ইউনিট ১২

কণিক

ভূমিকা

আধুনিককালে গ্রীক জ্যামিতির কণিক শাখাকে আয়াতাকার সমতলে দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র হসাবে কিভাবে বর্ণনা করা যায়- তাহাই এই ইউনিটে দেখানো হলো। দ্বি কোণ (Double cone) এর সাথে একটি সমতল ছেদ করলে এই দ্বিঘাত সমীকরণগুলির উৎপন্ন হয়। আর এর উদ্ভব হয় গ্রীক দার্শনিক প্লেটোর সময়।

সুতরাং আমরা বলতে পারি, কণিক শব্দটির উৎপত্তি কোণক থেকে। একটি কোণকের প্রেক্ষিতে বিভিন্ন শর্তে একটি সমতলের উপর বিন্দুগুচ্ছ (the set of points of $R \infty R$) দিয়ে দ্বিঘাত সমীকরণ বিশিষ্ট যে সব বক্ররেখা উৎপন্ন হয়, তাদেরকে কণিক বলে। এরা হলো বৃত্ত (circle), , পরাবৃত্ত (Parabola), উপবৃত্ত (ellipse), অধিবৃত্ত (hyperbola) ইত্যাদি।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- *কণিক সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন;*
- *উপকেন্দ্র দ্বিকাক্ষ ও উৎকেন্দ্রিকতার মাধ্যমে পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত ও অধিবৃত্তের ধারণা লাভ করবেন।*
- *স্থানাংকের সাহায্যে পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত ও অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন।*
- *পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত ও অধিবৃত্তের লেখচিত্র সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন।*

পাঠ ১ কণিক সম্পর্কে ধারণা

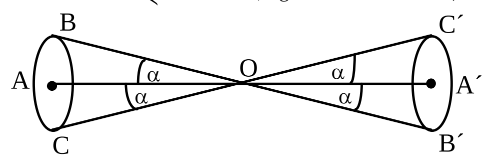
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- কণিক সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন।

কণিক সম্পর্কে ধারণা

ধরুন O বিন্দুগামী AA' একটি সরলরেখা এবং O বিন্দু দিয়ে বিন্দুগুচ্ছের *(the set of points)* দ্বারা BB' ও CC' দুটি রেখা উৎপন্ন হয়। ধরুন যে কোন একটি রেখা AA' এর সাথে α কোণ উৎপন্ন করে। রেখাগুলির সাহায্যে সৃষ্টি কোণকে দ্বি-কোণ *(Double cone)* বলে। প্রত্যেকটিকে সমবৃত্তীয় কোণ *(right circular cone)* বলে।

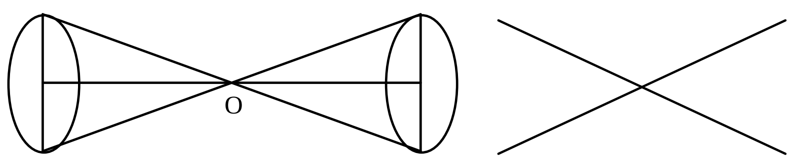


O কে শীর্ষবিন্দু (vertex), AA' কে অক্ষ (axis), BB' ও CC' কে কারিকারেখা *(Generating line)*, θ কে অর্ধশীর্ষ কোণ *(semi-vortical angle)* বলে।

কণিকের আকৃতি

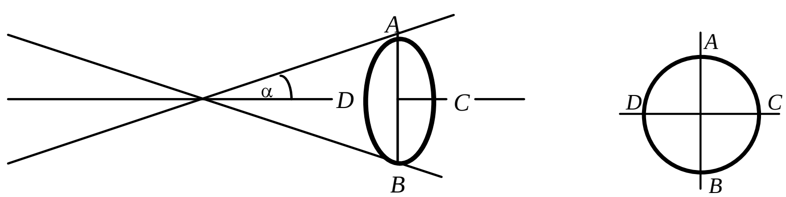
এই পাঠ্যক্রমে মূলতঃ গ্রীক আমলীয় জ্যামিতিকে সমতলের উপর স্থানাংকের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়েছে। কিভাবে একটি দ্বিঘাত সমীকরণকে বিভিন্ন শর্তে সমতলের উপর লেখচিত্রের মাধ্যমে বর্ণনা করা যায় তাই পাঠদান করা হয়েছ এই অধ্যায়ে। প্লেটোর সময়কালীণ গ্রীকরা বর্ণনা দিয়েছে কিভাবে দুটি কোণককে বিভিন্ন অবস্থায় একটি সমতল দিয়ে ছেদ করলে আমরা বিভিন্ন আকতির বক্ররেখা পেতে পারি। কোণককে একটি সমতল দিয়ে ছেদ করে যে সকল বক্ররেখা পাওয়া যায় তাদের কণিক বলা হয়। নিম্নের চিত্রগুলো হতে বিভিন্ন কোণকের আকৃতির পরিচয় পাওয়া যায়।

(i)



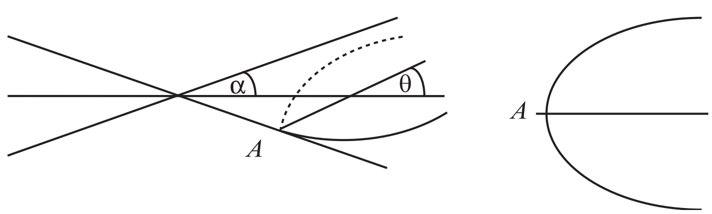
কোণকের শীর্ষবিন্দুকে ভেদ করে অক্ষরেখাকে ধারণকারী কোণক ও সমতলের ছেদাংশ জোড় সরলরেখা সূচিত করে।

(ii)



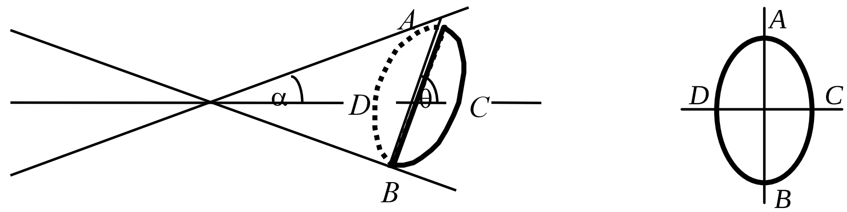
কোণকের অক্ষরেখাকে লম্বভাবে সমতল দ্বারা ছেদাংশ বৃত্ত সূচিত করে বৃত্তের ক্ষেত্রে $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(iii)



কারিকারেখার সাথে সমান্তরাল করে কোণক ও সমতলের ছেদাংশ পরাবৃত্ত সূচিত করে। এক্ষেত্রে $\theta = \alpha$

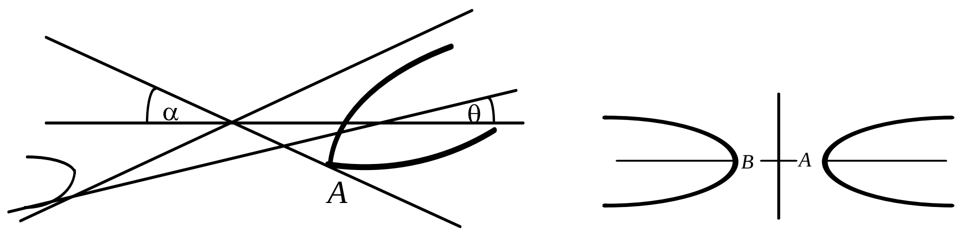
(iv)



কোণকের অক্ষরেখার সাথে কোন নির্দিষ্ট কোণ θ কোণে সমতল দ্বারা ছেদাংশ উপবৃত্ত সূচিত করে।

এক্ষেত্রে $\alpha < \theta < \frac{\pi}{2}$

(v)



কোণকের শীর্ষগামীনয় এরূপ একটি সমতল দিয়ে উভয় কোণকের যে ছেদাংশ পাওয়া যায়, সে বক্ররেখাদ্বয় একত্রে অধিবৃত্ত নামে পরিচিত। এক্ষেত্রে $\theta < \alpha$.

