{-BP}{C} = \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

অতএব $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$ সমীকরণটি হবে-

$$\frac{-Ax}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{-By}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

আবার C এর ঋণাত্মক মানের জন্য $P = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

তখন $\cos\alpha = \frac{-AP}{C} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$

এবং $\sin\alpha = \frac{-BP}{C} = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

অতএব $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$ সমীকরণটি হবে

$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{Bx}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

বিঃ দ্রঃ উপরোক্ত সমাধানের ক্ষেত্রে স্মরণ রাখতে হবে লম্ব দূরত্ব P এর মান সর্বদাই ধনাত্মক।

পাঠ ৪ দুটি সরলরেখার ছেদবিন্দু

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

দুটি সরলরেখার ছেদবিন্দু

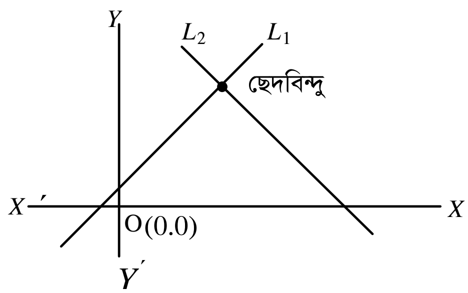
দুটি সরলরেখা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে গমন করলে, ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুকে তাদের ছেদ বিন্দু বলে।

ছেদবিন্দু নির্ণয়ের পদ্ধতি

মনে করুন, সরলরেখা দুটি

$L_1 = a_1x+b_1y+c_1= 0$

এবং $L_2 = a_2x+b_2y+c_2 = 0$



বজ্রগুণনের মাধ্যমে $\dfrac{x}{b_1c_2-b_2c_1} = \dfrac{y}{c_1a_2-c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$

$$\therefore\ x = \frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\ ,\ y = \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$\therefore$ রেখা দু'টির ছেদবিন্দুর স্থানাংক $= \left(\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)$

ছেদ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

মনে করুন সরল রেখা দুইটি

$$L_1 = a_1x+b_1y+c_1 = 0 \text{ - - - - - - - (i)}$$

এবং $L_2 = a_2x+b_2y+c_2 = 0$ - - - - - - - (ii)

উক্ত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$L_1 + \lambda L_2 = 0,$ λ একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

$\Rightarrow\ a_1x+b_1y+c_1+\lambda\ (a_2x+b_2y+c_2) = 0$ - - - - - - - (iii)

যদি (3) নং সমীকরণটি একটি বিন্দু (x_1, y_1) দিয়ে যায়, তাহলে সমীকরণটি উক্ত বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হবে। ফলে λ- এর মান পাওয়া যাবে। (3) নং-এ λ- এর মান বসালে নির্ণেয় সমীকরণটি পাওয়া যাবে।

উদাহরণ 1 ঃ $3x+4y-12=0$ ও $4x-3y+12=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $3x+4y-12=0$

$4x-3y+12=0$

m\sèePjr oJiqPo, $\dfrac{x}{48-36} = \dfrac{y}{-48-36} = \dfrac{1}{-9-16}$

$$\Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{-84} = \frac{1}{-25}.$$
$$\therefore\ x = -\frac{12}{25},\quad y = \frac{84}{25}$$
$$\therefore\ \text{ছেদবিন্দুটি} = \left(-\frac{12}{25}, \frac{84}{25}\right)$$

উদাহরণ 2 ঃ $2x+3y+1=0$ ও $3x-2y+9=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু ও (2,3) বিন্দু দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে

$2x + 3y + 1 = 0$ - - - - - - - - - (i)

$3x -2y +9 = 0$ - - - - - - - - - - (ii)

বজ্রগুণনের মাধ্যমে, $\frac{x}{27+2} = \frac{y}{3-18} = \frac{1}{-4-9}.$

$$\Rightarrow \frac{x}{29} = \frac{y}{-15} = \frac{1}{-13}$$
$$\Rightarrow x = -\frac{29}{13},\quad y = \frac{15}{13}$$

$\therefore$ (1) ও (2) নং রেখায় ছেদবিন্দুর স্থানাংক $\left(-\frac{29}{13}, \frac{15}{13}\right)$.

এখন $\left(\frac{-29}{13}, \frac{15}{13}\right)$ ও (2, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$$y -3 = \frac{3-\frac{15}{13}}{2+\frac{29}{13}}(x-2)$$ [$y-y_1 = m(x-x_1)$ এবং $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ সূত্রের সাহায্যে]

$$\Rightarrow y-3 = \frac{\frac{39-15}{13}}{\frac{26+29}{13}}(x-2)$$
$$\Rightarrow y-3 = \frac{24}{55}(x-2)$$
$$\Rightarrow 55(y-3) = 24(x-2)$$
$$\Rightarrow 55y - 165 = 24x-48$$
$$\Rightarrow 24x-55y + 117 = 0$$

উদাহরণ-3 ঃ $5x-3y-10=0$ ও $x-y+1=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু এবং (3,2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে

$5x-3y-10=0$ - - - - - - - - - - (1)

এবং $x-y+1 = 0$ - - - - - - - - (2)

(1) ও (2) এর ছেদ বিন্দু দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ $5x-3y-10+\lambda(x-y+1)=0$ - - -(3)

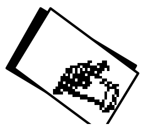
যেহেতু (3) নং সমীকরণটি (3, 2) বিন্দুগামী, সুতরাং বিন্দুটি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হবে।

$$\therefore\ 5.3 -3.2 -10+\lambda(3-2+1) = 0$$
$$\Rightarrow 15-6-10+ \lambda(2) = 0$$
$$\Rightarrow 2\lambda - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

(3) নং এ $\lambda = \frac{1}{2}$ বসিয়ে, আমরা পাই

$$5x-3y-10+\frac{1}{2}(x-y+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad 10x-6y-20+x-y+1=0$$
$$\Rightarrow \quad 11x-7y-19=0$$

মন্তব্য ঃ এই সমস্যাটি বজ্রগুণনের মাধ্যমে ছেদবিন্দু বের করে, ছেদবিন্দু ও প্রদত্ত বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ বের করা যায়।



অনুশীলনী-১০.৩

1. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা মূলবিন্দু ও $2x-3y+1=0$ এবং $x+2y-3=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে গমন করে।
2. $2x-3y=0$ এবং $4x-5y=2$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু ও $(2,1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
3. দেখান যে, $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং (α,β) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_1\alpha+b_1\beta+c_1} = \frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_2\alpha+b_2\beta+c_2}$
4. $5x-3y-10=0$ এবং $x-y+1=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু ও মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
5. $(2,-1)$ বিন্দুগামী ও $2y+5=0$ ও $3x+y=6$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
6. মূলবিন্দু এবং $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ও $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
7. $2x-7y+11=0$ এবং $x+3y-8=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু ও মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

পাঠ ৫ দুটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ

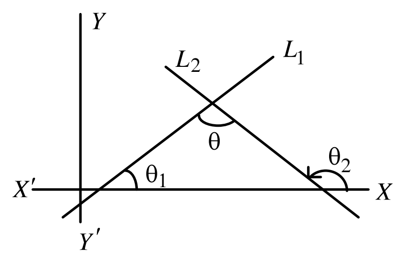
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

■ দুইটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

$$\boxed{\tan\theta = \pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}}$$

মনে করুন, দুটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা L_1 ও L_2, x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে θ_1 ও θ_2 কোণ উৎপন্ন করে।



সুতরাং L_1 রেখার ঢাল, $m_1 = \tan\theta_1$ এবং L_2 রেখার ঢাল, $m_2 = \tan\theta_2$

মনে করুন, রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $= \theta$.

