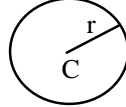


বৃত্ত

ভূমিকা

স্কুল পর্যায়ে কম্পাস-পেন্সিল দিয়ে বৃত্ত কিভাবে অঙ্কন করা হয় - তা শেখানো হয়েছে। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমান দূরত্ব রেখে একটি বিন্দুর যে সঞ্চারণপথ আঁকা হয় - তাকেই বৃত্ত বলা হয়েছে। ছবিতে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু C থেকে r দূরত্ব রেখে একটি বৃত্ত আঁকা হয়েছে। এখন নিম্ন মাধ্যমিক শ্রেণীতে স্থানাংকের মাধ্যমে বৃত্তের সংজ্ঞা দেয়া হয়েছে।



সংজ্ঞা : একটি ক্রমজোড়ের $(IR \propto R)$ এর সমতলে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হতে সমান দূরত্বে বিন্দুগুচ্ছের সঞ্চারণপথকে বৃত্ত বলে।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- স্থানাংকের সাহায্যে বৃত্তের সংজ্ঞা বর্ণনা করতে পারবেন।
- বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাংক ও ব্যাসার্ধ দেয়া থাকলে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন।
- বৃত্তের আদর্শ ও সাধারণ সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন।
- বিভিন্ন শর্তাধীনে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন।
- এফ, আর খলীফা পদ্ধতিতে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন।
- বৃত্তের ছেদক, স্পর্শক সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন।



নির্দিষ্ট কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ



উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- নির্দিষ্ট কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ দেয়া থাকলে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন।

নির্দিষ্ট কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

প্রথম পদ্ধতি

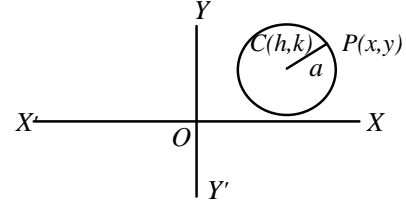
মনে করুন $C(h,k)$ একটি নির্দিষ্ট কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ, $CP=a$. ধরুন, P বিন্দুর স্থানাংক (x,y) .

$$\therefore CP = a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = a \quad [\text{দুই বিন্দুর দূরত্বের সূত্র প্রয়োগ}]$$

$$\Rightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

ইহাই নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ।



দ্বিতীয় পদ্ধতি :

মনে করুন, $C(h,k)$ একটি নির্দিষ্ট কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ $CP=a$ ধরুন, P বিন্দুর স্থানাংক (x,y) .এখন, x - অক্ষের উপর CM ও PN এবং PN এর উপর CA লম্ব অঙ্কন করুন।

$$\therefore OM = h, ON = x$$

$$\therefore MN = CA = x-h \quad \text{----- (i)}$$

এবং $CM = k, PN = y$.

$$\therefore AP = PN - AN$$

$$= PN - CM$$

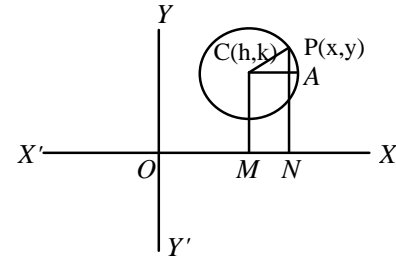
$$= y - k \quad \text{----- (2)}$$

 \therefore সমকোণী ত্রিভুজ ACP থেকে, পীথাগোরাসের সূত্র অনুসারে-

$$AC^2 + AP^2 = CP^2$$

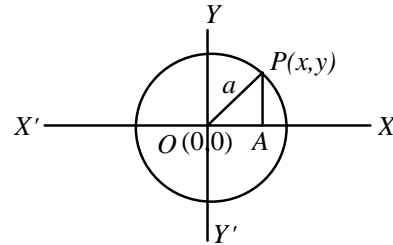
$$\Rightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2 \quad \text{----- (3) [(1), (2)- এর সাহায্যে]}$$

ইহাই নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ।

অনুসিদ্ধান্ত : কেন্দ্র মূলবিন্দু হলে, $h=0, k=0$; তখন বৃত্তের

সমীকরণ

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

উদাহরণ 1 : বৃত্তের কেন্দ্র $(4,5)$ ও ব্যাসার্ধ 10 একক হলে, বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : আমরা জানি, বৃত্তের সমীকরণ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

এখানে, $h=4, k=5$ এবং $a=10$.

$$\therefore \text{বৃত্তটির সমীকরণ, } (x-4)^2 + (y-5)^2 = 10^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 100$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 10y - 59 = 0$$

ইহাই নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ।

উদাহরণ-২ : একটি বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং ব্যাসার্ধ ৪ একক হলে, বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : আমরা জানি, মূলবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2=a^2$ ----- (i)

এখানে, ব্যাসার্ধ = ৪

অতএব (i) হতে পাই

$$\Rightarrow x^2+y^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = 16$$

ইহাই নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ।

উদাহরণ-৩ : একটি বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাংক (α, β) এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : আমরা জানি (h, k) কেন্দ্র এবং a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$

অতএব (α, β) কেন্দ্র এবং $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ হবে,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(\sqrt{\alpha^2-\beta^2})^2$$

$$\text{বা, } x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2\beta y+\beta^2 = \alpha^2-\beta^2$$

$$\text{বা, } x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+2\beta^2 = 0$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমীকরণ, } x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+2\beta^2 = 0$$

উদাহরণ-৪ : একটি বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাংক $(-3, 4)$ এবং ব্যাসার্ধ ৫, বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : $(-3, 4)$ এবং ৫ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ হবে, $(x+3)^2+(y-4)^2 = 5^2$

$$\text{বা, } x^2+6x+9+y^2-8y+16 = 25$$

$$\text{বা, } x^2+y^2+6x-8y = 0$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, } x^2+y^2+6x-8y = 0$$

উদাহরণ-৫ : এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার কেন্দ্রের স্থানাংক $(5, 5)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং বৃত্তটি $(8, 9)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

সমাধান : মনে করুন $(5, 5)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $(x-5)^2 + (y-5)^2 = a^2$ ----- (1) এখানে a ব্যাসার্ধ।

যেহেতু বৃত্তটি $(8, 9)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে

$$\text{অতএব } (8-5)^2 + (9-5)^2 = a^2$$

$$\text{বা, } 3^2+4^2 = a^2 \Rightarrow a=5$$

$$\text{অতএব নির্ণেয় বৃত্ত, } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

$$\text{বা, } x^2-10x+25+y^2-10y+25 = 25$$

$$\therefore x^2+y^2-10x-10y+25 = 0$$

উদাহরণ-৬ : যে বৃত্তের কেন্দ্র $(3, -5)$ বিন্দুতে এবং যা $(1, -2)$ বিন্দু দিয়ে যায়, তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করুন নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ a , অতএব বৃত্তের সমীকরণ হবে,

$$(x-3)^2+(y+5)^2=a^2 \text{ --- (1)}$$

আবার যেহেতু বৃত্তটি $(1, -2)$ বিন্দু দিয়ে যায়-

$$\therefore (1-3)^2 + (-2+5)^2 = a^2$$

$$\Rightarrow a^2=13$$

∴ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ হবে,

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 13$$

বা, $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 = 13$

$$\therefore x^2 + y^2 - 6x + 10y + 21 = 0$$

অনুশীলনী-১১.১

1. একটি বৃত্তের কেন্দ্র (4,5) এবং ব্যাসার্ধ 7, বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
2. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(-a, -a)$ এবং ব্যাসার্ধ a , বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।



বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ



উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ নির্ণয় ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

পূর্ববর্তী পাঠ থেকে আপনারা জানেন

(h, k) কেন্দ্র ও a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2.$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - a^2 = 0 \text{ ----- (1)}$$

ধরুন, $-h = g$, $-k = f$, $h^2 + k^2 - a^2 = C$.