সাধারণতঃ পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত এই তিনটি বক্ররেখাই কণিক বলে পরিচিত। কিন্তু আমরা দেখতে পাই সরলরেখা (জোড়), বৃত্ত, পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত সকল বক্ররেখাই কোণকের বিভিন্ন অবস্থায় সমতল দ্বারা ছেদাংশ থেকে উৎপন্ন হয়েছে।

মনে রাখার বিষয়

কোণের বিভিন্ন ছেদাংশে বিভিন্ন শর্ত স্বাপেক্ষে নিম্নলিখিত বক্ররেখাগুলি পাওয়া যায়।

1. সরলরেখা (Straight line)
2. বৃত্ত (circle)
3. উপবৃত্ত (ellipse)
4. অধিবৃত্ত (Hyperbole)
5. পরাবৃত্ত (Parabola).

এর মধ্যে সরলরেখার ও বৃত্তের সম্বন্ধে পাঠদান করা হয়েছে। এখন বাকী বক্ররেখাগুলির সম্বন্ধে আলোচনা করা হবে।

পাঠ ২ পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত ও বিভিন্ন সংজ্ঞা

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- কণিকের সংজ্ঞা দিতে পারবেন;
- উপকেন্দ্র, নিয়ামক, উৎকেন্দ্রতা, অক্ষরেখা ইত্যাদির সংজ্ঞা দিতে পারবেন;
- পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত ও অধিবৃত্তের সংজ্ঞা দিতে পারবেন।

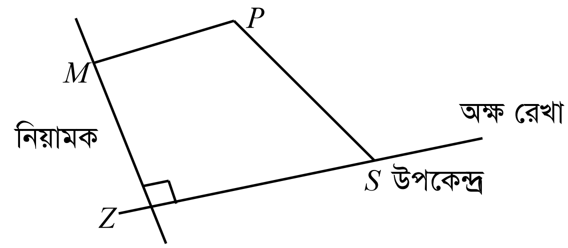
কণিকের সংজ্ঞা (Definition of conic) :

একটি নির্দিষ্ট বিন্দু ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হতে যে সমস্ত বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত সর্বদা একটি ধ্রুবসংখ্যা, তাদের সেট (the set of points) কে কণিক বলে।

(i) নির্দিষ্ট বিন্দুকে উপকেন্দ্র (Focus) বলে।

(ii) নির্দিষ্ট সরলরেখাকে নিয়ামক বা দিকাক্ষ (Directrix) বলে।

(iii) ধ্রুবসংখ্যাটিকে উৎকেন্দ্রতা বা বিকেন্দ্রিকতা (eccentricity) বলে এবং ইহাকে 'e' দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



মনে করুন, S একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং MZ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। P যেকোন একটি বিন্দু। কণিকের সংজ্ঞানুসারে, আমরা পাই $\frac{SP}{PM} = e$.

ইহার সাহায্যে আমরা পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত ও অধিবৃত্তের সংজ্ঞা দিব।

(i) $e = 1$ হলে অর্থাৎ $SP = PM$ হলে, কণিকটিকে পরাবৃত্ত (Parabola) বলা হবে।

(ii) $o<e<1$ হলে অর্থাৎ $0 < \frac{SP}{PM} < 1 \Rightarrow 0<SP<PM$ হলে, কণিকটিকে উপবৃত্ত (ellipse) বলা হবে।

(iii) $e>1$ হলে অর্থাৎ $\frac{SP}{PM}>1$ i.e. $SP>PM$ হলে, কণিকটিকে অধিবৃত্ত (hyperbola) বলা হবে।

অন্য কথায় ঃ

(i) **পরাবৃত্ত** ঃ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হতে যে সব বিন্দুর দূরত্ব সমান, তাদের সেটকে পরাবৃত্ত বলে।

(ii) **উপবৃত্ত** ঃ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হতে যে সব বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত একটি ধনাত্মক ধ্রুব সংখ্যা এবং এক থেকে ক্ষুদ্রতর, তাদের সেটকে উপবৃত্ত বলে।

(iii) **অধিবৃত্ত** ঃ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হতে যে সব বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত এক থেকে বৃহত্তর, সে সব বিন্দুর সেটকে অধিবৃত্ত বলে।

\# **অক্ষরেখা (axix)** ঃ ফোকাস দিয়ে অতিক্রান্ত এবং নিয়ামকের উপর লম্বরেখাকে অক্ষরেখা বলে।

পাঠ ৩ পরাবৃত্তের সমীকরণ, উপকেন্দ্র, দিকাক্ষ ইত্যাদি নির্ণয়

উদ্দেশ্য

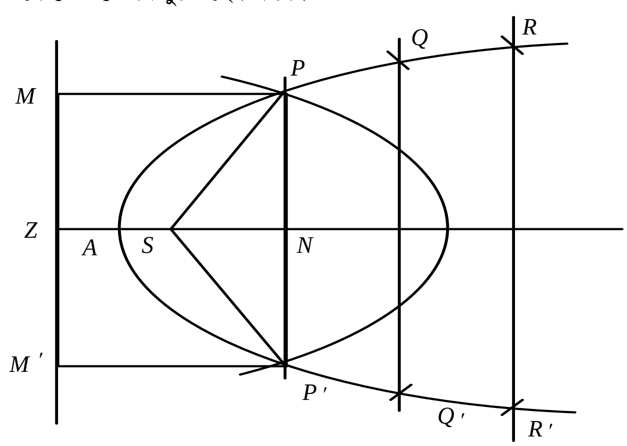
এই পাঠ শেষে আপনি-

- পরাবৃত্ত অঙ্কন করতে এবং পরাবৃত্ত সম্পর্কিত বিভিন্ন সংজ্ঞা দিতে পারবেন;
- পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন;
- উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবেন;
- কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে পরাবৃত্তের উপর স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন;
- কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে পরাবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন;
- পরাবৃত্ত সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

পাঠ-২ এ পরাবৃত্তের সংজ্ঞা দেয়া হয়েছে। এখন, কিভাবে পরাবৃত্ত অঙ্কন করা যায়- তার বিবরণ দেওয়া হল।

পরাবৃত্ত অঙ্কন

মনে করুন, S উপকেন্দ্র এবং MM' দিকাক্ষ। দিকাক্ষের উপর SZ লম্ব অঙ্কন করুন এবং SZ- কে A বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করুন। সুতরাং $SA=AZ$। সংজ্ঞানুসারে, A পরাবৃত্তের উপর একটি বিন্দু। AS অথবা AS–এর বর্ধিতাংশের উপর যে কোন বিন্দু N নিন এবং SZ- এর উপর PNP' লম্ব অঙ্কন করুন। S কে কেন্দ্র করে ZN–এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করুন যেন তা PNP' কে P ও P' বিন্দুতে ছেদ করে।



এখন দিকাক্ষের উপর PM, $P'M'$ লম্ব টানুন। তাহলে $SP = ZN=PM$ সুতরাং P' পরাবৃত্তের উপর একটি বিন্দু। AS অথবা বর্ধিত AS এর উপর N– এর বিভিন্ন অবস্থান নিয়ে পরাবৃত্তের উপর Q, Q'; R,R' বিন্দু পাওয়া যায়। এই বিন্দুগুলি একটি সুষম বক্ররেখার সাহায্যে যোগ করলে একটি পরাবৃত্তের লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা

অক্ষরেখা ঃ উপকেন্দ্রের মধ্য দিয়ে নিয়ামকের উপর অংকিত লম্বরেখাকে অক্ষরেখা বলে। অক্ষরেখাটি শীর্ষবিন্দু দিয়েও অতিক্রম করে।