আমরা জানি, কোন ত্রিভুজের বহিঃস্থকোণ উহার অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

$\therefore\ \theta_1+\theta = \theta_2$

$\Rightarrow\ \theta = \theta_2-\theta_1$

$\Rightarrow\ \tan\theta = \tan(\theta_2-\theta_1)$

$\Rightarrow\ \tan\theta = \dfrac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_1 \,.\, \tan\theta_2}$

$\Rightarrow\ \tan\theta = \dfrac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\ ,\ m_2>m_1$ - - - - - - - - (i)

আবার, $\tan\theta = \dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\ ,\ m_1>m_2$ - - - - - - - - - (ii)

(i) নং ও (ii) নং হতে পাওয়া যায় $\tan\theta = \pm\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

উদাহরণ -1 ঃ $3x+4y-7=0$ এবং $3x-4y+1=0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে $3x+4y-7=0$

$\Rightarrow\ y = -\dfrac{3}{4}\ x + \dfrac{7}{3}$

রেখাটির ঢাল, $m_1 = -\dfrac{3}{4}$

আবার, $3x-4y+1=0$

$\Rightarrow\ y = \dfrac{3}{4}\ x + \dfrac{1}{4}$

রেখাটির ঢাল, $m_2 = \dfrac{3}{4}$

আমরা জানি, $\tan\theta = \dfrac{m_2-m_1}{1+m_1m_2} \quad (m_2>m_1)$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\frac{3}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\frac{6}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{6}{4} \infty \frac{16}{7} = \frac{24}{7}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{24}{7}.$$

উদাহরণ-2 ঃ দুটি সরলরেখা (6, –7) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $y+x\sqrt{3}\ -1=0$ রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। রেখাদ্বয়ের সমীকরণ বাহির করুন।

সমাধান ঃ

মনে করুন, m ঢাল বিশিষ্ট ও (6, –7) বিন্দুগামী সরলরেখায় সমীকরণ, $y+7 = m(x-6)$ - - - - - - (i)

আবার দেখা আছে, $y+x\sqrt{3}\ -1 = 0$

$$\Rightarrow y = -\sqrt{3}\ x + 1 \text{ - - - - - - - - (2)}$$

এই রেখাটির ঢাল, $m_2 = -\sqrt{3}$

(i) ও (ii) এর মধ্যবর্তী কোণ 45°

$$\therefore \tan 45^\circ = \pm\frac{m-(-\sqrt{3})}{1+(-\sqrt{3})m}$$

$$\Rightarrow 1 = \pm\frac{m+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m}$$

$$\Rightarrow 1-\sqrt{3}\ m = \pm\ (m+\sqrt{3}\ )$$

'+' চিহ্ন দিয়ে, $1-\sqrt{3}\ m = m+\sqrt{3}$

$$\Rightarrow 1-\sqrt{3}\ = m(1+\sqrt{3}\ )$$

$$\Rightarrow m = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{3})^2}{1-3} = \frac{1-2\sqrt{3}+3}{-2}$$

$$= -2 + \sqrt{3}$$

'–' চিহ্ন দিয়ে, $1-\sqrt{3}\ m = -m-\sqrt{3}$.

$$\Rightarrow 1+\sqrt{3}\ = -m(1-\sqrt{3}\ )$$

$$\Rightarrow m = -\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3} = -2-\sqrt{3}\ .$$

$\therefore$ (i) নং m- এর মান বসিয়ে,

$$y+7 = (-2+\sqrt{3}\ )\ (x-6)$$

এবং $y+7 = -\ (2+\sqrt{3}\ )(x-6)$

উদাহরণ 3 ঃ $x-2y-1=0$ ও $2x+3y+2=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু গমনকারী ও tan45° ঢাল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে

$x–2y–1= 0$ - - - - - - - - - - - - (i)

$2x+3y+2 = 0$ - - - - - - - - - (ii)

বজ্রগুণনের মাধ্যমে, $\frac{x}{-4+3} = \frac{y}{-2-2} = \frac{1}{3+4}$

$\Rightarrow \frac{x}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{1}{7}$

$\therefore x = -\frac{1}{7}, y = -\frac{4}{7}$

$\therefore$ (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দুর স্থানাংক $= \left(-\frac{1}{7}, -\frac{4}{7}\right)$

$\therefore \left(-\frac{1}{7}, -\frac{4}{7}\right)$ বিন্দুগামী ও tan45° বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ

$\left(y+\frac{4}{7}\right) = \tan 45^\circ \left(x+\frac{1}{7}\right)$

$\Rightarrow \frac{7y+4}{7} = \frac{7x+1}{7}$ $[\because \tan 45^\circ = 1]$

$\Rightarrow 7x + 1= 7y + 4$

$\therefore 7x -7y -3 = 0$

উদাহরণ 4 ঃ x-অক্ষের সমান্তরাল এবং $x–3y+2=0$ এবং $x+2y–4=0$ রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করুন, x- অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $y = b$ - - - - - - (i)

আবার দেয়া আছে, $x–3y+2 = 0$ - - - - - - - (2)

$x+2y–4 = 0$ - - - - - - - (3)

(2) ও (3) বজ্রগুণন করে- $\frac{x}{12-4} = \frac{y}{2+4} = \frac{1}{2+3}$

$\Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{1}{5}$

$\therefore x = \frac{8}{5}, y = \frac{6}{5}$

$\therefore$ (2) ও (3) এর ছেদবিন্দুর স্থানাংক $= \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

যেহেতু (1) নং রেখাটি ছেদবিন্দু $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$ দিয়ে অতিক্রম করে, আমরা পাই, $\frac{6}{5} = b$

(1) নং b- এর মান বসিয়ে, $y = \frac{6}{5}$

$\Rightarrow 5y -6 = 0$

উদাহরণ 5 ঃ $4x–3y–1=0$ এবং $2x–3y+3=0$ রেখা দুটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় থেকে সমান সাংখিকমানের অংশ ছেদ করে, এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে

$4x–3y–1 = 0$ - - - - - - - (i)

এবং $2x–3y+3 = 0$ - - - - - - - (ii)

(i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ,

$$4x-3y-1+k(2x-3y+3)=0, \quad k \neq 0 \text{ - - - - - - - - (iii)}$$

$$\Rightarrow (4+2k)x+(-3-3k)y=1-3k.$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{1-3k}{4+2k}}+\frac{y}{\frac{1-3k}{-3-3k}}=1.$$

যেহেতু (iii) নং রেখাটি অক্ষদ্বয় থেকে সমান সাংখ্যিকমানের অংশ ছেদ করে,

$$\frac{1-3k}{4+2k}=\pm\frac{1-3k}{-3-3k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4+2k}=\pm\frac{1}{3+3k}$$

$$\Rightarrow 3+3k=\pm(4+2k)$$

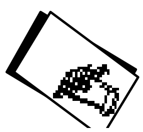
'+' চিহ্ন নিয়ে, $3+3k=4+2k \Rightarrow k=1$

'–' " " , $3+3k=-4-2k \Rightarrow 5k=-7 \quad \therefore k=-\frac{7}{5}$

(iii) নং-এ, k- এর মান বসিয়ে, $6x-6y+2=0 \Rightarrow 3x-3y+1=0$

অথবা $20x-15y-5-14x+21y-21=0$

$$\Rightarrow 6x+6y-26=0.$$



অনুশীলনী-১০.৪

1. $mx-ny+a=0$ এবং $nx+my+b=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় করুন।
2. (3, 2) বিন্দু এবং $x-y+4=0$ ও $y-2x-5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন। নির্ণেয় রেখাটির সাথে প্রদত্ত রেখাদ্বয় কি পরিমাণ কোণ তৈরি করে তাও নির্ণয় করুন।

পাঠ ৬ রেখাসমূহ সমান্তরাল ও লম্ব হওয়ার শর্ত

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল ও লম্ব হওয়ার শর্ত নির্ণয় ও তা প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

পূর্ববর্তী পাঠ থেকে আপনারা জানেন $\tan\theta = \pm \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ - - - - - - - (1)