অতএব (1) সমীকরণটি দাঁড়ায়,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + C = 0 \text{ ----- (2)}$$

ইহাই বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ।

∴ বৃত্তটির কেন্দ্র = (h, k)

$$= (-g, -f)$$

আবার, $h^2 + k^2 - a^2 = C$

$$\Rightarrow (-g)^2 + (-f)^2 - a^2 = C$$

$$\Rightarrow a^2 = g^2 + f^2 - C$$

$$\therefore a = \sqrt{g^2 + f^2 - C} \quad [\text{ব্যাসার্ধ ঋণাত্মক হতে পারে না}]$$

মনে রাখার বিষয় :

- | |
|--|
| <p>(i) বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + C = 0$ এর কেন্দ্র $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - C}$</p> <p>(ii) বৃত্তে x^2 ও y^2- এর সহগ সমান এবং xy- এর পদ অনুপস্থিত।</p> |
|--|

অক্ষদ্বয় থেকে খণ্ডিত অংশ

মনে করুন, বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + C = 0$ ----- (i)

(i) বৃত্তটি x অক্ষকে ছেদ করলে, x- অক্ষের উপর $y = 0$,

(i) নং বৃত্তে $y = 0$ বসিয়ে, $x^2 + 2gx + C = 0$

ইহা x- এর সাপেক্ষে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। ইহার দুটি মূল

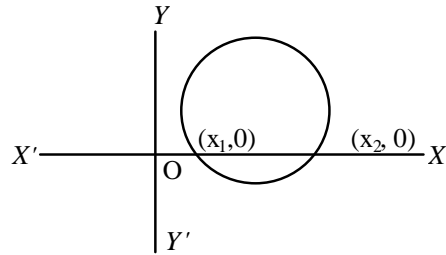
আছে। মনে করুন, মূলদ্বয় x_1 ও x_2 .

$$\therefore \text{মূলদ্বয়ের যোগফল, } x_1 + x_2 = -2g$$

$$\text{এবং মূলদ্বয়ের গুণফল } x_1 x_2 = C.$$

$$\begin{aligned} \therefore |x_1 - x_2| &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \\ &= \sqrt{4g^2 - 4C} \\ &= 2\sqrt{g^2 - C} \end{aligned}$$

$$\therefore x\text{- অক্ষ থেকে খণ্ডিত অংশ} = 2\sqrt{g^2 - C} \text{ একক।}$$



(ii) বৃত্তটি y অক্ষকে ছেদ করলে, y অক্ষের উপর $x=0$. সুতরাং (1) নং বৃত্তে $x=0$ বসিয়ে, আমরা পাই,
 $y^2+2fy+C=0$
 ইহা y -এর সাপেক্ষে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। ইহার দুটি মূল আছে। ধরুন,
 মূলদ্বয় y_1 ও y_2 ।

$$\therefore \text{মূলদ্বয়ের যোগফল, } y_1+y_2 = -2f$$

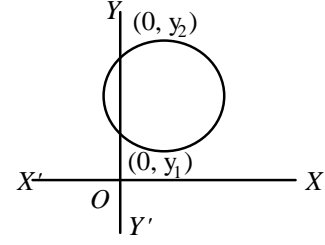
$$\text{এবং মূলদ্বয়ের গুণফল, } y_1y_2 = C.$$

$$\therefore |y_1-y_2| = \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2}$$

$$= \sqrt{4f^2 - 4C}$$

$$= 2\sqrt{f^2 - C}$$

$$\therefore y\text{-অক্ষ থেকে খন্ডিত অংশ} = 2\sqrt{f^2 - C} \text{ একক।}$$



উদাহরণ 1 : $x^2+y^2+5x+8y-1=0$ বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

সমাধান : দেয়া আছে, $x^2+y^2+5x+8y-1=0$ ----- (1)

(1) নং সমীকরণকে সাধারণ সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+C=0$ -এর সাথে তুলনা করে আমরা পাই, $g=5/2, f=4$ এবং C
 $=-1$.

$$\therefore \text{বৃত্তটির কেন্দ্র} = (-g, -f)$$

$$= \left(-\frac{5}{2}, -4\right)$$

$$\text{এবং ব্যাসার্ধ} = \sqrt{g^2+f^2-C}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (4)^2 - (-1)}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{4} + 16 + 1} = \frac{\sqrt{93}}{2} \text{ একক।}$$

উদাহরণ 2 : $x^2+y^2+6x+4y-1=0$ বৃত্তটির কেন্দ্রগামী এবং (1,1) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : দেয়া আছে, $x^2+y^2+6x+4y-1=0$ ----- (1)

$$\text{বৃত্তটির কেন্দ্র} = (-3, -2)$$

আবার, নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র (1, 1)

$$\therefore \text{নির্ণেয় বৃত্তটির ব্যাসার্ধ} = \sqrt{(1+3)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ একক।}$$

অতএব নির্ণেয় বৃত্তটির সমীকরণ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5^2$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2x-2y-23=0$$

উদাহরণ-3 : $x^2+y^2 = \alpha(x+\alpha)$ বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাংক ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $x^2+y^2 = \alpha(x+\alpha)$ কে নিম্নরূপে লেখা যায়,

$$x^2+y^2-\alpha x-\alpha^2 = 0$$

$$\text{বা, } x^2-2\cdot\frac{\alpha}{2}x + \frac{\alpha^2}{4} + y^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \alpha^2$$

$$\text{বা, } \left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{\sqrt{5\alpha}}{2}\right)^2$$

অতএব নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাংক $\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \frac{\sqrt{5\alpha}}{2}$

উদাহরণ-৪ : $4x^2+4y^2+16x-24y+3=0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাংক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণকে, বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ, $x^2+y^2+2gx+2fy+C=0$ রূপে প্রকাশ করলে সমীকরণটি হবে, $x^2+y^2+4x-6y+\frac{3}{4}=0$

\therefore কেন্দ্রের x স্থানাংক, অর্থাৎ $g = -\frac{1}{2} \times 4$ এর সহগ $= -2$

কেন্দ্রের y স্থানাংক, অর্থাৎ $f = -\frac{1}{2} \times 6$ এর সহগ $= 3$

$$\begin{aligned} \text{এবং ব্যাসার্ধ} &= \sqrt{g^2+f^2-C} \\ &= \sqrt{(-2)^2+(3)^2-\frac{3}{4}} \\ &= \sqrt{4+9-\frac{3}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{16+36-3}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