শীর্ষবিন্দু ঃ পরাবৃত্ত ও উহার অক্ষরেখার ছেদবিন্দুকে শীর্ষবিন্দু (verte*x*) বলে।

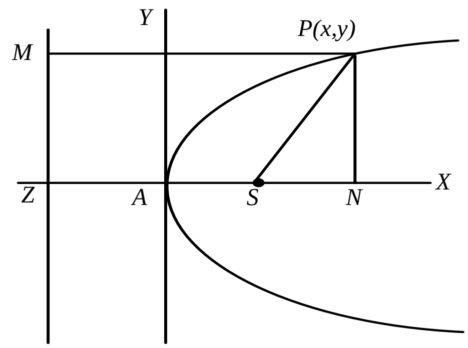
উপকেন্দ্রিক দূরত্ব (Focal length) ঃ উপকেন্দ্র থেকে পরাবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দুর দূরত্বকে উপকেন্দ্রিক দূরত্ব বলে।

উপকেন্দ্রিক জ্যা (Focal chord) ঃ যে জ্যাটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র দিয়ে গমন করে, তাকে উপকেন্দ্রিক জ্যা বলে।

উপকেন্দ্রিক লম্ব ঃ উপকেন্দ্রিক জ্যা অক্ষরেখার উপর লম্ব হলে, তাকে উপকেন্দ্রিক লম্ব (latus rectum) বলে।

পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ (Standard Equation of a parabola) :

$\boxed{y^2 = 4ax}$



মনে করুন, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S, দিকাক্ষ MZ । $MZ \perp SZ$ অঙ্কন করুন। SZ কে A বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত করুন। অর্থাৎ $ZA = AS$। সুতরাং A বিন্দুটি পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত হবে এবং A হলো তার শীর্ষবিন্দু। A কে মূলবিন্দু ধরে AX– কে x অক্ষ এবং তার সাথে লম্ব AY–কে y– অক্ষ ধরুন। পরাবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু $P(x,y)$ নিন । এখন $PN \perp AX$ এবং $PM \perp MZ$ অঙ্কন করুন। S, P যোগ করুন। ধরুন, $ZA=AS=a$.

সুতরাং আমরা পাই, $AN = x,\ PN = y$

$$PM = AN + ZA = x+a$$
$$SN = AN - AS = x-a.$$

পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, আমরা পাই,

$$\frac{SP}{PM} = \mathrm{e} = 1.$$
$$\Rightarrow SP = PM.$$

আবার, ΔPSN থেকে, $SP^2 = SN^2+PN^2$

$$\Rightarrow PM^2 = SN^2 + PN^2 \quad [\because SP = PM]$$
$$\Rightarrow (x+a)^2 = (x-a)^2 + y^2$$
$$\Rightarrow y^2 = (x+a)^2-(x-a)^2$$
$$\Rightarrow y^2 = x^2 +2ax+a^2 -x^2+2ax-a^2$$
$$\Rightarrow y^2 = 4ax$$

ইহাই নির্ণেয় পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ *(Standard equation of parabola)*

আদর্শ সমীকরণটিকে নিম্নরূপ লেখা যায় -

$\boxed{PN^2 = 4.AS.AN}$ $[\because y=PN, AS=a, AN = x]$

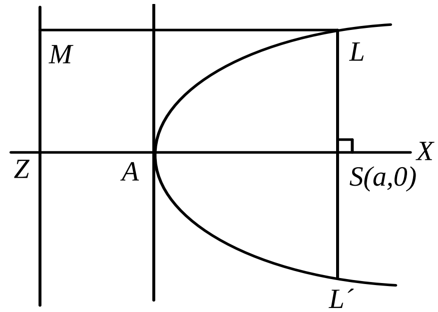
পরাবৃত্তের অন্যান্য সমীকরণ

a) মূলবিন্দু Z হলে, Z বিন্দুর স্থানাংক $(-a,0)$; ঐ বিন্দুতে মূলবিন্দু স্থানান্তর করলে, পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 = 4a(x-a)$

b) মূলবিন্দু S হলে, S বিন্দুর স্থানাংক $(a, 0)$; ঐ বিন্দুতে মূলবিন্দু স্থানান্তর করলে, পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4a(x+a)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয়

মনে করুন, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য LL' যেখানে L ও L' বিন্দুদ্বয় পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত। LM, নিয়ামক MZ– এর উপর লম্ব এবং A শীর্ষবিন্দু।



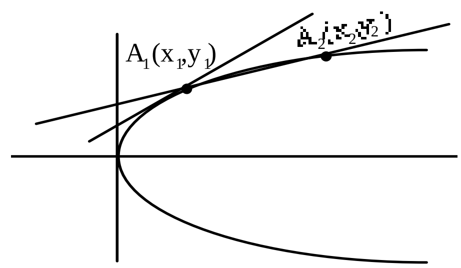
$\therefore$ পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুয়ারী, $SL = ML$
$= SZ$
$= ZA + AS$
$= a + a$
$= 2a$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= LL´$
$= 2.S^2$
$= 2.2a$
$= 4a$ একক।

অর্থাৎ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = 4∞ শীর্ষবিন্দু থেকে উপকেন্দ্রের দূরত্ব
বা 2 ∞ দিকাক্ষ থেকে উপকেন্দ্রের দূরত্ব।

i.e. $4a = 4.AS$
$= 2.SZ.$

কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে পরাবৃত্তের উপর স্পর্শকের সমীকরণ



মনে করুন $y^2 = 4ax$ কোন পরাবৃত্তের সমীকরণ এবং মনে করুন $A_1(x_1,y_1)$ ও $A_2(x_2,y_2)$, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত দুটি বিন্দু। A_1 ও A_2 বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক ছেদক রেখার সমীকরণ

$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$ - - - - - - - (i)

যেহেতু (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) পরাবৃত্তের উপরিস্থিত বিন্দু, সেহেতু

$y_1^2 = 4ax_1$ - - - - - - (2)

$y_2^2 = 4ax_2$ - - - - - - (3)

(2) থেকে (3) বিয়োগ করে পাই

$y_1^2 - y_2^2 = 4a(x_1 - x_2)$

$\Rightarrow (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 4a\,(x_1 - x_2)$

$\Rightarrow \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4a}{y_1 + y_2}$ - - - - - - - (4)

এখন (1) ও (4) হতে পাই,

$$y - y_1 = \frac{4a}{y_1+y_2}(x - x_1) \text{ - - - - - } (5)$$

মনে করুন, A_2 বিন্দুটি পরাবৃত্তের উপর দিয়ে সরতে সরতে এসে A_1 তে মিলিত হল, তখন

$x_2 \varnothing x_1$

$y_2 \varnothing y_1$

A_1A_2 ছেদকটি তখন A_1 বিন্দুতে পরাবৃত্তের একটি স্পর্শক হবে।

তখন (5) নং সমীকরণের রূপ হবে।

$$y - y_1 = \frac{4a}{2y_1}(x - x_1)$$

$\Rightarrow \quad y_1 (y-y_1) = 2a (x-x_1)$

$\Rightarrow \quad yy_1 - y_1^2 = 2a(x-x_1)$

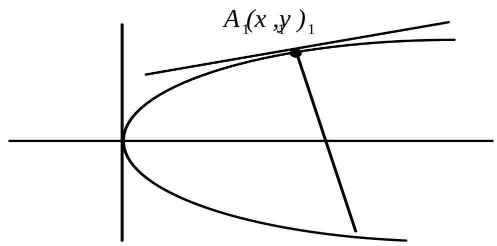
$\Rightarrow \quad yy_1 = 2a(x-x_1) + y_1^2$

$\Rightarrow \quad yy_1 = 2a(x-x_1) + 4ax_1$

$\Rightarrow \quad yy_1 = 2a(x+x_1)$

ইহাই নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ।

কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে পরাবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ



মনে করুন $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপর $A(x_1,y_1)$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। $A(x_1,y_1)$ বিন্দুতে পরাবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে। মনে করুন অভিলম্বের ঢাল m.