(ক) দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল হওয়ার শর্ত ঃ

যদি $\theta = 0°$ অথবা $180°$ হয় তাহলে L_1 & L_2 রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।

অর্থাৎ $0 = \pm \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ [$\therefore$ $\tan 0° = 0$ এবং $\tan 180° = 0$]

$\Rightarrow \quad m_1 = m_2$

অর্থাৎ রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে যদি রেখাদ্বয়ের ঢালদ্বয় সমান হয়।

(খ) দুইটি সরলরেখা লম্ব হওয়ার শর্ত ঃ

যদি রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $90°$ হয় তবে তারা পরস্পর লম্ব হবে।

অতএব (1) নং হতে পাওয়া যায় $\tan 90° = \square = \pm \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

$\Rightarrow \quad 1 + m_1 m_2 = 0$

$\therefore \quad m_1 m_2 = -1$

অর্থাৎ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে যদি ঢালদ্বয়ের গুণফল -1 হয়।

$m_1 = m_2 \Rightarrow$ সমান্তরাল
$m_1 m_2 = -1 \Rightarrow$ লম্ব

(গ) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখা দুটি সমান্তরাল ও লম্ব হওয়ার শর্ত

ধরুন $L_1 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$ - - - - - - - (2)

এবং $L_2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$ - - - - - - - (3)

(2) নং রেখার ঢাল, $m_1 = -\dfrac{a_1}{b_1}$

(3) নং রেখার ঢাল, $m_2 = -\dfrac{a_2}{b_2}$

অতএব (1) নং হতে পাওয়া যায় $\tan\theta = \pm \dfrac{\dfrac{a_1}{b_1} - \dfrac{a_2}{b_2}}{1 + \dfrac{a_1 a_2}{b_1 b_2}}$

$\Rightarrow \quad \tan\theta = \pm \dfrac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2}$ - - - - - - - (4)

(i) সমান্তরাল হওয়ার শর্ত ঃ

L_1 ও L_2 পরস্পর সমান্তরাল হবে যদি $\theta = 0°$ বা $180°$ হয়,

$\therefore$ (4) নং হতে পায়, $0 = \pm \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1b_2 + b_1b_2}$

$\Rightarrow\ a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

$\Rightarrow\ a_1b_2 = a_2b_1$

$\Rightarrow\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

(ii) লম্ব হওয়ার শর্ত ঃ

L_1, L_2 পরস্পর লম্ব হবে যদি তাদের মধ্যবর্তী কোণ $90°$ হয়।

সুতরাং (4) নং সমীকরণ হতে পাই $\tan 90° = \pm \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}$

$\Rightarrow\ \square = \pm \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}$

$\Rightarrow\ a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

সমান্তরাল ও লম্ব রেখার সমীকরণ

একটি সরলরেখার সমীকরণ $L_1 + ax + by + c = 0$ - - - - - - - - (5)

$\Rightarrow\ y = -\frac{a}{b}\ x - \frac{c}{a}$

$\therefore$ রেখাটির ঢাল, $m_1 = -\frac{a}{b}$

(i) সমান্তরাল রেখার সমীকরণ

ধরুন (5) নং এর সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $y = m_2x + k$

যেহেতু রেখাদ্বয় সমান্তরাল অতএব $m_1 = m_2$

$y = -\frac{a}{b}\ x + k$

$\Rightarrow\ ax + by - bk = 0$

$\Rightarrow\ ax + by + \lambda = 0$

i.e. সমান্তরাল রেখার ক্ষেত্রে x ও y- এর পদ অপরিবর্তশীল, শুধু ধ্রুবক পদের পরিবর্তন ঘটবে।

(ii) লম্ব রেখার সমীকরণ

ধরুন (5) নং এর উপর লম্ব যে কোন রেখার সমীকরণ $y = m_2x + k$

যেহেতু রেখা দ্বারা পরস্পর লম্ব অতএব, $m_1m_2 = -1$

বা, $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{a}{b}} = -\frac{b}{a}$

$\therefore\ y = \frac{b}{a}\ x + k.$

$\Rightarrow\ ay = bx + ak$

$\Rightarrow\ bx - ay + ak = 0$

$\Rightarrow\ bx - ay + \lambda = 0$

অতএব লম্ব রেখার ক্ষেত্রে x ও y এর সহগ পরস্পর স্থান পরিবর্তন করে এবং পদ দুইটির মধ্যের চিহ্ন পরিবর্তিত হয়। এখানে ধ্রুবক পদেরও পরিবর্তন ঘটে।

উদাহরণ 1 ঃ দেখান যে, $4x+3y+1=0$ এবং $3x-4y+19=0$ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব।

সমাধান ঃ দেয়া আছে, $4x+3y+1=0$ - - - - - - (i)

এবং $3x-4y+19 = 0$ - - - - (ii)

(i) নং হতে পাই, $4x+3y+1 = 0$

$\Rightarrow\ y = -\frac{4}{3}\ x - \frac{1}{3}$

রেখাটির ঢাল, $m_1 = -\frac{4}{3}$

এবং (ii) নং হতে পাই, $3x–4y+19 = 0$

$\Rightarrow\ y = \frac{3}{4}\ x + \frac{19}{4}$

রেখাটর ঢাল, $m_2 = \frac{3}{4}$

$\therefore$ ঢালদ্বয়ের গুণফল, $m_1m_2 = -\frac{4}{3}\ \infty \frac{3}{4}\ = -1$

অতএব রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব।

উদাহরণ 2 ঃ দেখান যে, $4x+by+k=0$ এবং $4x+by+\lambda=0$ রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

সমাধান ঃ $4x+by+k=0$ রেখাটির ঢাল, $m_1 = -\frac{4}{b}$

এবং $4x+by+l = 0$ " " , $m_2 = -\frac{4}{b}$

যেহেতু রেখাদ্বয়ের ঢালদ্বয় পরস্পর সমান , অতএব রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

উদাহরণ-3 ঃ $6x+7y+1=0$ রেখার উপর লম্ব ও (1,2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে $6x+7y+1=0$ - - - - - - - - - - (1)

ধরুন, (i) এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ,

$7x–6y+k = 0$ - - - - - - - - (2)

কিন্তু (2) নং রেখাটি (1,2) বিন্দু দিয়ে যায়, অতএব (2) নং রেখাটি (1,2) বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হবে।

$\therefore\quad 7 - 12 + k = 0\ \Rightarrow\ k = 5$

(2) নং-এ, $k = 5$ বসিয়ে, আমরা পাই,

$7x - 6y + 5 = 0.$

উদাহরণ-4 ঃ $ax+by+c=0$ রেখার সমান্তরাল ও (p, q) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $ax+by+c=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $ax+by+k=0$ - - - - - - (1)

কিন্তু ইহা (p, q) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore\quad ap + bq + k = 0$

$\Rightarrow\quad k = -(ap+bq)$

(1) নং এ, k- এর মান বসিয়ে, আমরা পাই,

$ax + by -(ap+bg) = 0$

উদাহরণ 5 ঃ $3x–y+4 = 0$ ও $2x+5y–1=0$ রেখার ছেদবিন্দুগামী ও $4x+7y+10=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে $3x–y+4 = 0$ - - - - - - (1)

এবং $2x + 5y -1 = 0$ - - - - -(2)

বজ্রগুণনের মাধ্যমে (1) ও (2) থেকে আমরা পাই,

$$\frac{x}{1–20} = \frac{y}{8+3} = \frac{1}{15+2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{x}{-19} = \frac{y}{11} = \frac{1}{17}$$

$$\Rightarrow\ x = -\frac{19}{17}\quad y = \frac{11}{17}$$

$\therefore$ (1) ও (2)- এর ছেদবিন্দুর স্থানাংক $= \left(-\frac{19}{17}, \frac{11}{17}\right)$

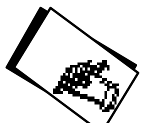
মনে করুন, $4x+7y+10=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $4x+7y+k=0$ - - - - - - - (3)

কিন্তু (3) নং রেখাটি $\left(-\frac{19}{17}, \frac{11}{17}\right)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

অতএব $\frac{-76}{17} + \frac{77}{17} + k = 0$

$\Rightarrow k = -\frac{1}{17}$

(3) নং এ, $k = -\frac{1}{17}$ বসিয়ে, আমরা পাই, $4x+7y-\frac{1}{17} = 0$.