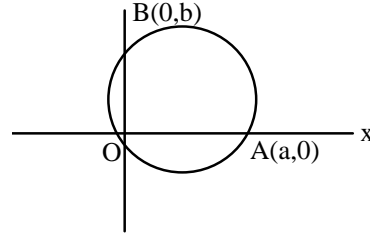
অতএব নির্ণয় কেন্দ্রের স্থানাংক $(-2, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \frac{7}{2}$

উদাহরণ-৫ : মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী এবং অক্ষদ্বয় হতে a এবং b অংশ ছেদকারী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন বৃত্তটি অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। A এবং B এর স্থানাংক যথাক্রমে $(a,0)$ এবং $(0, b)$

যেহেতু $\angle AOB = 90^\circ$ এবং AB এই বৃত্তের ব্যাস, অতএব নির্ণয় বৃত্তের সমীকরণ

$$\begin{aligned} (x-a)(x-0)+(y-0)(y-b) &= 0 \\ \Rightarrow x^2-ax+y^2-by &= 0 \\ \therefore x^2+y^2-ax-by &= 0 \end{aligned}$$



উদাহরণ-৬ : একটি বৃত্ত $(1, -2)$ এবং $(4, -3)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং এর কেন্দ্র $3x+4y=7$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন নির্ণয় বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2+2gx+2fy+C=0$ ----- (1)

যেহেতু (1) বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$; $3x+4y=7$ রেখার উপর অবস্থিত, অতএব কেন্দ্রের স্থানাংক সরলরেখার সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।

$$\therefore -3g-4f=7$$
 ----- (2)

আবার বৃত্তটি $(1, -2)$ এবং $(4, -3)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে

$$\text{অতএব } 1+(-2)^2+2g+2f(-2)+C=0$$

$$\Rightarrow 5+2g-4f+C=0$$
 ----- (3)

$$\text{এবং } 16+9+2g.4+2f(-3)+C=0$$

$$\Rightarrow 25+8g-6f+C=0$$
 ----- (4)

(4) থেকে (3) বিয়োগ করলে

$$\Rightarrow 20+6g-2f=0$$

$$\Rightarrow 3g - f = -10 \text{ ----- (5)}$$

(2) এবং (5) সমাধান করে,

$$f = \frac{3}{5}, g = -\frac{47}{15}, C = \frac{55}{15}$$

g, f এবং C এর মান (i) সমীকরণে বসিয়ে,

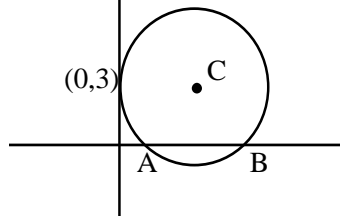
$$x^2 + y^2 + 2 \cdot \left(-\frac{47}{15}\right) \cdot x + 2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right) \cdot y + \frac{55}{15} = 0$$

$$\therefore 15(x^2 + y^2) - 94x + 18y + 55 = 0$$

উদাহরণ-7 : এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা, y - অক্ষকে $(0, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং x - অক্ষ হতে ৪ একক দীর্ঘ একটি জ্যা খণ্ডিত করে।

সমাধান : মনে করুন বৃত্তটির সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + C = 0$ ----- (1)

যেহেতু বৃত্তটি y -অক্ষকে $(0, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে



$$\therefore y^2 + 2fy + C = (y-3)^2$$

$$\Rightarrow y^2 + 2fy + C = y^2 - 6y + 9$$

উভয় পক্ষ থেকে y এর সহগ এবং ধ্রুবক সংখ্যা তুলনা করে পাই,

$$f = -3, C = 9$$

x অক্ষ হতে খণ্ডিত অংশ,

$$\Rightarrow 2\sqrt{g^2 - C} = 8$$

$$\therefore \sqrt{g^2 - C} = 4$$

$$\therefore g^2 - C = 16$$

$$g^2 + 9 = 16$$

$$\therefore g^2 = 25 \quad \text{or} \quad g = \pm 5$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমীকরণ, } x^2 + y^2 \pm 10x - 6y + 9 = 0$$

অনুশীলনী-১১.২

1. নিম্নের প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ থেকে কেন্দ্রের স্থানাংক ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

(i) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

(ii) $9(x^2 + y^2) - 18x - 6y - 26 = 0$

(iii) $2x^2 + 2y^2 = x$

2. $(1, -2)$ বিন্দুগামী $(9, 4)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।



বিভিন্ন শর্তে বৃত্তের সমীকরণ



উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বিভিন্ন শর্তে সাপেক্ষে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন।

মূলবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ

(h, k) কেন্দ্র ও a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2 \text{ ----- (1)}$$

কিন্তু ইহা মূলবিন্দু $(0,0)$ দিয়ে যায় তাহলে

$$\therefore (0-h)^2+(0-k)^2=a^2$$

$$\therefore h^2+k^2=a^2$$

$\therefore (h, k)$ - এর সম্ভাব্যপথ $x^2+y^2=a^2$ যাহা একটি বৃত্তের সমীকরণ।

বৃত্তটির কেন্দ্র $(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $=a$.

□ a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট, কেন্দ্র x অক্ষের উপর অবস্থিত ও মূল বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ

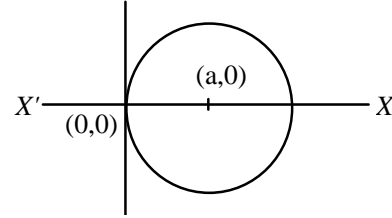
যেহেতু বৃত্তের কেন্দ্র x অক্ষের উপর অবস্থিত, বৃত্তের কেন্দ্র $(a, 0)$ আকারের হবে। আবার, বৃত্তটি মূলগামী, সুতরাং তার ব্যাসার্ধ a হবে।

\therefore বৃত্তটির সমীকরণ

$$(x-a)^2+(y-0)^2=a^2$$

$$x^2+y^2-2ax=0$$

ইহাই নির্ণয়ে বৃত্তের সমীকরণ।



□ কেন্দ্র y - অক্ষের উপর অবস্থিত, মূলবিন্দুগামী, a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

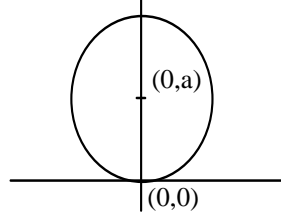
বৃত্তটির কেন্দ্র $(0, a)$ আকারের এবং মূলবিন্দুগামী বলে ব্যাসার্ধ a

একক।

$$\therefore \text{ বৃত্তটির সমীকরণ, } (x-0)^2+(y-a)^2=a^2$$

$$\therefore x^2+y^2-2ay=0$$

ইহাই নির্ণয়ে বৃত্তের সমীকরণ।



□ a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট, x - অক্ষ স্পর্শকারী বৃত্তের সমীকরণ

যেহেতু বৃত্তটি x - অক্ষকে স্পর্শ করে, তার কোটি ব্যাসার্ধের সমান। সুতরাং কেন্দ্রের কোটি $=a$ এবং ধরুন, তার ভূজ h ।