যেহেতু আমরা সংজ্ঞানুসারে জানি কোন বক্ররেখার উপর কোন বিন্দুতে একটি অভিলম্ব সে বিন্দুর স্পর্শকের উপর লম্বরেখা। সুতরাং অভিলম্বের সমীকরণ $y-y_1 = m(x-x_1)$ - - - - - - - (1)

এবং $\quad m \infty \frac{2a}{y_1} = -1 \quad$ [এক্ষেত্রে স্পর্শকের ঢাল $= \frac{2a}{y_1}$]

অর্থাৎ $\quad m = -\frac{y_1}{2a}$ - - - - - - (2)

(2) নং হতে m-এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে-

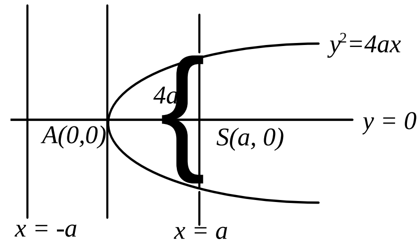
$$y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$$

$\therefore \; 2a(y-y_1) = -y_1 (x-x_1)$,

ইহাই নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ

মনে রাখার বিষয় ঃ

a) $y^2 = 4\,ax$ দ্বারা সূচিত পরাবৃত্তের



(i) শীর্ষ বিন্দুর স্থানাংক (0,0)

(ii) উপকেন্দ্রের স্থানাংক (a, 0)

(iii) দিকাক্ষ বা নিয়ামকের সমীকরণ, $x = -a$.

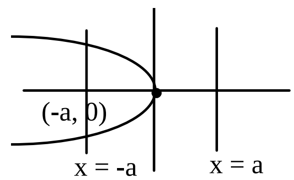
(iv) পরাবৃত্তের অক্ষরেখার সমীকরণ, $y = 0$

(v) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a$ একক

(vi) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $x = a$

(vii) শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y = 0$.

b) $y2 = -4ax$, (a>0, x<o) দ্বারা সূচিত পরাবৃত্তের



(i) শীর্ষবিন্দু (0,0)

(ii) উপকেন্দ্রের স্থানাংক ($-a$, 0)

(iii) দিকাক্ষের সমীকরণ, $x = a$

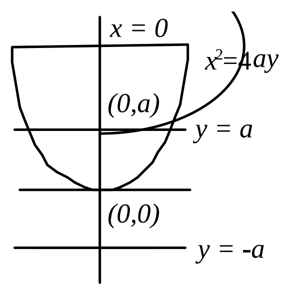
(iv) অক্ষরেখার সমীকরণ, $y = 0$

(v) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a$

(vi) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $x = -a$.

এক্ষেত্রে পরাবৃত্তটি y- অক্ষের সম্পূর্ণ বাম পার্শ্বে অবস্থিত।

(*c*) $x^2 = 4ay$ দ্বারা সূচিত পরাবৃত্তের



(i) শীর্ষবিন্দু (0,0)

(ii) উপকেন্দ্রের স্থানাংক (0,a)

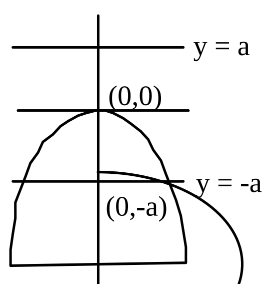
(iii) দিকাক্ষ বা নিয়ামকের সমীকরণ, $y = -a$.

(iv) অক্ষরেখার সমীকরণ, $x = 0$.

(v) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a$.

(vi) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $y = -a$

(*d*) $x^2 = -4ay$ দ্বারা সূচিত পরাবৃত্তের



(i) শীর্ষবিন্দু (0,0)

(ii) উপকেন্দ্রের স্থানাংক (0, $-a$)

(iii) দিকাক্ষের সমীকরণ, $y = a$

(iv) অক্ষরেখার সমীকরণ, $x = 0$

(v) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a$

(vi) উপকেন্ত্রিক লম্বের সমীকরণ, $y = -a$.

মনে রাখার প্রয়োজন

উদাহরণ ২ঃ অবলম্বন করলে, (a) – (e) পর্যন্ত মনে রাখার দরকার নেই।

পরাবৃত্ত	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
উপকেন্দ্রের স্থানাংক	$(a, 0)$	$(-a, 0)$	$(0, a)$	$(0, -a)$
দিকাক্ষের সমীকরণ	$x = -a$	$x = a$	$y = -a$	$y = a$
অক্ষের সমীকরণ	$y = 0$	$y=0$	$x = 0$	$x = 0$
শীর্ষের স্থানাঙ্ক	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরণ	$x = 0$	$x = 0$	$y = 0$	$y = 0$
নাভিলম্ব	$4a$	$4a$	$4a$	$4a$

উদাহরণ 1ঃ $y^2=16x$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, দিকাক্ষ, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $y^2 = 16x$

$\Rightarrow y^2= 4.4.x$ - - - - - - (i)

(i) পরাবৃত্তটিকে $y^2 = 4ax$- এর সাথে তুলনা করে আমরা পাই, $a = 4$.

অতএব (i) শীর্ষবিন্দু (0,0)

(ii) উপকেন্দ্র (4, 0)

(iii) দিকাক্ষের সমীকরণ, $x = -4 \Rightarrow x+4 = 0$

(iv) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a= 4.4 = 16$ একক।

(v) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $x = 4$.

উদাহরণ 2 ঃ $2y^2 = 7x$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্রের স্থানাংক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $2y^2 = 7x$

বা $y^2 = \frac{7}{2}x$ বা $y^2 = 4.\frac{7}{8}x$ - - - - - - (1);

$y^2 = 4ax$ মান সমীকরণের সাথে (i) নং সমীকরণ তুলনা করে-

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a = 4.\frac{7}{8} = \frac{7}{2}$ একক

এবং উপকেন্দ্রের স্থানাংক : $(\frac{7}{8}, 0)$

উদাহরণ 3 ঃ $y^2 = 3\lambda x$ পরাবৃত্তটি $(3, -6)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে; পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্রের স্থানাংক নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ $y^2 = 3\lambda x$ - - - - - (i) পরাবৃত্তটি $(3, -6)$ বিন্দুগামী

অতএব $(-6)^2 = 3.\lambda.3 \Rightarrow \lambda = 4$

$\therefore y^2 = 4.3x$

অতএব উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4.3 = 12$ একক

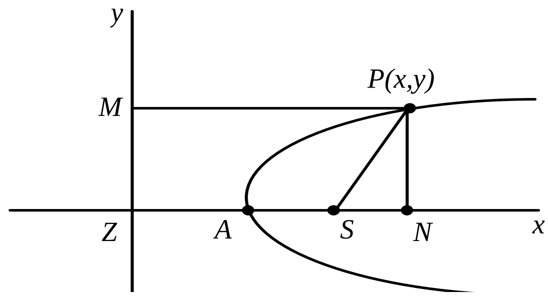
এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : (3, 0)

উদাহরণ 4 ঃ $y^2 = 10x$ পরাবৃত্তের উপরস্থিত কোন বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব 8; ঐ বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন পরাবৃত্তের উপরিস্থিত বিন্দু $P(x,y)$ এর ফোকাস দূরত্ব, $SP = 8$

এখন $y^2=10x$ কে পরাবৃত্তের মান সমীকরণ $y^2=4ax$ রসংগে তুলনা করে পাই,

$4a = 10$ বা $a = \frac{5}{2} = AS = AZ$



$P(x,y)$ বিন্দু থেকে অক্ষের উপর PN লম্ব আঁকুন।

$\therefore\ SP = PM = NZ = AZ + AN$

বা, $8 = a+x$ বা, $x = 8 - \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$

$\therefore\ y^2 = 10.\frac{11}{2} = 55$

$\therefore\ y = \pm\sqrt{55}$

অতএব নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{11}{2}, \pm\sqrt{55}\right)$

উদাহরণ 5 ঃ $x^2+4x+4y=0$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় করুন। তার লেখচিত্রটিও অঙ্কন করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে, $x^2 + 4x + 4y = 0$

$\Rightarrow\ x^2 + 4x + 4 - 4 + 4y = 0$

$\Rightarrow\ (x+2)^2 = -4(y-1)$ - - - - - - (1)

মনে করি, $x+2 = Y$

$y - 1 = X$

এবং $-4 = 4a \Rightarrow a = -1.$

সুতরাং (i) নং সমীকরণটি দাঁড়ায়

$Y^2 = 4aX$

(i) শীর্ষবিন্দু (0,0)