অনুশীলনী-১০.৫

1. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $2x+y=3$ এবং $x-2y=4$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং $5x+6y=7$ রেখার উপর লম্ব হয়।
2. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যাহা $x-y+1=0$ ও $3x+y-5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং $7x-8y+13=0$ রেখার সমান্তরাল হয়।
3. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা (1,2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x-y-3=0$ রেখার উপর লম্ব হয়।
4. λ- এর মান কত হলে $2x+3y+4+\lambda(6x-y+12)=0$ সরলরেখাটি
   (i) y- অক্ষের সমান্তরাল হবে।
   (ii) $7x+5y=4$ রেখার উপর লম্ব হবে।
5. $2x-3y=0$ এবং $4x-5y=2$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং
   (i) $x+2y+1=0$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
   (ii) $3x-4y+5=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
6. $2x-7y+11=0$ এবং $x+3y-8=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু এবং
   (i) $y-$ অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
   (ii) $5x+3y-2=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
   (iii) $2x-5y+6=0$ রেখার উপর লম্বরেখার সমীকরণ $5x+2y-13=0$.
7. (–2, 4) ও (4, 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার লম্বদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

পাঠ ৭ তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হওয়ার শর্ত

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু কিনা তা নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হওয়ার শর্ত

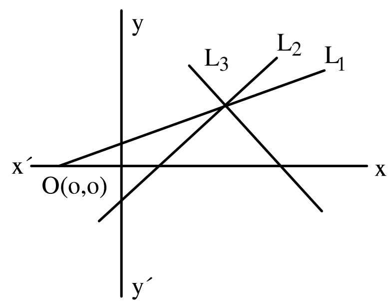
যদি তিনটি সরলরেখা একই বিন্দু দিয়ে গমন করে, তখন সরলরেখাটি তিনটি সমবিন্দু।

মনে করুন, তিনটি সমবিন্দু সরলরেখা-

$L_1 + a_1x+b_1y+c_1=0$ - - - - - - - - - - - - (i)

$L_2 + a_2x+b_2y+c_2 = 0$ - - - - - - - - - - - (ii)

$L_3 + a_3x+b_3y+c_3 = 0$ - - - - - - - - - - - (iii)



বজ্রগুণনের মাধ্যমে (i) ও (ii) থেকে আমরা পাই,

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2-c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \; y = \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$\therefore$ (1) ও (2) এর ছেদবিন্দুর স্থানাংক $= \left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)$

$\therefore$ তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হলে ছেদবিন্দুটি (3) নং রেখার উপর অবস্থিত।

$$\therefore \; a_3\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right) + b_3\left(\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right) + c_3 = 0$$

$$\Rightarrow a_3(b_1c_2-b_2c_1) + b_3\,(c_1a_2-c_2a_1) + c_3(a_1b_2-a_2b_1) = 0$$

$$\Rightarrow a_1(b_2c_3-b_3c_2) + b_1(c_2a_3-c_3a_2) + c_1(a_2b_3-a_3b_2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

ইহাই নির্ণেয় সমবিন্দু হওয়ার শর্ত।

উদাহরণ 1 ঃ $2x+3y+1=0$, $3x+5y+6=0$ এবং $5x+y+2=0$ রেখা তিনটি সমবিন্দু কিনা যাচাই করুন।

সমাধান ঃ আমরা জানি তিনটি রেখা সমবিন্দু হওয়ার শর্ত

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

এখানে, $a_1 = 2$, $b_1 = 3$, $c_1 = 1$, $a_2 = 3$, $b_2 = 5$, $c_2 = 6$, $a_3 = 5$, $b_3 = 1$, $c_3 = 2$

সুতরাং

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 2(10–6) –3(6–5)+1\ (3–15)$

$= 2\infty 4 –3–12$

$= 8–3–12$

$= –7 \neq 0$

$\therefore$ রেখাত্রয় সমবিন্দু নহে।

উদাহরণ-2 ঃ প্রমাণ করুন $3x–4y+5=0$, $7x–8y+5=0$ এবং $4x+5y=45$ রেখাত্রয় সমবিন্দু।

সমাধান ঃ প্রদত্ত প্রথম দুটি সমীকরণ $3x–4y=–5$ - - - - - - - - (i)

$7x–8y = –5$ - - - - - - - -(ii)

১ম সমীকরণকে 7 এবং ২য় সমীকরণকে 3 দ্বারা গুণ করুন এবং ২য় সমীকরণ থেকে ১ম সমীকরণ বিয়োগ করুন-

$21x –28y = –35$

$21x –24y = –15$

$\Rightarrow\ 4y = 20\ \Rightarrow y = 5$

y- এর মান ১ম সমীকরণে বসিয়ে $\Rightarrow\ 21x–28.5 = –35$

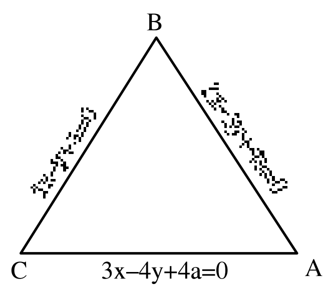
$\Rightarrow x = 5.$

১ম ও ২য় সমীকরণের ছেদবিন্দুর স্থানাংক (5,5)

এটি ৩য় সমীকরণ $4x + 5y = 45$ কে সিদ্ধ করে।

সুতরাং সমীকরণত্রয় সমবিন্দু।

উদাহরণ 3 ঃ $3x–4y+4a=0$, $2x–3y+4a=0$, $5x–y+a=0$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
সমাধানঃ



$3x–4y+4a = 0$ - - - - - - - - (1)

$2x–3y+4a = 0$ - - - - - - - - (2)

$5x –y+a = 0$ - - - - - - - - - (3)

(1) এবং (2) সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর A:

$\therefore\ A$ এর স্থানাংক $\Rightarrow\ \dfrac{x}{–16a+12a} = \dfrac{y}{8a–12a} = \dfrac{1}{–9+8}$

$\therefore\ A\ (4a, 4a)$

(2) এবং (3) সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু B

$\therefore$ B এর স্থানাংক $\Rightarrow \dfrac{x}{-3a+4a} = \dfrac{y}{20a-2a} = \dfrac{1}{-2+15}$

$\therefore$ $B\left(\dfrac{a}{13}, \dfrac{18a}{13}\right)$

(1) এবং (3) সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু C

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাংক $\Rightarrow \dfrac{x}{-4a+4a} = \dfrac{y}{20a-3a} = \dfrac{1}{-3+20}$

$\therefore$ C(0, a)

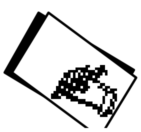
$\therefore$ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ঃ

$$= \frac{1}{2}\left[\left(4a.\frac{18a}{13} - \frac{a}{13}.4a\right) + \left(\frac{a}{13}.a - 0.\frac{18a}{13}\right) + (0.4a - 4a.a)\right]$$

$$= \frac{1}{2}.a^2\left[\frac{72}{13} - \frac{4}{13} + \frac{1}{13} - 4\right]$$

$$= \frac{a^2}{26}\ [72-4+1-52]$$

$$= \frac{17a^2}{26}$$



অনুশীলনী-১০.৬

1. দেখান যে, $5x+3y=7$, $3x-4y=10$ এবং $x+2y=0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু।
2. P- এর মান কত হলে $y=3x-1$, $2y=x+3$ এবং $3y=px+4$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হবে?
3. যদি $3x+y-2=0$, $ax+2y+3=0$ এবং $2x-y-3=0$ সরলরেখাত্রয় সমবিন্দু হয়, তবে a এর মান নির্ণয় কর।
4. $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$, $x=0$ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
5. $x+y-1=0$, $2x+y-4=0$ এবং $x-y=0$ রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