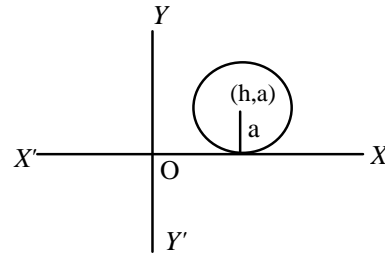
\therefore বৃত্তটির কেন্দ্র (h, a) , ব্যাসার্ধ $=a$

\therefore বৃত্তটির সমীকরণ হবে

$$(x-h)^2+(y-a)^2=a^2$$

$$x^2+y^2-2hx-2ay+h^2=0$$

ইহাই নির্ণয়ে বৃত্তের সমীকরণ।



□ a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট, y - অক্ষ স্পর্শকারী বৃত্তের সমীকরণ

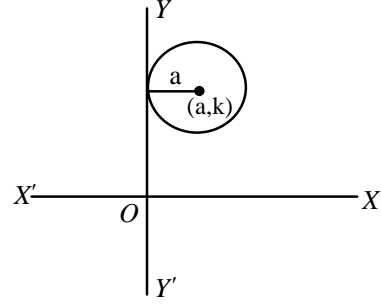
যেহেতু বৃত্তটি y - অক্ষকে স্পর্শ করে, তার কেন্দ্রের ভূজ হবে ব্যাসার্ধের সমান। সুতরাং বৃত্তটির ভূজ a এবং ধরুন, কোটি = k .

∴ বৃত্তটির কেন্দ্র (a, k) এবং

তার সমীকরণ $(x-a)^2 + (y-k)^2 = a^2$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ky + k^2 = 0$$

ইহাই নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ।



□ a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট, উভয় অক্ষকে স্পর্শকারী বৃত্তের সমীকরণ

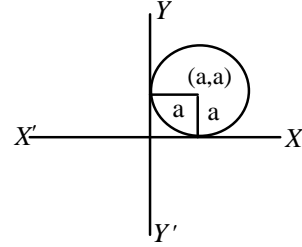
যেহেতু বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে, বৃত্তটির কেন্দ্রের ভূজ ও কোটি ব্যাসার্ধের সমান। সুতরাং বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাংক = (a, a) .

∴ বৃত্তটির সমীকরণ,

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$$

ইহাই নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ।



□ ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাংক দেয়া আছে এমন বৃত্তের সমীকরণ

মনে করুন, AB একটি ব্যাস। তার প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাংক $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ । পরিধির উপর যেকোন $P(x, y)$ নিন। AP ও BP যোগ করি। সুতরাং $\square APB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এবং তার পরিমাণ এক সমকোণ।

∴ $AP \perp PB$.

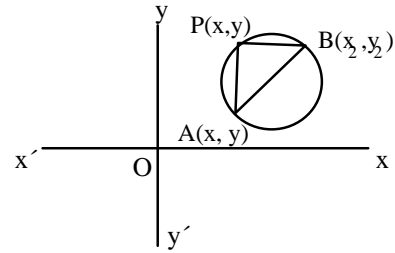
এখন AP - এর ঢাল * PB - এর ঢাল = -1 .

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} \cdot \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1.$$

$$(y-y_1)(y-y_2) = -(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\therefore (x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$$

ইহাই নির্ণেয় বৃত্তটির সমীকরণ।



□ এ. আর. খলিফা পদ্ধতিতে দুই বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ।

যদি দুটি বিন্দুর স্থানাংক (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) হয়, তবে বাংলাদেশের প্রখ্যাত গণিতবিদ আজিজুর রহমান খলিফা (এ. আর. খলিফা) ঐ দুই বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ এমনভাবে নির্ণয় করেছেন যেন x^2 এবং y^2 এর সহগ সমান হয় এবং xy - সম্বলিত পদ মুক্ত হয়।

তিনি দেখিয়েছেন যে, বৃত্তের সমীকরণ $S + (x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$

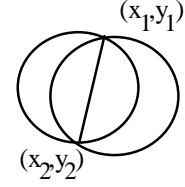
তিনি (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

নির্ণয় করলেন যেন এতে x^2, y^2, xy ধারী কোন পদ না আসে, এবং রেখার সমীকরণ পেলেন

$$L + (x-x_1)(y-y_2) - (x-x_2)(y-y_1) = 0$$

$\therefore (x_1, y_1)$ এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী বৃত্তদলের সাধারণ সমীকরণ $S = AL, A$ একটি প্রবক।

$$\text{i.e. } (x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = A [(x-x_1)(y-y_2) - (x-x_2)(y-y_1)]$$



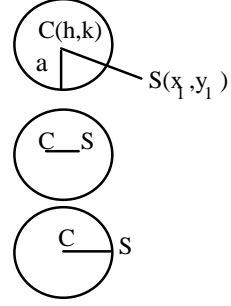
বৃত্তের সাপেক্ষে বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় :

(i) $CS > a$ (x_1, y_1) বিন্দুরটি বৃত্তের বাহিরে।

এখানে, $C(h, k) =$ বৃত্তের কেন্দ্র, $a =$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং $S(x_1, y_1)$ বৃত্তটির সমতলে একটি বিন্দু

(ii) $CS < a$ (x_1, y_1) বিন্দুটি বৃত্তের ভিতরে।

(iii) $CS = a$ (x_1, y_1) বিন্দুটি বৃত্তের উপরে।



অবস্থান সাপেক্ষে দুটি বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধের সম্পর্ক

মনে করুন, দুইটির বৃত্তের কেন্দ্র যথাক্রমে C_1 ও C_2 এবং ব্যাসার্ধদ্বয় যথাক্রমে a_1 ও a_2 . কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= C_1C_2$

স্পষ্টতঃ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে

(i) বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করবে, যদি $C_1C_2 = a_1 + a_2$. হয়

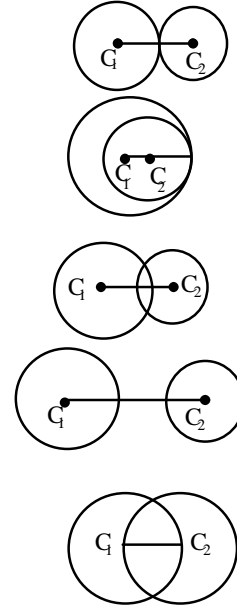
(ii) অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করলে $C_1C_2 = a_1 - a_2$

(iii) ছেদ করলে, $C_1C_2 < a_1 + a_2$

(iv) ছেদ বা স্পর্শ না করলে $C_1C_2 > a_1 + a_2$

(v) পরস্পরের কেন্দ্র দিয়ে অতিক্রান্ত দুটি বৃত্তের ক্ষেত্রে $C_1C_2 = a_1 = a_2$

অর্থাৎ বৃত্তদ্বয় পরস্পর সমান।



উদাহরণ-1 : $(2, 1)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট এবং y -অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন। বৃত্তটি x অক্ষ হতে যে অংশ ছেদ করে তাও নির্ণয় করুন।

সমাধান : যেহেতু বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে অতএব বৃত্তের কেন্দ্রের ভূজ = CN , এর ব্যাসার্ধটির সমান হবে।

∴ বৃত্তের ব্যাসার্ধ হবে, =2 এবং নির্ণয়ে বৃত্তের সমীকরণ হবে,

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$

বা, $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4$

বা, $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$

বৃত্তটি x - অক্ষকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। x - অক্ষে $y=0$ । অতএব বৃত্তের সমীকরণে $y=0$ বসিয়ে আমরা পাই,