$X = 0$	$Y = 0$
$\Rightarrow y-1 = 0$	$\Rightarrow x+2 = 0$
$\therefore\ y=1$	$\therefore\ x = -2.$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক $=(-2, 1).$

(ii) উপকেন্দ্র $(a, 0)$

$\therefore\ X = a$	$Y = 0$
$\Rightarrow y-1 = -1$	$\Rightarrow\ x+2 = 0$
$\therefore\ y=0$	$\therefore\ x = -2.$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাংক $= (-2, 0)$

(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a$

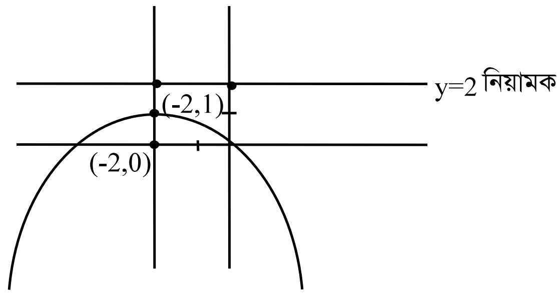
$= -4$

$= 4$ একক [$\because$ দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না]

(iv) দিকাক্ষের সমীকরণ

$$X = -a$$
$$\Rightarrow y - 1 = -(-1)$$
$$\therefore\ y = 2.$$

লেখচিত্র ঃ



উদাহরণ 6 ঃ $y^2+2y+4x+5 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষ, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ $y^2 + 2y + 4x + 5 = 0$

$$\Rightarrow y^2 + 2y + 1 = -4x - 5 + 1$$
$$\Rightarrow (y+1)^2 = -4(x+1) \text{ - - - - - - } (1)$$

এখন $X = x+1,\ Y = y+1$ ধরে আমরা পাই, $Y^2 = -4X$

একে পরাবৃত্তের মান সমীকরণ $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে

$$4a = -4 \Rightarrow a = -1$$

অতএব নির্ণেয় পরাবৃত্তের-

(i) শীর্ষবিন্দু $(0, 0)$, অর্থাৎ $X = 0,\ Y = 0$

$\Rightarrow x+1=0,\ y+1=0$ বা $x = -1,\ y = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় শীর্ষবিন্দু $(-1, -1)$

(ii) উপকেন্দ্র $(a, 0)$ অর্থাৎ $X = a,\ Y = 0$

$\Rightarrow x+1 = -1,\ y+1 = 0$

বা $x = -2,\ y = -1$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাংক $(-2, -1)$

(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a = 4(-1) = -4$

$= 4$ [দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না]

(iv) অক্ষরেখার সমীকরণ, $Y = 0$ বা $y+1 = 0$

(v) দিকাক্ষের সমীকরণ, $X = -a$ বা $x+1 = +1 \Rightarrow x = 0$

উদাহরণ 7 ঃ $y^2+8x-6y-15=0$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় করুন। তার লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

সমাধান ঃ দেয়া আছে,

$$y^2 + 8x - 6y - 15 = 0$$
$$\Rightarrow y^2 - 6y + 9 - 9 + 8x - 15 = 0$$

$\Rightarrow (y-3)^2 = -8x+24$

$\Rightarrow (y-3)^2 = -8\ (x-3)$ - - - - - - - (1)

মনে করুন, $y - 3 = Y$

$x - 3 = X$

$-8 = 4a \Rightarrow a = -2,$

$\therefore$ (1) নং সমীকরণটি দাঁড়ায়,

$Y^2 = 4aX$

(i) শীর্ষবিন্দু (0, 0)

$X = 0$	$Y = 0$
$\Rightarrow x-3=0$	$\Rightarrow y - 3 = 0$
$\therefore x = 3$	$\therefore y = 3$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক = (3, 3)

(ii) উপকেন্দ্রের স্থানাংক $(a, 0)$

$X = 0$	$Y = 0$
$\Rightarrow x-3=-2$	$\Rightarrow y - 3 = 0$
$\therefore x = 1$	$\therefore y = 3$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাংক = (1,3)

(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = $4a$

$= -8$

$= 8$ একক (দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না)

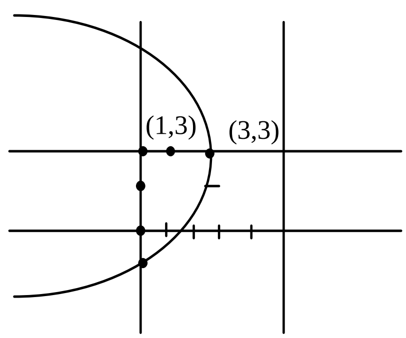
(iv) দিকাক্ষের সমীকরণ,

$X = -a$

$\Rightarrow \quad x - 3 = +2$

$\therefore \quad x - 5 = 0.$

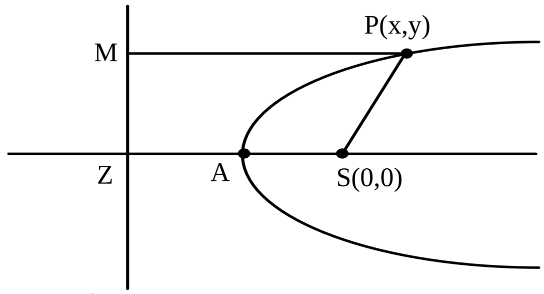
<u>লেখচিত্র ঃ</u>



উদাহরণ 8 ঃ একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রকে মূলবিন্দু এবং $x+2y-3=0$ রেখাকে দিকাক্ষ ধরে এর সমীকরণ নির্ণয় করুন। পরাবৃত্তের অক্ষের সমীকরণও নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করুন উপকেন্দ্র $S(0,0)$, দিকাক্ষ MZ এবং পরাবৃত্তের উপর $P(x,y)$ যে কোন একটি বিন্দু।

$\therefore\ SP = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$



$P(x,y)$ থেকে দিকাক্ষ $x+2y-3=0$ এর উপর লম্ব দূরত্ব

$$PM = \left|\frac{x+2y-3}{\sqrt{1^2+2^2}}\right| = \left|\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}}\right|$$

সংজ্ঞানুসারে, $SP = PM$

বা, $SP^2 = PM^2$

$\therefore \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = \left(\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}}\right)^2$

বা, $5(x^2+y^2) = x^2+4y^2+9+4xy-6x-12y$

বা, $4x^2-4xy+y^2+6x+12y-9=0$

বা, $(2x-y)^2+6x+12y-9=0$

ইহাই নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ।

দ্বিতীয় অংশ ঃ অক্ষরেখাটি দিকাক্ষ MZ এর উপর লম্ব এবং উপকেন্দ্র $S(0,0)$ বিন্দুগামী
ধরুন অক্ষরেখার সমীকরণ $2x-y+k=0$, k একটি ধ্রুবক সংখ্যা। যেহেতু অক্ষরেখাটি $S(0,0)$ দিয়ে যায়, সুতরাং $k=0$

$\therefore$ নির্ণেয় অক্ষরেখার সমীকরণ $2x-y=0$

উদাহরণ 9 ঃ $y^2=3x$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা

(i) $x-2y+3=0$ রেখার সমান্তরাল।

(ii) $2x+2y-3=0$ রেখার উপর লম্ব।

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $x-2y+3=0$ কে নিম্নরূপে লেখা যায়

$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$, রেখার ঢাল $m=\frac{1}{2}$

অতএব $x-2y+3=0$ রেখার সমান্তরাল স্পর্শকের ঢাল $\frac{1}{2}$ হবে,

আবার, $y^2=3x \Rightarrow y^2=4.\frac{3}{4}x$, একে পরাবৃত্তের মান সমীকরণ $y^2=4ax$ এর সাথে তুলনা করলে $a=\frac{3}{4}$ হয়

সুতরাং স্পর্শকের সাধারণ সমীকরণ $y=mx+\frac{a}{m}$ অনুসারে নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ হবে,