পাঠ ৮ রেখা হতে বিন্দুর দূরত্ব ও সমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

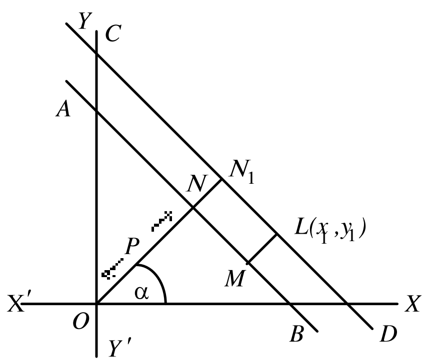
- একটি বিন্দু হতে একটি সরলরেখার দূরত্ব নির্ণয় করতে পারবেন;
- দুইটি সমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

রেখা হতে বিন্দুর দূরত্ব

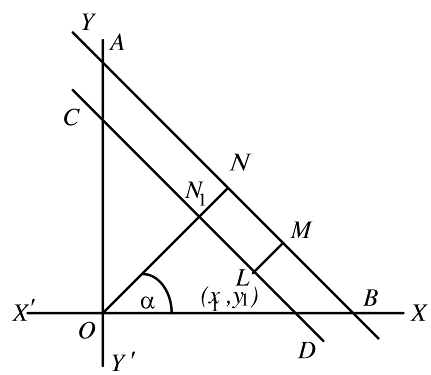
(i) সরলরেখার লম্বাকৃতি ($x\cos\alpha+y\sin\alpha = p$) হলে-

দূরত্ব = $|x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - P|$

মনে করুন, AB: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$ - - - - -(i) একটি সরলরেখা এবং $L(x_1,y_1)$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। P হলো মূলবিন্দু হতে (i) নং রেখার লম্ব দূরত্ব অর্থাৎ $ON=P$ এবং α হলো x- অক্ষের সাথে ON কর্তৃক সৃষ্ট কোণ। L বিন্দু থেকে (i)- এর দূরত্ব বের করতে হবে।



১ম-চিত্র



২য়-চিত্র

এখন, L বিন্দুর মধ্যবিন্দু দিয়ে $CD \parallel AB$ অঙ্কন করুন। সুতরাং CD রেখার সমীকরণ

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = P_1 \text{ - - - - - - - } (2)$$

এখানে, P_1 হলো মূলবিন্দু থেকে CD রেখার দূরত্ব অর্থাৎ $ON_1 = P_1$

আবার, $L(x_1,y_1)$ বিন্দুটি (2) এর উপর অবস্থিত। সুতরাং আমরা পাই,

$$x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha = P_1 \text{ - - - - - - - - } (3)$$

L বিন্দু থেকে $LM \perp CD$ আঁকুন।

১ম চিত্রে ঃ $LM = NN_1 = ON_1 - ON$

$= P_1 - P$

$= x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha - P$ [(3)- এর সাহায্যে]

i.e. $LM = x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-P$ - - - - - - (4)

২য় চিত্রে ঃ $LM = NN_1 = ON - ON_1$

$= P - P_1$

$= P - (x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha)$ [(3)- এর সাহায্যে]

$\therefore\ LM = -(x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-P)$ - - - - - - (5)

$\therefore$ উভয় চিত্রে লম্বদূরত্ব $= \pm (x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - P)$ [(4)- এবং (5) এর সাহায্যে]
কিন্তু দূরত্ব ঋণাত্মক হতে পারে না, সুতরাং বিয়োগ চিহ্ন এড়ানোর জন্য আমরা দূরত্ব $= |x_1\cos\alpha + y\sin\alpha - P|$ সূত্রটি ব্যবহার করবো।

(ii) সরলরেখা $ax+by+c=0$ আকারের হলে-

মনে করুন, $ax+by+c=0$ - - - - - (i) রেখা হতে $L(x_1,y_1)$ বিন্দুর দূরত্ব বের করতে হবে।

ধরা যাক, রেখাটির লম্বাকৃতি

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{P}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{P}{\sin\alpha}} = 1 \text{ - - - - - - - - - } (2)$$

আবার (1) নং হতে, $\Rightarrow \dfrac{x}{-\frac{c}{a}} + \dfrac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$ - - - - - - - - - - (3)

$\therefore$ (2) ও (3) একই সরলরেখার সমীকরণ, x ও y অক্ষ থেকে ছেদিতাংশের পরিমাণ সমান হবে,

$$\therefore \frac{P}{\cos\alpha} = -\frac{c}{a} \text{ এবং } \frac{P}{\sin\alpha} = -\frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{aP}{c} \text{ এবং } \sin\alpha = -\frac{bP}{c} \text{ - - - - - - - } (4)$$

$$\therefore \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{a^2P^2}{c^2} + \frac{b^2P^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{P^2}{c^2}(a^2+b^2)$$

$$\Rightarrow P^2 = \frac{c^2}{a^2+b^2}$$

$$\therefore P = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad [\ \therefore \text{ দূরত্ব ঋণাত্মক হতে যারে না }]$$

এখন, $L(x_1,y_1)$ বিন্দু থেকে (2) এর দূরত্ব

$$= |x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - P|$$

$$= \left|x_1\left(-\frac{aP}{c}\right) + y_1\left(-\frac{bP}{c}\right) - P\right| \quad [(4)\text{- এর সাহায্যে }]$$

$$= \left|-(ax_1+by_1)\frac{P}{c} - P\right|$$

$$= \left|\frac{P}{c}(ax_1+by_1+c)\right|$$

$$= \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

অর্থাৎ $ax+by+c=0$ রেখা হতে (x_1,y_1) বিন্দুর দূরত্ব $= \dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

মনে রাখার বিষয়

(i) দূরত্ব ঋণাত্মক হতে পারে না; কাজেই পরমমান প্রয়োজন।

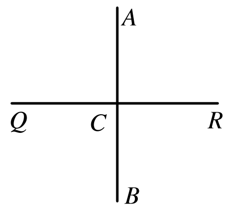
(ii) দুটি সূত্রের মধ্যে শেষোক্ত সূত্রটি বেশী ব্যবহৃত হয়।

উদাহরণ 1 ঃ (4,3) বিন্দু থেকে $12x+5y-40=0$ রেখার দূরত্ব বাহির করুন।

সমাধান ঃ (4,3) বিন্দু থেকে $12x+5y-40=0$ রেখার দূরত্ব

$$= \frac{|12.4+5.3-40|}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{23}{\sqrt{169}} = \frac{23}{13}$$ একক.

❒ **প্রতিবিম্ব ঃ** কোন সরলরেখার সাপেক্ষে A বিন্দুর প্রতিবিম্ব B হবে যদি কেবল মাত্র A ও B এর সংযোজক সরলরেখা, প্রদত্ত সরলরেখাকে লম্বভাবে সমদ্বিখন্ডিত করে।

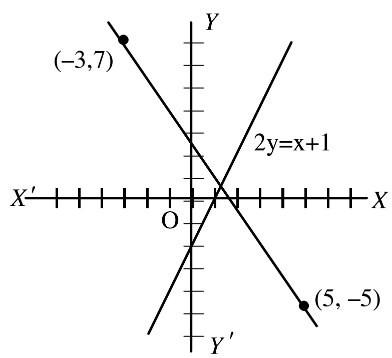


প্রদত্ত রেখা QR এর সাপেক্ষে A বিন্দুর প্রতিবিম্ব B। AB, QR- রেখার উপর লম্ব হবে এবং A ও B, QR- এর বিপরীত পার্শ্বে আছে।

$\therefore$ AB এর মধ্যবিন্দু C, QR– এর উপর অবস্থিত।

উদাহরণ 2 ঃ $2y = x+1$ সরলরেখার সাপেক্ষে দেখান যে, $(-3,7)$ বিন্দুর প্রতিবিম্বের স্থানাংক $(5, -5)$

উত্তর ঃ $A(-3, 7)$ এবং $(5, -5)$ বিন্দুর সংযোগ রেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{7-5}{2}\right)$ অর্থাৎ $(1,1)$ $2y=3x-1$ রেখার একটি সমাধান $x=1$, $y=1$.