∴ $x^2 - 4x + 1 = 0$ ----- (2)

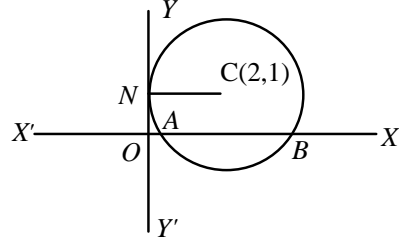
(2) একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, যার দুটি মূল A ও B বিন্দুর ভূজ হবে।

∴ $x^2 - 4x + 4 = 3$

বা, $(x-2)^2 = 3$ $x-2 = \pm\sqrt{3}$

∴ $x = 2 \pm \sqrt{3}$

∴ x - অক্ষের খণ্ডিত অংশের পরিমাণ = $(2+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3})$
= $2\sqrt{3}$



উদাহরণ-2 : এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় করুন, যার কেন্দ্রের স্থানাংক (4, 5) এবং যা $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্রগামী।

সমাধান : প্রদত্ত বৃত্তটি $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$

অতএব বৃত্তটির কেন্দ্র $(-2, -3)$

যেহেতু নির্ণয়ে বৃত্তটি প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্রগামী, অতএব নির্ণয়ে বৃত্তের ব্যাসার্ধ হবে (4, 5) এবং $(-2, -3)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্বের সমান। মনে করুন নির্ণয়ে বৃত্তের ব্যাসার্ধ = a

∴ $a = \sqrt{(4+2)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

অতএব নির্ণয়ে বৃত্তের সমীকরণ $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 100$

উদাহরণ-3 : $(0,0)$, $(1,2)$ এবং $(2,0)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে নির্ণয়ে বৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + C = 0$ ----- (1)

যেহেতু বৃত্তটি $(0,0)$ বিন্দুগামী অতএব

$C = 0$ ----- (2)

আবার যেহেতু বৃত্তটি $(1,2)$ বিন্দু গামী, অতএব, $1+4+2g+4f+C = 0$

$2g+4f+5=0$ ----- (3)

আবার যেহেতু বৃত্তটি $(2, 0)$ বিন্দুগামী, অতএব $4+0+4g+0+C=0$

$4g+4 = 0$ ----- (4)

(2), (3) এবং (4) সমীকরণ সমাধান করে পাওয়া যায় $g=-1, f = -\frac{3}{4}$ এবং $C = 0$.

∴ নির্ণয়ে বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2x \cdot (-1) + 2y \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 0 = 0$

বা, $x^2 + y^2 - 2x - \frac{3y}{2} = 0$

∴ $2x^2 + 2y^2 - 4x - 3y = 0$.

উদাহরণ-4 : $\frac{x}{7} + \frac{y}{9} = 1$ রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

দেখান যে বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী।

সমাধান : স্পষ্টতঃ $\frac{x}{7} + \frac{y}{9} = 1$ রেখাটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে $(7, 0)$ ও $(0, 9)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন $(7,0)$ ও $(0,9)$ কে ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ।

$$(x-7)(x-0)+(y-0)(y-9) = 0$$

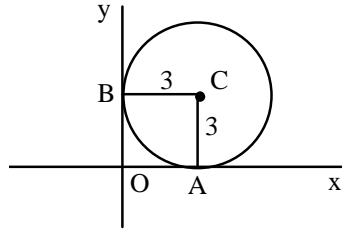
$$\text{বা } x^2-7x+y^2-9y = 0$$

$$\therefore x^2+y^2-7x-9y = 0 \text{ ----- (1)}$$

(1) বৃত্তের সমীকরণটি প্রবপদ মুক্ত ($C=0$)

\therefore এটি মূলবিন্দু $(0,0)$ দ্বারা সিদ্ধ হয়। অতএব বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী হবে।

উদাহরণ-5 : এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা প্রত্যেক অক্ষ রেখাকে মূলবিন্দু হতে ধনাত্মক দিকে ও একক দূরত্বে স্পর্শ করে।



মনে করুন বৃত্তটি x - অক্ষ এবং y - অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করে। তাহলে $OA=3$ এবং $OB=3$ ।

x - এবং y - অক্ষের সমান্তরাল যথাক্রমে BC ও AC অঙ্কন করুন।

অতএব বৃত্তের কেন্দ্র হবে $(3,3)$ এবং ব্যাসার্ধ 3.

$$\therefore \text{নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ : } (x-3)^2 + (y-3)^2 = 3^2$$

$$x^2-6x+9+y^2-6y+9 = 9$$

$$\therefore x^2+y^2-6x-6y+9 = 0$$

উদাহরণ-6 : একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার ব্যাসার্ধ 5 এবং $(5, 5)$ বিন্দুতে এটি $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

সমাধান : $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C_1 = (1,2)$ এবং ব্যাসার্ধ = 5

প্রদত্ত বৃত্তটি, নির্ণেয় বৃত্তকে $P(5,5)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

মনে করুন নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র $C_2 = (h, k)$ এবং ব্যাসার্ধ = 5 চিত্র হতে দেখা যায় $P(5,5)$, $C_1 C_2$ এর মধ্যবিন্দু।

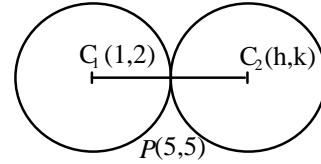
$$\therefore 5 = \frac{h+1}{2} \text{ এবং } 5 = \frac{k+2}{2}$$

$$\therefore h=9, k=8$$

$$\text{অতএব নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ : } (x-9)^2+(y-8)^2 = 5^2$$

$$\text{বা, } x^2-18x+81+y^2-16y+64 = 25$$

$$\therefore x^2+y^2-18x-16y+120 = 0$$



উদাহরণ-7 : দেখান যে, $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ এবং $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত বৃত্ত, $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ এর কেন্দ্র $C_1 + (-1, -1)$, ব্যাসার্ধ $r_1=1$

$x^2+y^2-4x-6y-3=0$ এর কেন্দ্র $C_2 + (2,3)$, ব্যাসার্ধ $r_2=4$

কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $C_1C_2 = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5 = r_1+r_2 = 1+4$

অতএব বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

যদি $P(h,k)$ স্পর্শবিন্দুর স্থানাংক হয় তবে বিন্দুটি কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে 1:4 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করবে।

$$\therefore h = \frac{1.2+4(-1)}{1+4} = \frac{-2}{5}$$

$$k = \frac{1.3+4(-1)}{1+4} = \frac{-1}{5}$$

অতএব নির্ণেয় স্পর্শবিন্দুর স্থানাংক $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$

উদাহরণ-৪ : নির্ণয় করুন? বৃত্তদ্বয় $(x-1)^2+(y-2)^2 = 16$ এবং $(x+4)^2+(y+3)^2 = 1$ পরস্পরকে (a) স্পর্শ করবে (b) সমস্পর্শীয় হবে (c) ছেদ করবে (d) কিছুই করবে না।