$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}.2$

বা, $y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$

বা, $2y=x+3$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $x-2y+3=0$

(ii) নির্ণেয় স্পর্শকটি $2x+2y-3=0$ রেখার উপর লম্ব, যার ঢাল

$\Rightarrow m_1=-1$

অতএব স্পর্শকের ঢাল $m_2 = 1$ হবে [$m_1 m_2 = -1$]

সুতরাং স্পর্শকের সাধারণ সমীকরণ $y = mx + \frac{a}{m}$ হবে

$\Rightarrow \ y = x + \frac{3}{4} \ . 1 = x + \frac{3}{4}$

বা, $4y = 4x + 3$

$\therefore \ 4x – 4y + 3 = 0$

উদাহরণ 10 ঃ $y^2 = 6x$ পরাবৃত্তের (1,3) বিন্দুতে স্পর্শকের ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ

(i) সূত্র অনুসারে, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ ঃ $yy1 = 2a(x+x_1)$

সুতরাং $y^2 = 6x$ পরাবৃত্তের (1,3) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে।

$$y. 3 = 2. \frac{6}{4} (x+1)$$

বা, $3y = 3x + 3$

বা, $x – y + 1 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $x – y + 1 = 0$

(ii) সূত্র অনুসারে, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হবে,

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$$

সুতরাং $y^2 = 6x$ পরাবৃত্তের (1, 3) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হবে,

$$y - 3 = -\frac{3}{2. \frac{6}{4}} \ . (x – 1)$$

বা, $(y – 3) = – (x – 1)$

$\therefore \ x + y - 4 = 0.$

$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ ঃ $x + y – 4 = 0.$

উদাহরণ 11 ঃ প্রমাণ করুন $y = 2x+2$ রেখাটি $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে।

সমাধান ঃ পরাবৃত্তের মান সমীকরণ $y^2 = 4ax$ এর সাথে $y^2 = 16x$ তুলনাকরে পাই $a = 4$.

যেহেতু $y = 2x + 2$ রেখাটি $y^2 = 16x$ রেখাকে ছেদ করে

$\therefore \ (2x+2)^2 = 16x$

বা, $4x^2 + 8x + 4 = 16x$

বা, $x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow (x – 1)^2 = 0$

x এর দুইটি মানই সমান। অতএব $y = 2x+2$ রেখাটি পরাবৃত্ত $y^2 = 16x$ কে স্পর্শ করবে।

উদাহরণ 12 ঃ পরাবৃত্ত $y^2=4x$ কে $y+4=2x$ রেখা ছেদ করলে ছেদ বিন্দুর স্থানাংক ও ছেদিত অংশে উৎপন্ন জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $y^2 = 4x$ - - - - - - - - - (i)

$y+4 = 2x$ - - - - - - - - (ii)

(1) এবং (2) সমীকরণ সমাধান করে x এর স্থানাংক পাওয়া যায়-

$\Rightarrow \; (2x-4)^2 = 4x$

বা, $4x^2 - 16x + 16 = 4x$

বা, $4x^2 - 20\,x + 16 = 0$

বা, $x^2 - 5x + 4 = 0$

বা, $(x-1)(x-4) = 0$

$\therefore \; x = 1$ বা, $x=4$.

যখন $x = 1,\; y = 2x - 4 = 2.1 - 4 = -2$

যখন $x = 4,\; y = 2.4 - 4 = 4$

$\therefore$ ছেদবিন্দুর স্থানাংকদ্বয় $(1, -2)$ এবং $(4, 4)$

অতএব ছেদিত অংশ দ্বারা গঠিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য-

$= \sqrt{(1-4)^2+(-2-4)^2} \; = \sqrt{9+36} \; = \sqrt{45}$

$= 3\sqrt{5}$.

উদাহরণ 13 ঃ $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের লেখ অঙ্কন করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণকে নিম্নরূপে লেখা যায়।

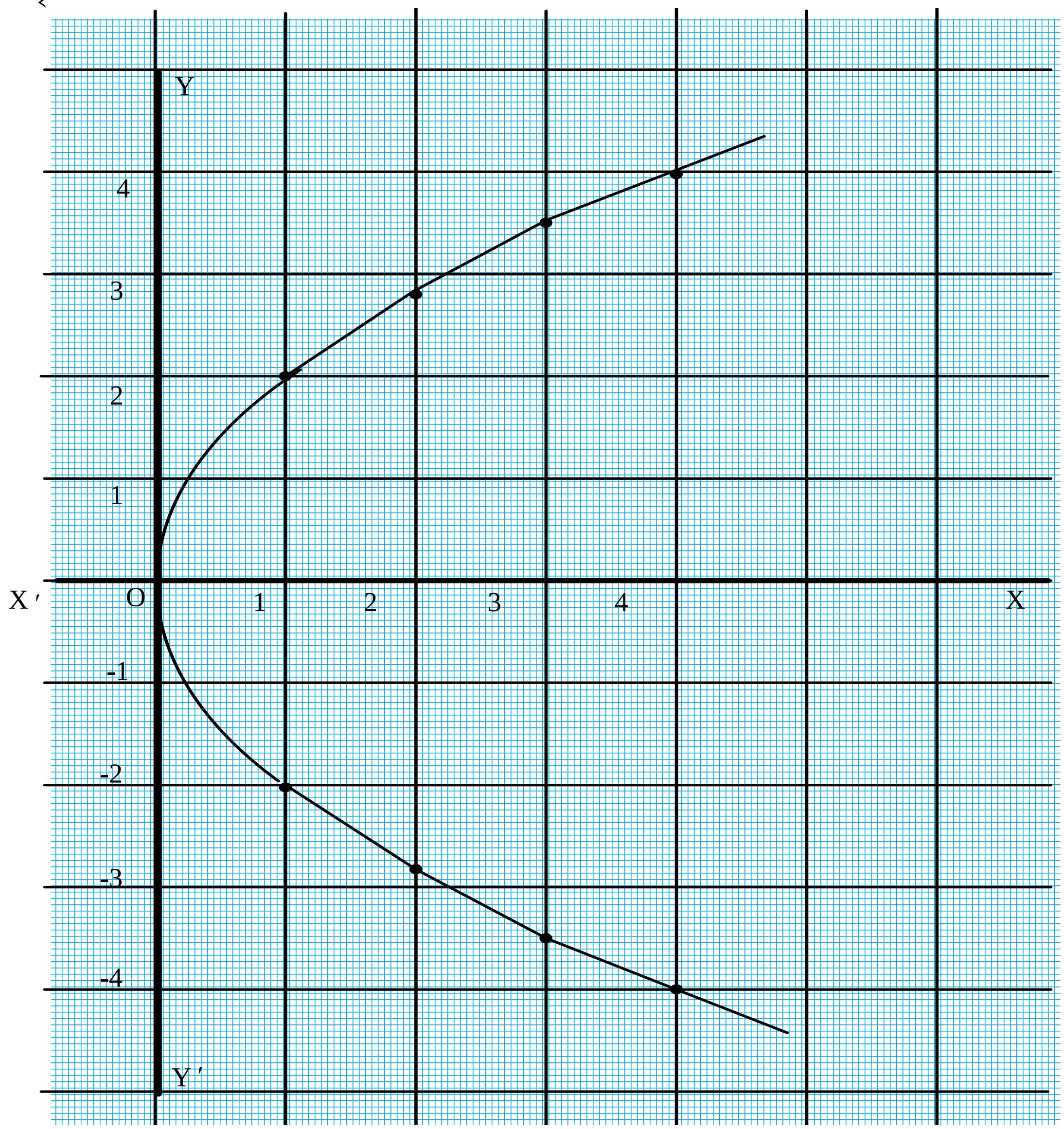
$y = \pm\sqrt{4x}$ - - - - - - (i)