অতএব AB এর মধ্যবিন্দু প্রদত্ত রেখার উপর একটি বিন্দু।

AB রেখার ঢাল $= \frac{5-(-3)}{-5-7} = \frac{8}{-12} = \frac{2}{-3} = m_1$ ধরুন

প্রদত্ত রেখা $2y=3x-1$ এর ঢাল $= \frac{3}{2} = m_2$

এখন $m_1 m_2 = \frac{2}{-3} \cdot \frac{3}{2} = -1$

অতএব AB, প্রদত্ত রেখা $2y=3x-1$ এর উপর লম্ব। সুতরাং $2y=3x-1$ রেখার জন্য $(-3, 7)$ এর প্রতিবিম্ব বিন্দু $(5, -5)$.

উদাহরণ 3 ঃ $(-2,5)$ বিন্দু থেকে $3x-5y+5=0$ রেখাটির লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে, রেখাটি $3x-5y+5=0$ - - - - - (1)

$(-2, 5)$ বিন্দু থেকে (1) নং রেখার লম্ব দূরত্ব $= \frac{|3(-2)-5.5+5|}{\sqrt{3^2+(-5)^2}}$

$$= \frac{|-6-25+5|}{\sqrt{9+25}} = \frac{26}{\sqrt{34}}$$ একক।

উদাহরণ 4 ঃ মূলবিন্দু থেকে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 10 একক হলে, দেখান যে, $\frac{1}{100} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণটি $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$\Rightarrow bx+ay-ab = 0$ - - - - - - (1)

(0,0) বিন্দু থেকে (1) নং রেখার লম্বদূরত্ব = 10 একক।

i.e. $\pm \frac{a.0+a.0-ab}{\sqrt{b^2+a^2}} = 10$

$\Rightarrow \pm \frac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = 10.$

$\Rightarrow \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} = 100$

$\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{100}.$

$\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{100}.$

উদাহরণ 5 ঃ $3x-2y-3=0$ রেখার সাপেক্ষে (6,–4) এবং (–3,–2) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান নির্ণয় করুন। এদের কোনটি রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে, ঠিক সেই পার্শ্বে অবস্থিত?

সমাধান ঃ

প্রদত্ত রেখাটির সমীকরণ $3x-2y-3=0$ - - - - - - (1)

এখন, (1) নং এ (6,–4) বিন্দুটি সন্নিবিষ্ট করলে, বামপক্ষ = $3.6-2(-4)-3=1$.

এবং (–3,–2) বিন্দুটি সন্নিবিষ্ট করলে, বামপক্ষ = $3(-3)-2(-2)-3=-5$.

স্পষ্টত ঃ মানদ্বয় পরস্পর বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট।

$\therefore$ (6,–4) এবং (–3, –2) বিন্দুদ্বয় প্রদত্ত রেখাটির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

আবার (1) নং এ, মূলবিন্দু (0,0) সন্নিবিষ্ট করলে, বামপক্ষ = $3.0-2.0-3=-3$

স্পষ্টত ঃ (–3,–2) এবং (0,0) বিন্দুদ্বয়ের স্থানাংক সন্নিবিষ্ট করলে মানদ্বয় সমচিহ্ন বিশিষ্ট।

$\therefore$ (–3,–2) বিন্দুটি প্রদত্ত রেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে, ঠিক সেই পার্শ্বে অবস্থিত।

উদাহরণ 6 ঃ $3x+4y=5$ রেখার সমান্তরাল এবং (1,–2) বিন্দু থেকে 7 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করুন, $3x+4y=5$ রেখার সমান্তরালরেখার সমীকরণ, $3x+4y+k=0$ - - - - - - (1)

দেয়া আছে, (1,–2) বিন্দু থেকে (1)- এর দূরত্ব =7 একক।

i.e. $\pm \frac{3.1+4(-2)+k}{\sqrt{9+16}} = 7.$

$\Rightarrow \pm \frac{3-8+k}{\sqrt{25}} = 7$

$\Rightarrow \pm \frac{k-5}{5} = 7$

$\Rightarrow \pm(k-5) = 35.$

$\Rightarrow k-5 = 35$ ['+' চিহ্ন নিয়ে]

$\therefore k = 40$

এবং $-(k-5) = 35$ ['—' চিহ্ন নিয়ে]

$\Rightarrow -k+5 = 35.$

$\Rightarrow k=-30.$

$\therefore$ (1) নং এ k- এর মান বসিয়ে

$3x+4y+40=0$

এবং $3x+4y-30=0$

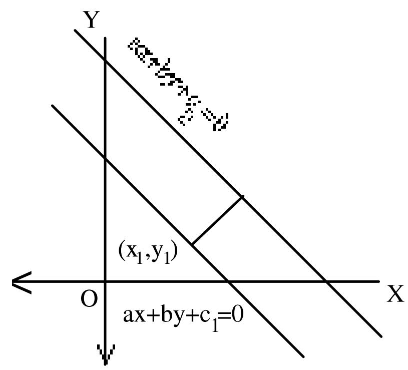
ইহাই নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ।

সমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব

মনে করুন, $ax+by+c_1=0$ এবং $ax+by+c_2=0$ দুটি সমান্তরাল রেখার সমীকরণ। তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করতে হবে।

$ax+by+c_1=0$ - - - - - - - - - - (1)

$ax+by+c_2=0$ - - - - - - - - - - (2)



(1) নং রেখার উপর যে কোন একটি বিন্দু (x_1,y_1) নিন। সুতরাং আমরা পাই,

$ax_1+by_1+c_1=0$ - - - - - - - - - - (3)

পূর্ববর্তী পাঠের সাহায্যে, (x_1,y_1) বিন্দু থেকে (2) নং রেখার লম্ব দূরত্ব $=\dfrac{|ax_1+by_1+c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$=\dfrac{|-c_1+c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ [(3)- এর সাহায্যে]

$=\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

অর্থাৎ দুটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\dfrac{|\text{ধ্রুবকদ্বয়ের পার্থক্য}|}{(x\text{-এর সহগ})^2+(y\text{-এর সহগ})^2}$

উদাহরণ 7 ঃ $4x+3y-3=0$ ও $4x+3y-1=0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে $4x+3y-3=0$ - - - - - - - - (1)

এবং $4x+3y-1=0$ - - - - - - - - (2)

$\therefore$ (1) ও (2) নং রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল,

তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\dfrac{|-3-(-1)|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|-3+1|}{\sqrt{25}}$

$=\dfrac{2}{5}$ একক।

উদাহরণ 8 ঃ $4x+3y+5=0$ এবং $12x+9y+5=0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে $4x+3y+5=0$ - - - - - - - - (1)

এবং $12x+9y+5=0$

$$\Rightarrow \quad 4x+3y+\frac{5}{3}=0 \text{ - - - - - - - - - } (2)$$

(1) ও (2) রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \dfrac{|\,5-\frac{5}{3}\,|}{\sqrt{4^2+5^2}} = \dfrac{\frac{10}{3}}{5} = \dfrac{10}{3} \infty \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{3}$ একক।

উদাহরণ 9 ঃ $3x-4y+2=0$ ও $6x-8y-9=0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?