সমাধান : C_1, C_2 কেন্দ্র এবং r_1 ও r_2 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে

(i) ছেদ করবে যদি $C_1C_2 < r_1+r_2$

(ii) ছেদ করবে না যদি $C_1C_2 > r_1+r_2$

(iii) স্পর্শ করবে যদি $C_1C_2 = r_1+r_2$ (বহিঃস্থ ভাবে)
 $= r_1-r_2$ (অন্তঃস্থভাবে)

$$\begin{aligned} \text{এখানে } C_1C_2 &= \sqrt{(-1-4)^2+(2+3)^2} \\ &= \sqrt{25+25} \\ &= 5\sqrt{2} \\ &\square 4+1, \square 4-1. \end{aligned}$$

অতএব তারা পরস্পরকে স্পর্শ করবে না

আবার $C_1C_2 = 5\sqrt{2} > 4+1$, তারা ছেদও করবে না,

\therefore সঠিক উত্তর (d)।

অনুশীলনী-১১.৩

- (7, 2) কেন্দ্র বিশিষ্ট, $x^2+y^2-6x-10y-15=0$ বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুগামী একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
- (3, 3) ও (0, 2) বিন্দুগামী একটি বৃত্তের কেন্দ্র $x+y=1$ সরলরেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।
- x অক্ষকে স্পর্শ করে এবং (1, -2) ও (3, -4) বিন্দুগামী একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
- এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু (-4,3) ও (12,-1), এই বৃত্ত দ্বারা y - অক্ষের উপর খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।
- এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা x - অক্ষকে (3,0) বিন্দুকে স্পর্শ করে এবং y - অক্ষের উপর 8 একক দৈর্ঘ্য একটি খন্ডিত অংশ সৃষ্টি করে।
- y - অক্ষকে স্পর্শ করে এবং (3, 0) ও (7, 0) বিন্দু দিয়ে যায় এমন দুটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
- x - অক্ষকে স্পর্শ করে (1,2) ও (3,2) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
- (1, 1), (5,1) এবং (7,4) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
- $x^2+y^2+2x-6y+11=0$ একটি কাল্পনিক বৃত্ত, প্রমাণ করুন।
- দেখান যে $x^2+y^2-14x+2y-71=0$ এবং $x^2+y^2-8x+10y+5=0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে অন্তঃস্থ ভাবে না বহিঃস্থভাবে ছেদ করবে।



স্পর্শক ও স্পর্শকের সমীকরণ



উদ্দেশ্য

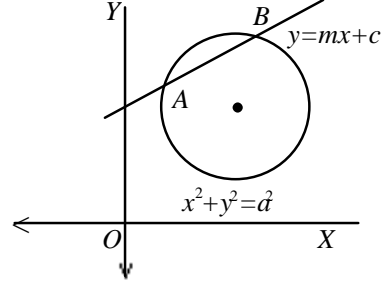
এই পাঠ শেষে আপনি-

- বৃত্তস্থ কোন বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন;
- স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবেন।

ছেদক

চিত্রে AB ($y=mx+c$) সরলরেখাটি বৃত্ত ($x^2+y^2=a^2$) কে A ও B বিন্দুতে ছেদ করছে।

এখানে AB রেখাকে বৃত্তটির ছেদক বলা হয়, ছেদ বিন্দু A ও B ।

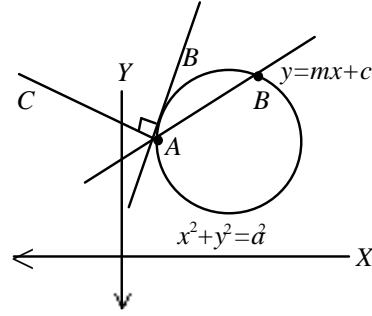


স্পর্শক

চিত্রে AB রেখাটির B বিন্দুটি বৃত্ত পথে সরতে সরতে এসে A বিন্দুতে মিলিত হয়েছে, AB রেখাটি এখন বৃত্তটিকে A বিন্দুতে স্পর্শ করে আছে। সরলরেখাটি এই অবস্থায় A বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক হয়ে আছে।

A বিন্দু দিয়ে স্পর্শকের উপর যখন লম্ব সরলরেখা টানা যায় তাকে বৃত্তের অভিলম্ব বলা হয়।

চিত্রে AC স্পর্শকের উপর লম্ব $\therefore AC$ বৃত্তের অভিলম্ব।



বৃত্তের উপরের কোন বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

মনে করুন $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুতে AB রেখা বৃত্ত $x^2+y^2=a^2$ কে ছেদ করেছে।

$A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad \text{----- (1)}$$

এবং যেহেতু (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুটি $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তটির উপরিস্থিত বিন্দু সেহেতু, লিখা যায়

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 \quad \text{----- (ii)}$$

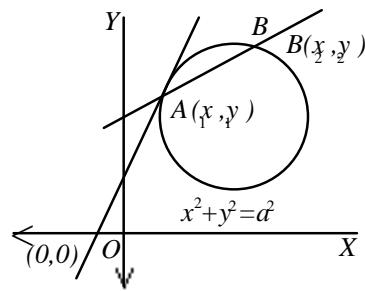
$$x_2^2 + y_2^2 = a^2 \quad \text{----- (iii)}$$

এখন (i) ও (ii) থেকে পাই

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

$$\text{বা, } x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0$$

$$\text{বা, } (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$$



বা, $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$ ----- (iv)

এখন (iv) এর মান (i) এ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} (x - x_1)$ ----- (v)

এখন মনে করুন AB রেখাটি স্পর্শক হবে তখনই যখন B বিন্দুটি বৃত্তের পরিধির উপর দিয়ে চলতে চলতে A বিন্দুতে মিলিত হয়।

এই B বিন্দুটি A বিন্দুতে মিলিত হবে তখন, যখন $x_2 = x_1$ ও $y_2 = y_1$ হবে।

∴ (v) সমীকরণটি দাঁড়াবে

$y - y_1 = -\frac{2x_1}{2y_1} (x - x_1)$

বা, $y_1 (y - y_1) = -x_1 (x - x_1)$

বা, $xx_1 + yy_1 = x^2 + y^2 = a^2$

বা, $xx_1 + yy_1 = a^2$

ইহাই (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ।

বৃত্তটির সাধারণ সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + C = 0$ হলে (x_1, y_1) বিন্দু থেকে স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + C = 0$

ক্যালকুলাস পদ্ধতিতে

$x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

মনে করুন, m ঢাল বিশিষ্ট ও (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$y - y_1 = m(x - x_1)$ ----- (1)

দেয়া আছে, বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = a^2$

x- এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে, আমরা পাই,

$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(a^2)$

$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

∴ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $m = \frac{dy}{dx} = -\frac{x_1}{y_1}$

এখন (1) নং-এ, m-এর মান বসিয়ে, আমরা পাই

$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1} (x - x_1)$

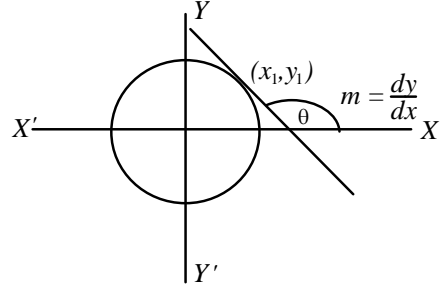
$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$