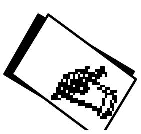
$x>0$ হলে, y বাস্তব সংখ্যা। এখন (i) সমীকরণের $x = 0, 1, 2, 3, 4$ ইত্যাদি মান বসিয়ে y- এর আনুষঙ্গিক মান বের করা হলো।

x	0	1	2	3	4
y	0	± 2	± 2.82	± 3.46	± 4

ছক কাগজে X–অক্ষ, $X'OX$ এবং Y– অক্ষ YOY' অঙ্কন করুন। এখন x- অক্ষে এবং y- অক্ষে ছোট বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের পাঁচ গুণ দৈর্ঘ্যকে একক ধরে x- এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য প্রাপ্ত y- এর মানগুলো বিন্দুর মাধ্যমে স্থাপন করুন। বিন্দুগুলো বক্ররেখায় সংযোগ করে পরাবৃত্তটির লেখ অঙ্কন করুন।

চিত্রে দেখা যায় x- অক্ষ বরাবর ভাঁজ করলে, এক অংশের সাথে আর এক অংশ মিলে যায়। এখানে x- অক্ষের সাপেক্ষে পরাবৃত্ত প্রতিসম।





অনুশীলনী-১২.১

1. নিম্নলিখিত প্রতিটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র ও শীর্ষের স্থানাংক এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।
   (i) $y^2 = 6x$ (ii) $x^2 = 8y$ (iii) $y^2+3x = 0$ (iv) $x^2+12y = 0$
2. নিম্নলিখিত প্রতিটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
   (i) $y^2 = 4(x-2)$ (ii) $(y-2)^2 = 8(x-4)$
   (iii) $y^2 = 4y+4x-16$ (iv) $x^2+2x-4y-3 = 0$
3. $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের কোন বিন্দুতে কোটি ভূজের দ্বিগুণ হবে।

4. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার অক্ষ x–অক্ষ বরাবর, শীর্ষবিন্দু $(0,0)$ এবং যা $(2,3)$ বিন্দু দিয়ে গমন করে।

5. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ এবং $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয় করুন এবং ঐ ছেদবিন্দুগামী $y^2=2ax$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাংক নির্ণয় করুন।

6. প্রমাণ করুন $y=2x+2$ রেখাটি $y^2=16x$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে।

7. একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $(0,0)$ এবং শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $x+y-2=0$, পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

8. $(3, 6)$ বিন্দুতে $y^2=12x$ পরাবৃত্তের স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

9. $y^2=8x$ এবং $x^2=4y$ পরাবৃত্তদ্বয়ের উভয়কে স্পর্শ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

10. $y^2=8x$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু A, উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয় P ও Q হলে PAQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

পাঠ ৪ উপবৃত্তের সমীকরণ, উপকেন্দ্র, দিকাক্ষ ইত্যাদি নির্ণয়

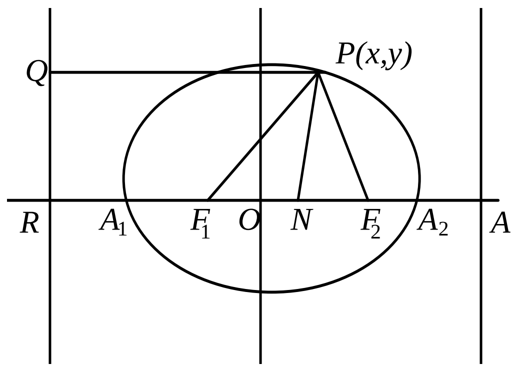
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন;
- উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবেন;
- উপবৃত্ত সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

একটি নির্দিষ্ট শর্তে কণিকের ছেদিতাংশ থেকে উপবৃত্ত কিভাবে পাওয়া যায়, তার ধারণা আপনারা পূর্বে পাঠ-১ ও পাঠ ২ তে পেয়েছেন। এই পাঠে স্থানাংকের সাহায্যে কিভাবে উপবৃত্তের সমীকরণ পাওয়া যায়, তার ব্যাখ্যা ও বর্ণনা করা হবে।

উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ



মনে করুন, উপবৃত্তের উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় F_1, F_2, নিয়ামক QR এবং উৎকেন্দ্রিকতা e।

উপবৃত্তের উপরস্থিত যে কোন বিন্দু $P(x, y)$ থেকে নিয়ামকের উপর PQ লম্ব টানা হলো। এখন, F_1, F_2 এর মধ্য দিয়ে QR এর উপর একটি লম্বরেখা আঁকা হলো, যাহা উপবৃত্তকে A_1 ও A_2 বিন্দুতে ছেদ করে। A_1 ও A_2 কে উপবৃত্তের শীর্ষবিন্দু বলা হয়। $A_1 A_2$ কে উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ ও তার মধ্যবিন্দু O কে উপবৃত্তের কেন্দ্র বলা হয়।
যদি $A_1A_2 = 2a$ হয়, তবে $OA_1 = OA_2 = a$।

কণিকের সংজ্ঞানুসারে, আমরা পাই

$$\frac{F_1A_1}{A_1R} = e,\ 0 < e < 1.$$

$\Rightarrow \quad F_1A_1 = e(A_1R)$

$\Rightarrow \quad OA_1 - OF_1 = e(OR - OA_1)$

$\Rightarrow \quad a - OF_1 = e\ (OR - a)$ - - - - - - - (i)

আবার, $\dfrac{F_1A_2}{A_2R} = e$

$\Rightarrow \quad F_1A_2 = eA_2R$

$\Rightarrow \quad OA_2 + OF_1 = e(OR + OA_2)$

$\Rightarrow \quad OA_1 + OF_1 = e(OR + OA_1) \quad [\because \ OA_1 = OA_2]$

$\Rightarrow \quad a + OF_1 = e(OR + a)$ - - - - - (2)

এখন (1) নং ও (2) নং যোগ করে পাই $2a = 2e.OR$

$\Rightarrow a = e.OR$

$\Rightarrow \; OR = \dfrac{a}{e}$ - - - - - - - (3)

আবার (2) নং হতে (1) নং বিয়োগ করে পাই $2OF_1 = 2ae.$

$\Rightarrow \; OF_1 = ae$ - - - - - - (4)

OX ও OY– কে যথাক্রমে x ও y- অক্ষ এবং O- কে মূলবিন্দু ধরুন এবং $P(x, y)$ বিন্দু থেকে বৃহৎ অক্ষের উপর PN লম্ব টানুন।

আবার উপবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই

$$\frac{PF_1}{PQ} = e. \qquad 0<e<1.$$

$\Rightarrow \quad PF_1 = e.PQ = e.RN$

$\Rightarrow \quad PF_1 = e\,(OR+ON)$

$\Rightarrow \quad PF_1{}^2 = e^2\,(OR+ON)^2$ - - - - - (5)

সমকোণী ত্রিভুজ PF_1N থেকে,

$PF_1{}^2 = F_1N^2 + PN^2$ - - - - (6)

$\therefore$ (6)- এর সাহায্যে (5) হতে আমরা পাই,

$F_1N^2+PN^2 = e^2\,(OR+ON)^2$ - - - - - (7)

কিন্তু $F_1N = OF_1 + ON = ae+x$ [(4)– এর সাহায্যে]

এবং $PN = y,\; OR = \dfrac{a}{e}$ [(3)-এর সাহায্যে]

অতএব (7) নং হতে পাই

$$(ae+x)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} + x\right)^2$$

$$\Rightarrow a^2e^2+2aex+x^2+y^2 = e^2\left(\frac{a+ex}{e}\right)^2$$

$$\Rightarrow a^2e^2+2aex+x^2+y^2 = a^2+2aex+e^2x^2$$

$$\Rightarrow a^2e^2 + x^2+y^2 = a^2+e^2x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - e^2x^2+y^2 = a^2 - a^2e^2$$

$$\Rightarrow x^2(1-e^2) + y^2 = a^2\,(1-e^2)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \text{ - - - - - - - - - - - (8)}$$

ধরুন, $a^2(1-e^2) = b^2$ - - - - - - - - - (9)

$\therefore$ (8) নং হতে পাওয়া যায় $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ - - - - - - (10)