সমাধান ঃ $3x-4y+2=0$ - - - - - - - - - (1)

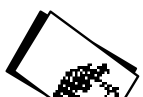
এবং $6x-8y-9=0$

$$\Rightarrow \quad 3x-4y-\frac{9}{2}=0 \text{ - - - - - - - } (2)$$

$\therefore$ (1) ও (2) নং সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$= \frac{|\,2-(-\frac{9}{2})\,|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{\frac{13}{2}}{\sqrt{25}}$$

$= \dfrac{13}{2.5} = \dfrac{13}{10}$ একক।



অনুশীলনী-১০.৭

1. (2,2) বিন্দু হলে $3x+4y=6$ সরলরেখার লম্বদূরত্ব নির্ণয় করুন।
2. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ রেখা হতে (a,b) বিন্দুর লম্বদূরত্ব কত?
3. দেখান যে, (5,4) বিন্দু হতে $2x+3y-7=0$ এবং $3x-2y+8=0$ রেখাদ্বয় সমদূরবর্তী।
4. $2x-\sqrt{5}\,y+7=0$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখা $(\sqrt{5}\,,-4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। মূলবিন্দু থেকে লম্বরেখার দূরত্ব কত?
5. (0,5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত এবং মূলবিন্দু থেকে 3 একক লম্বদূরত্বে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
6. (2,–1) বিন্দু থেকে $3x-4y+5=0$ রেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করুন। এর সাহায্যে লম্বের দৈর্ঘ্য বের করুন।
7. (3,–2) ও (–3, –1) বিন্দুদ্বয় $3x-8y=7$ রেখার একই অথবা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত কিনা নির্ণয় করুন। বিন্দুদ্বয়ের কোনটি রেখাটির যে পার্শ্বে ঠিক সেই পার্শ্বে অবস্থিত।
8. প্রমাণ করুন যে, $(\pm\sqrt{a^2-b^2}\,,0)$ বিন্দুদ্বয় থেকে $\dfrac{x}{a}\cos\theta+\dfrac{y}{b}\sin\theta=1$ এর উপর অংকিত লম্বদ্বয়ের গুণফল b^2 হবে।
9. দেখান যে, $(\sqrt{5}\,,0)$, $(-\sqrt{5}\,,0)$ বিন্দুদ্বয় থেকে $2x\cos\alpha-3y\sin\alpha=6$ এর উপর অংকিত লম্বদ্বয়ের গুণফল x মুক্ত হবে।
10. x ও y অক্ষের সাপেক্ষে (–2, 3) বিন্দুর প্রতিবিম্ব দুটি নির্ণয় কর।
11. $3x-4y+4=0$ ও $6x-8y-9=0$ রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করুন।
12. দেখান যে, $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $K_1(a_1x+by_1)+d_1=0$ সমান্তরাল যুগলের মধ্যবর্তী দূরত্ব
$$=\left(\frac{d_1}{k_1}-c_1\right)\quad\sqrt{a_1{}^2+b_1{}^2}\,.$$

পাঠ ৯ দুইটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

উদ্দেশ্য

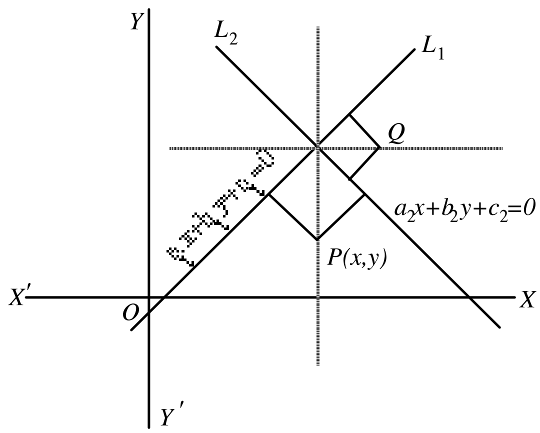
এই পাঠ শেষে আপনি-

- দুটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডকসমূহের সমীকরণ নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

মনে করুন, দুটি সরলরেখা

$L_1 = a_1x+b_1y+c_1=0$ - - - - - - - (1)

এবং $L_2 = a_2x+b_2y+c_2 = 0$ - - - - - - (2)



(1) ও (2) এর অন্তর্ভুক্ত কোণের একটি সমদ্বিখন্ডকের উপর P(x,y) যেকোন একটি বিন্দু নিন।

$$\text{P বিন্দু থেকে (1)- এর লম্ব দূরত্ব} = \frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}$$

$$\text{এবং P বিন্দু থেকে (2) এর লম্ব দূরত্ব} = \frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

$\therefore$ দূরত্বদ্বয় সমান, অতএব আমরা পাই

$$\frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \text{ - - - - - - - (3)}$$

❒ প্রদত্ত দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ সমূহের লম্বদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে।

❒ যদি $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ সমীকরণদ্বয়ের ধ্রুবক সংখ্যা c_1 ও c_2 একই চিহ্নবিশিষ্ট হয় তবে, (3) এর '+' (ধনাত্মক) চিহ্নটি সমদ্বিখন্ডককে নির্দেশ করে, যখন মূলবিন্দুটি কোণের অন্তর্ভুক্ত হয় এবং '—' (ঋণাত্মক) চিহ্নটি অন্য সমদ্বিখন্ডককে নির্দেশ করে। আবার যদি c_1 ও c_2 পরস্পর বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হয় তাহলে (3)-এর '—' (ঋণাত্মক) চিহ্নটি কোণের সমদ্বিখন্ডককে নির্দেশ করে যখন মূলবিন্দুটি কোণের অন্তর্ভুক্ত হয় এবং '+' (ধনাত্মক) চিহ্নটি অপর সমদ্বিখন্ডককে সূচিত করে।

উদাহরণ 1 ঃ দেখান যে, $8x+16y=39$ রেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু $4x+3y=7$ এবং $2y-5=0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।

সমাধান ঃ প্রশ্নানুসারে, ইহা সুস্পষ্ট যে, $3x+2y=5$ রেখাটি $4x+3y=7$ ও $2y-5=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের একটি সমদ্বিখন্ডক।

রেখাদ্বয়ের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$$\frac{4x+3y-7}{\sqrt{4^2+3^2}} = \pm\frac{2y-5}{\sqrt{0^2+2^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{4x+3y-7}{5} = \pm\frac{2y-5}{2}$$

$$\Rightarrow 8x+6y-14=\pm(10y-25)$$

$\Rightarrow 8x-2y+11=0$ ['+' চিহ্ন নিয়ে]

এবং $8x+16y-39=0$ ['+' চিহ্ন নিয়ে]

$\therefore$ প্রদত্ত $8x+16y=39$ রেখাটি, অপর দুটি রেখার অন্তর্ভুক্ত কোণসমূহের সমদ্বিখন্ডকের একটি।

$\therefore$ $8x+16y=39$ সরলরেখাটির যে কোন বিন্দু হতে অপর রেখা দুটি সমদূরবর্তী।

উদাহরণ 2 ঃ $3x-4y=2$ এবং $4x-3y=-1$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় ঃ $3x-4y-2=0$ - - - - - - - (1)

$4x-3y+1=0$ - - - - - - - (2)

এখানে $a_1a_2+b_1b_2=3.4+(-4).(-3)=7+12=19>0$

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক $=\dfrac{3x-4y-2}{\sqrt{3^2+4^2}} = -\dfrac{4x-3y+1}{\sqrt{4^2+3^2}}$,

[$a_1a_2+b_1b_2>0$ বলে '—' চিহ্ন নিয়ে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক]

$$\Rightarrow 3x-4y-2=-(4x-3y+1)$$

$$\Rightarrow 7x-7y-1=0$$

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদাহরণ- 3 ঃ $5(x+y)=12$ ও $x+7y=3$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থূলকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় ঃ

$5(x+y)-12=0$ - - - - - - - (1)

$x+7y-3=0$ - - - - - - - - - (2)