$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$ ----- (2)

আবার $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তটি যদি (x_1, y_1) বিন্দু দিয়ে যায় তাহলে

$x_1^2 + y_1^2 = a^2$ ----- (3)

(২) ও (৩) নং হতে পাওয়া যায় $xx_1 + yy_1 = a^2$



$xx_1+yy_1-a^2=0$ ইহাই নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ।

অনুরূপভাবে, $x^2+y^2+2gx+2fy+C=0$ বৃত্তের উপর (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

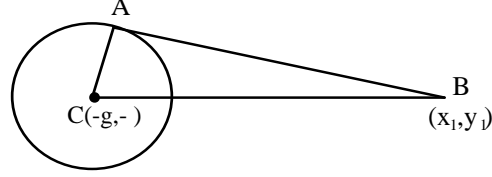
$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+C=0$$

স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

মনে করুন, $x^2+y^2+2gx+2fy+C=0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্র বিন্দু $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2+f^2-C}$.

মনে করুন AB বৃত্তের স্পর্শক, যা $B(x_1, y_1)$ বহিস্থ বিন্দু দিয়ে যায়।

যেহেতু ব্যাসের সংগে স্পর্শক সর্বদা লম্বভাবে থাকে সেহেতু $\angle BAC = 90^\circ$



$$\text{কাজেই } BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$AB^2 = BC^2 - AC^2 = \{(x_1+g)^2 + (y_1+f)^2\} - (g^2+f^2-C)$$

$$AB^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + C$$

$$\therefore AB = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + C}$$

ইহাই নির্ণেয় স্পর্শকের দৈর্ঘ্য।

উদাহরণ-1 : $(-2, 5)$ বিন্দু হতে $x^2+y^2+3x-8y+17=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : $(-2, 5)$ বিন্দু হতে $x^2+y^2+3x-8y+17=0$ বৃত্তের স্পর্শক

$$-2x+5y+\frac{3}{2}(x-2)-\frac{8}{2}(y+5)+17=0$$

$$-4x+10y+3x-6-8y-40+34=0$$

$$-x+2y-12=0$$

$$\therefore x-2y+12=0$$

এখন স্পর্শকের ঢাল = $\frac{1}{2}$

অতএব অভিলম্বের ঢাল = -2

অতএব নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ :

$$y-5=-2(x+2)$$

$$\therefore 2x+y=1$$

উদাহরণ-2 : $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ বৃত্তকে $(2,3)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(1,1)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ, $S+x^2+y^2+4x-6y-3=0$ ----- (1)

এবং বৃত্তের উপর $(2,3)$, একটি বিন্দু

$(2,3)$ বিন্দুতে প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$x.2+y.3+\frac{4}{2}(x+2)-\frac{6}{2}(y+3)-3=0$$

$$\text{বা, } 2x+3y+2x+4-3y-9-3=0$$

$$\text{বা, } 4x-8=0$$

বা, $P + x - 2 = 0$

অতএব নির্ণেয় বৃত্ত হবে $S=0$ এবং $P=0$ এর ছেদবিন্দুগামী বৃত্ত।

\therefore বৃত্তের সমীকরণ হবে, $S + \lambda P = 0$

বা, $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 + \lambda(x - 2) = 0$ ----- (2)

যেহেতু সমীকরণ (2), (1, 1) বিন্দুগামী

অতএব $1 + 1 + 4 - 6 - 3 + \lambda(1 - 2) = 0$

বা, $-3 - \lambda = 0 \quad \lambda = -3$

(2) নং সমীকরণে $\lambda = -3$ বসিয়ে নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 - 3(x - 2) = 0$

বা, $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 - 3x + 6 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 + x - 6y - 3 = 0$

উদাহরণ-3 : (1,1) বিন্দু হতে $2x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0$ বৃত্তের উপর অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

উত্তরঃ আমরা জানি (x_1, y_1) বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + C = 0$

বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + C}$

অতএব (1,1) বিন্দু হতে $2x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0$ বৃত্তের উপর অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

$= \sqrt{1^2 + 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}}$

$= \sqrt{2 + \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$



দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা নির্ণয়



উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা নির্ণয় করতে পারবেন।

দুটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা নির্ণয়

মনে করুন, দুটি বৃত্তের সমীকরণ

$$S_1 + x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + C_1 = 0 \text{ ----- (i)}$$

$$S_2 + x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + C_2 = 0 \text{ ----- (ii)}$$

$$\therefore S_1 - S_2 + 2(g_1 - g_2)x + y(f_1 - f_2) + C_1 - C_2 = 0 \text{ ----- (iii)}$$

$$2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + c_1 - c_2 = 0$$

এটি (x, y) সম্বলিত একঘাত বিশিষ্ট সাধারণ সমীকরণ। কাজেই এটা একটি সরলরেখার সমীকরণ। বৃত্ত দুটি পরস্পর P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে P, Q বিন্দু দুটির স্থানাংক (i) ও (ii) কে সিদ্ধ করবে,

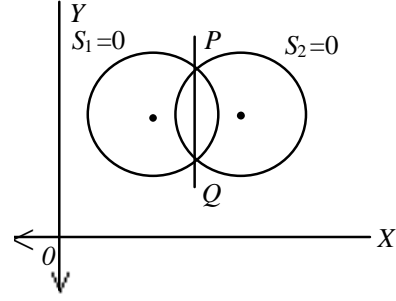
$$\text{সুতরাং } S_1 = 0, S_2 = 0 \quad \therefore S_1 - S_2 = 0$$

অর্থাৎ এদের স্থানাংক (iii)নং সমীকরণকেও সিদ্ধ করে। এটি আবার একটি সরলরেখা নির্দেশ করে।

সুতরাং (iii) নং সমীকরণটি S_1 ও S_2 বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা নির্দেশ করে।

অনুসিদ্ধান্ত

$S_1 = 0, S_2 = 0$ বৃত্ত দুটির ছেদবিন্দুগামী যে কোন বৃত্তের সমীকরণ, $S_1 + kS_2 = 0, k \neq 0$.



উদাহরণ-1 : $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

- যে সকল স্পর্শক x - অক্ষের সাথে 45° কোণে আনত।
- যে সকল স্পর্শক $2x - y + 4 = 0$, সরলরেখার সঙ্গে সমান্তরাল।
- যে সকল স্পর্শক $3x + 2y - 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব।

সমাধান : $y = mx + c$ রেখা, $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তের স্পর্শক হলে স্পর্শকের সমীকরণ হবে $y = mx \pm 2\sqrt{1+m^2}$

- যেহেতু স্পর্শকদ্বয় x - অক্ষের সাথে 45° কোণের আনত

অতএব, $m = \tan 45^\circ = 1$

$$\therefore \text{স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ } y = 1 \cdot x \pm 2\sqrt{1+1^2}$$

$$\therefore y = x \pm 2\sqrt{2}$$

- স্পর্শকদ্বয় প্রদত্ত $2x - y + 4 = 0$ রেখার সাথে সমান্তরাল হবে যদি স্পর্শকের ঢাল = প্রদত্ত রেখার ঢাল হয়

$2x - y + 4 = 0$ কে নিম্নরূপে রেখা যায়।

$$y = 2x + 4, \text{ অতএব ঢাল} = 2$$

স্পর্শকদ্বয় সমান্তরাল হবে যদি $m = 2$ হয়

$$\text{অতএব নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ } y = 2x \pm 2\sqrt{1+4}$$

$$\text{বা, } y = 2x \pm 2\sqrt{5}$$

(iii) ,র্শকদ্বয় $3x+2y-5=0$ রেখার সাথে লম্ব হবে যদি $m = \frac{2}{3}$ হয়,

$$3x+2y-5=0$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

অতএব নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $y = \frac{2}{3}x \pm 2\sqrt{1+\frac{4}{9}}$

অর্থাৎ $2x-3y \pm 2\sqrt{13} = 0$.