এখানে $a_1a_2+b_1b_2=5.1+5.7=40>0$

$\therefore$ স্থূলকোণের সমদ্বিখন্ডক $=\dfrac{5x+5y-12}{\sqrt{5^2+5^2}} = +\dfrac{x+7y-3}{\sqrt{1+7^2}}$

$$\Rightarrow \frac{5x+5y-12}{5\sqrt{2}} = +\frac{x+7y-3}{5\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 5x+5y-12=x+7x-3$$

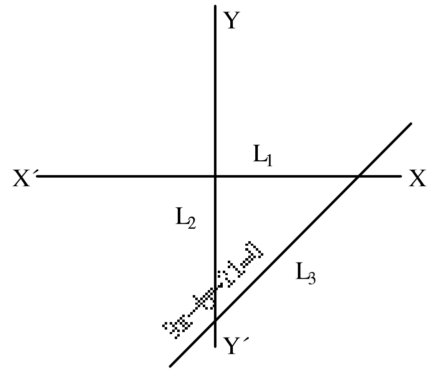
$$\Rightarrow 4x-2y=9$$

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

[$a_1a_2+b_1b_2>0$ বলে '+' চিহ্ন নিয়ে স্থূলকোণের সমদ্বিখন্ডক]

উদাহরণ-4 ঃ অক্ষদ্বয় ও $3x-4y=21$ রেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের কোণদ্বয়ের বহির্দ্বিখন্ডক সমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ



মনে করুন x অক্ষের সমীকরণ $L_1 = y = 0$

y অক্ষের সমীকরণ $L_2 = x = 0$

এবং $L_3 = 3x–4y–21 = 0$

L_1 ও L_2 এর বহির্দ্বিখন্ডক

$y = x \tan 45°$

$\therefore\ y = x$

L_2 3 L_3 এর ক্ষেত্রে

$1.3+0.(–4) = 3>0$

$\therefore$ বহিঃ কোণ স্থূল

$\therefore$ বহিদ্বিখন্ডক $x = +\dfrac{3x–4y–21}{\sqrt{3^2+4^2}}$

বা, $x = +\dfrac{3x–4y–21}{5}$

$\therefore\ 2x+4y+21 = 0$

L_3 ও L_1 এর ক্ষেত্রে, $a_1a_2 + b_1b_2 = 1.(–4) = –4 <0$

$\therefore$ বহিঃকোণ স্থূল

$\therefore$ বহিদ্বির্খন্ডক $y = –\dfrac{3x–4y–21}{\sqrt{3^2+4^2}}$

$\Rightarrow\ 3x+y–21 = 0$

অনুশীলনী-১০.৮

1. $3x–4y=2$ ও $4x–3y=–1$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
2. $4y–3x=3$ ও $3y–4x=5$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থূলকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
3. দেখান যে, $7x–9y+10=0$ রেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু $3x+4y–5=0$ এবং $12x+5y–7=0$ রেখাদ্বয় থেকে সমদূরবর্তী।
4. $4x–4y+3=0$ এবং $x+7y–2=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণসমূহের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করুন। প্রমাণ করুন যে, দ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব।
5. একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক $(–3,1)$ এবং ভূমির সমীকরণ $x+7y+6=0$। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

এক নজরে এই ইউনিটের সংক্ষিপ্ত বিষয়বস্তু ঃ

1. (x_1,y_1) ও (x_2,y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$
2. (i) x- অক্ষের সমীকরণ, $y=0$
   (ii) y- অক্ষের সমীকরণ $x=0$
   (iii) x- অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $y=b$
   (iv) y- অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $x=a$.
3. m ঢাল বিশিষ্ট ও y- অক্ষ থেকে C একক অংশ কর্তিত সরলরেখার সমীকরণ $y=mx+C$, $C=0$ হলে, উক্ত সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী হবে।
4. m ঢাল বিশিষ্ট ও (x_1,y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y-y_1=m(x-x_1)$
5. x- অক্ষ থেকে a এবং y অক্ষ থেকে b একক দৈর্ঘ্য কর্তনকারী সরললেখার সমীকরণ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.
6. (x_1,y_1) ও (x_2,y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{x-x_1}{x_1-x_2}=\dfrac{y-y_1}{y_1-y_2}$.
7. $\tan\theta$ ঢাল বিশিষ্ট রেখার উপরস্থ (x_1,y_1) বিন্দু থেকে (x,y) বিন্দুর দূরত্ব r হলে, রেখাটির সমীকরণ $\dfrac{x-x_1}{\cos\theta}=\dfrac{y-y_1}{\sin\theta}=r$.
8. মূলবিন্দু থেকে কোন রেখার লম্বদূরত্ব P এবং উহা x- অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে, সরলরেখাটির সমীকরণ, $x\cos\alpha+y\sin\alpha=P$.
9. সরল রেখার সাধারণ সমীকরণ $ax+by+c=0$
10. দুটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $a_1x+b_1y+c_1+\lambda\,(a_2x+b_2y+c_2)=0$, $\lambda\neq 0$.
11. দুটি সরলরেখার ঢাল m_1 ও m_2 হলে, উহারা
    i) পরস্পর সমান্তরাল হবে যদি $m_1=m_2$ হয়
    (ii) পরস্পর লম্ব হবে যদি $m_1m_2=-1$ হয়।
12. (i) $ax+by+c=0$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $ax+by+k=0$.
    (ii) $ax+by+c=0$ সরলরেখার সাথে লম্ব সরলরেখার সমীকরণ $bx-ay+k=0$.
13. m_1 ও m_2 ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে, $\tan\theta=\pm\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$.
14. (x_1,y_1) বিন্দু হতে $ax+by+c=0$ রেখার দূরত্ব $=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
15. $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণসমূহের সমদ্বিখন্ডকদ্বয়ের সমীকরণ হবে, $\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\dfrac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

উত্তরমালা

অনুশীলনী-১০.১

1. (i) 3 (ii) $\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{k}{h}$ (iv) $\frac{2}{h+k}$
2. (a) 1, (b) –1, (c) 0 (d) □

অনুশীলনী-১০.২

1. $y=5$.
2. $x=4$
4. $y=\sqrt{3}\,x$.
6. $\frac{x}{12}+\frac{y}{5}=1$, $\frac{x}{5}+\frac{y}{12}=1$, $\frac{x}{-12}+\frac{y}{-5}=1$.
7. $P=\frac{7}{15}$.
8. $2x-3y+19=0$.
9. $3x-20y+72=0$.
10. $x+y=4$, $3x+y=6$.

11. $\sqrt{3}\,x+y=8.$ 12. $5x-4y+20=0.$

অনুশীলনী-১০.৩

4. $7(x-y)=0$ 5. $7x+3y-23=0$

6. $y=x.$ 7. $27x-23y=0.$

অনুশীলনী-১০.৪

1. 90° 2. $x+4y=11, \tan^{-1}\frac{5}{3}$, $\tan^{-1}\frac{9}{2}$

অনুশীলনী-১০.৫

1. $6x-5y-17=0$ 2. $7x-8y+9=0$

3. $x+2y-5=0$

4. (i) $\lambda=3$ (ii) $\lambda=-\frac{29}{37}$

5. (i) $2x-y=4$ (ii) $3x-4y-1=0$

6. (i) $13x-23=0$

(ii) $-65x+39y=196.$

অনুশীলনী-১০.৬

2. $P=2.$ 3. $a=5.$

4. $\frac{1}{2}\frac{(c_1-c_2)^2}{m_1-m_2}$

অনুশীলনী-১০.৭

1. $\frac{8}{3}$ একক 2. $\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ একক।

4. 1 একক। 5. $\pm\, 4x-3y+15=0$

7. $(-3, -1)$ বিন্দুটি বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। 10. $(-2, -3), (2, 3)$

11. $\frac{17}{10}$ একক।

অনুশীলনী-১০.৮

1. $7x-7y-1=0$ 2. $x+y+2=0$

5. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ বর্গ একক।