উদাহরণ-2: প্রমাণ করুন যে, $8x+5y-34=0$ রেখাটি $x^2+y^2+10x+6y-55=0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক।

সমাধান : রেখাটির সমীকরণ $8x+5y-34=0$ এবং বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+10x+6y-55=0$

বা, $x^2+10x+25+y^2+6y+9=89$

বা, $(x+5)^2+(y+3)^2 = (\sqrt{89})^2$

\therefore বৃত্তের কেন্দ্র $(-5, -3)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{89}$

এখন বৃত্তের কেন্দ্র $(-5, -3)$ হতে $8x+5y-34=0$ রেখার লম্ব দূরত্ব

$$= \left| \frac{8 \cdot (-5) + 5 \cdot (-3) - 34}{\sqrt{8^2 + 5^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{-40 - 15 - 34}{\sqrt{89}} \right| = \sqrt{89}$$

সুতরাং বৃত্তের কেন্দ্র হতে রেখার লম্ব দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

$\therefore 8x+5y-34=0$ রেখাটি বৃত্তের একটি স্পর্শক।

অনুশীলনী-১১.৪

- $x^2+y^2-6x+2y+1=0$ বৃত্তে $(3,2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
- একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার কেন্দ্র $(-4,2)$ বিন্দুতে এবং যার স্পর্শক $3x+4y-16=0$ সরলরেখা।
- $x^2+y^2=16$ বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা x -অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে।
- $x^2+y^2-8x-10y=8$ বৃত্তের এমন দুটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $5x-12y-9=0$ রেখার সাথে সমান্তরাল।
- $x^2+y^2=4$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন যারা $x-2y+7=0$ রেখার সাথে লম্ব হবে।
- প্রমাণ করুন যে, $x+y-3=0$ রেখাটি $x^2+y^2-4x+6y+5=0$ বৃত্তের উপর স্পর্শক হবে।
- $x^2+y^2-6x-8y+C=0$ বৃত্তটি y -অক্ষকে স্পর্শ করে। C এর মান ও স্পর্শ বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করুন।
- $2x+y-3=0$ রেখাটি $x^2+y^2-5x-y+4=0$ বৃত্তটিকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। AB কে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
- (i) $(3, 3)$ বিন্দু হতে $x^2+y^2=3$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।
(ii) $(-5,6)$ বিন্দু হতে $3x^2+3y^2-4x-5y=0$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।
- (i) $x^2+y^2=2$ বৃত্তের $(-1,1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
(ii) $x^2+y^2-3x+2y+3=0$ বৃত্তের $(1,-1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

এক নজরে এই ইউনিটের সংক্ষিপ্ত বিষয়বস্তু

1. কেন্দ্র $(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $=a$ হলে, বৃত্তটির সমীকরণঃ $x^2+y^2=a^2$
2. কেন্দ্র (h, k) এবং ব্যাসার্ধ $=a$ হলে, বৃত্তটির সমীকরণঃ $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$
3. বৃত্তের সাধারণ সমীকরণঃ $x^2+y^2+2gx+2fy+C=0$ এর কেন্দ্রঃ $(-g,-f)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-C}$
4. ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় (x_1,y_1) এবং (x_2,y_2) বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণঃ
 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$
5. $x^2+y^2+2gx+2fy+C=0$ বৃত্ত কর্তৃকঃ x অক্ষের কর্তিত অংশ $=2\sqrt{g^2-C}$
 y - অক্ষের কর্তিত অংশ $=2\sqrt{f^2-C}$
6. C_1 ও C_2 কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং a_1 ও a_2 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে
 (i) বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলেঃ $C_1C_2 = a_1+a_2$
 (ii) অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করলেঃ $C_1C_2 = a_1 - a_2$
 (iii) ছেদ করলে, $C_1C_2 < a_1+a_2$
 (iv) ছেদ বা স্পর্শ না করলে $C_1C_2 > a_1+a_2$
7. x - অক্ষকে স্পর্শকারী (h, k) কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= k$
8. y - অক্ষকে স্পর্শকারী (h, k) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= h$
9. $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তে $y=mx+c$ সরলরেখাটি
 (i) স্পর্শক হওয়ার শর্তঃ $c = \pm a\sqrt{1+m^2}$
 (ii) স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণঃ $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$
10. (x_1,y_1) বিন্দুতে, $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1+yy_1=a^2$ এবং $x^2+y^2+2gx+2fy+C=0$ বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+C=0$
11. কোন বৃত্তের কেন্দ্র হতে এর যে কোন সম্পর্শকের লম্বদূরত্ব $=$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ।
12. (x_1,y_1) বিন্দু হতে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তে স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x_1^2+y_1^2-a^2}$ এবং $x^2+y^2+2gx+2fy+C=0$ বৃত্তে স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+C}$

উত্তরমালা

অনুশীলনী-১১.১

1. $x^2+y^2-8x-10y-8=0$
2. $x^2+y^2+2ax+2ay+a^2=0$

অনুশীলনী-১১.২

1. (i) $(-2,3), 4$
 (ii) $(1, \frac{1}{3}), 2$
 (iii) $(\frac{1}{4}, 0); \frac{1}{4}$

অনুশীলনী-১১.৩

1. $x^2+y^2-14x-4y+28=0$
2. $x^2+y^2-6x+4y-12=0$

3. $x^2+y^2+10x+20y+25=0$ ও $x^2+y^2-6x-4y+9=0$
4. $x^2+y^2-8x-2y-51=0$, $4\sqrt{13}$.
5. $x^2+y^2-6x\pm 10y+9=0$
6. $x^2+y^2-10x\pm 2\sqrt{21}y+21=0$
7. $2(x^2+y^2)-8x-5y+18=0$
8. $x^2+y^2-6x-9y+13=0$

অনুশীলনী-১১.৪

1. $y-2=0$
2. $x^2+y^2+8x-4y+4=0$
3. $x-\sqrt{3}y\pm 8=0$
4. $5x-12y+131=0$ এবং $5x-12y-51=0$
5. $2x+y\pm 2\sqrt{5}=0$
7. $C=16, (0,4)$
8. $x^2+y^2-3x+1=0$
9. (i) $\sqrt{15}$
(ii) $\sqrt{\frac{173}{3}}$
10. (i) $x-y+2=0; x+y=0$
(ii) $x-1=0, y+1=0$