ইহাই উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ।

আবার (9) নং থেকে $1 - e^2 = \dfrac{b^2}{a^2}$

$$\Rightarrow e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

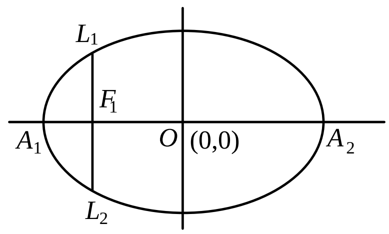
$\therefore$ $\boxed{e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}}$ $\quad (\therefore\ 0<e<1).$

(8) নং-এ $\therefore$ $x = 0$ বসিয়ে $y = \pm\, a\sqrt{1-e^2}$

$\Rightarrow$ $y = \pm\, b.$

$\therefore$ উপবৃত্তটি y- অক্ষকে $B(0, b)$ ও $B'(0, -b)$ বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং $BB' = 2b$। ইহাকে উপবৃত্তটির ক্ষুদ্র অক্ষ বলে।

উপকেন্দ্রিক লম্ব বা নাভিলম্ব (Latus rectum)



উপকেন্দ্রের মধ্য দিয়ে বৃহৎ অক্ষের উপর লম্বরেখাকে উপকেন্দ্রিক লম্ব বা নাভিলম্ব বলে।

চিত্রে ফোকাস বা উপকেন্দ্র F_1–এর মধ্য দিয়ে বৃহৎ অক্ষের উপর অংকিত লম্বরেখা L_1L_2 হলো নাভিলম্ব। $OF_1 = -\,ae.$

$\therefore$ L_1 বিন্দুর স্থানাংক $= (-ae, F_1L_1)$। যাহা উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর উপর অবস্থিত।

$\therefore$ $\frac{(-ae)^2}{a^2} + \frac{F_1L_1{}^2}{b^2} = 1.$

$\Rightarrow$ $\frac{F_1L_1{}^2}{b^2} = 1 - e^2$

$\Rightarrow$ $F_1L_1{}^2 = b^2\,(1-e^2)$

$\Rightarrow$ $F_1L_1{}^2 = b^2.\frac{b^2}{a^2}$ $\quad [\ \because 1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}\ ]$

$\Rightarrow$ $F_1L_1 = \frac{b^2}{a}.$

$\therefore$ $F_1L_1 = F_1L_2$

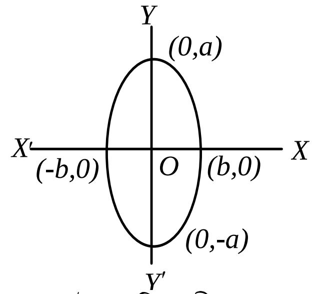
$\therefore$ $L_1L_2 = 2F_1L_2 = \frac{2b^2}{a}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a}.$

অনুসিদ্ধান্ত-1 ঃ যদি উপবৃত্তটির মূলবিন্দু $F_1(-ae,0)$ হয়, তবে উপবৃত্তটির সমীকরণ হবে-

$$\frac{(x-ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

অনুসিদ্ধান্ত - 2 ঃ



উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ y– অক্ষের উপর অবস্থিত হলে, উপবৃত্তটির সমীকরণ হবে-

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$

অনুসিদ্ধান্ত -3 ঃ যদি $a = b$ হয়, তবে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তটি দাঁড়ায়

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

i.e. $x^2+y^2=a^2$ যাহা বৃত্তের একটি সমীকরণকে নির্দেশ করে।

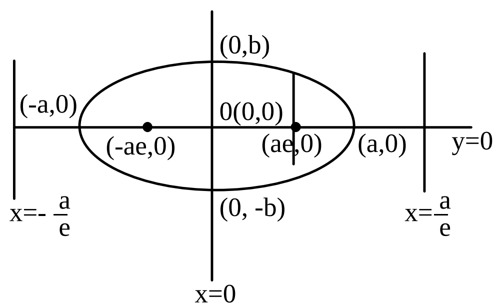
এ ক্ষেত্রে, $e=\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2}}$

$\Rightarrow\quad e=\sqrt{1-1}=0$

এ ধারণা থেকে বলা যায় যে, কণিক সেকশন (conic section)-এর যে বক্ররেখায় e=0, সে বক্ররেখাটিই বৃত্ত বলে পরিচিত।

মনে রাখার বিষয়

উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



উপরের চিত্র থেকে,

(i) কেন্দ্রের স্থানাংক (0,0)

(ii) শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক ($\pm a$, 0)

(iii) উপকেন্দ্রের স্থানাংক ($\pm ae$, 0)

(iv) বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ, $y = 0$

(v) ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ, $x = 0$

(vi) বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য = $2a$

(vii) ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য = $2b$

(viii) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $x = \pm ae$.

(ix) নিয়ামকের সমীকরণ, $x = \pm \frac{a}{e}$

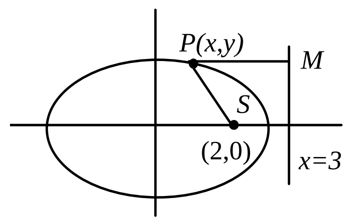
(x) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a}$

(xi) উৎকেন্দ্রিকতা বা বিকোন্দ্রকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

উদাহরণ-1 ঃ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার উপকেন্দ্র (2,0) এবং দিকাক্ষ $x=3$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$.

সমাধান ঃ মনে করুন $P(x,y)$ নির্ণেয় উপবৃত্তের উপর যে কোন একটি বিন্দু এবং $S(2,0)$.

$\therefore \quad PS = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$



এবং $x = 3$ হতে P এর দূরত্ব $= | x-3 |$

$\therefore$ উপবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, $\frac{SP}{PM} = e$

$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}}{| x-3 |} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \frac{(x-2)^2 + y2}{(x-3)2} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \quad 4 \{(x-2)^2+y^2\} = (x-3)^2$

$\Rightarrow \quad 4 \{x^2-4x+4+y^2\} = (x^2-6x+9)$

$\Rightarrow \quad 4x^2 - 16x+16+4y^2 = x^2-6x+9$

$\Rightarrow \quad 4x^2 - x^2+4y^2 - 16x + 6x+16-9 = 0$

$\Rightarrow \quad 3x^2+4y^2-10x+7 = 0$

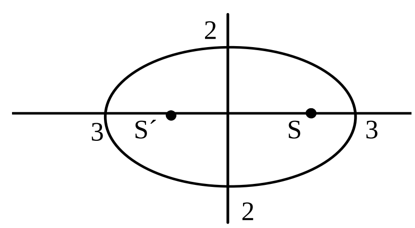
অতএব নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $3x^2+4y^2 - 10x + 7 = 0$

উদাহরণ-2 ঃ $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ এর উপকেন্দ্র ও দিকাক্ষ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে $a = 3$, $b=2$ এবং $a>b$

সুতরাং বৃহৎ অক্ষ, $x-$ অক্ষের উপর অবস্থিত,

এবং $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{2^2}{3^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{9-4}{9} = \frac{5}{9}$



$\Rightarrow \quad e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

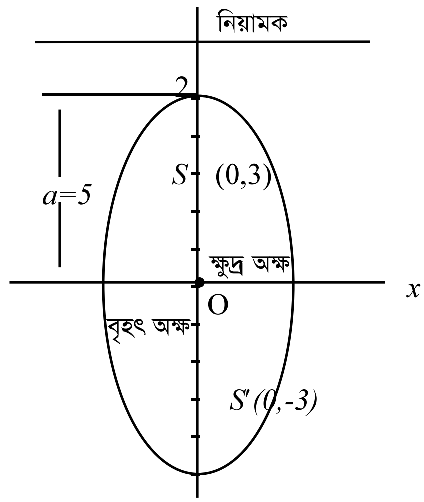
$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয় $\left(3. \frac{\sqrt{5}}{3}, 0\right)$ এবং $\left(-3. \frac{\sqrt{5}}{3}, 0\right)$

অর্থাৎ $(\pm \sqrt{5}, 0)$

দিকাক্ষ $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{3.3}{\sqrt{5}} = \pm \frac{9}{\sqrt{5}}$

উদাহরণ-3 ঃ একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্র $y-$অক্ষের উপর অবস্থিত। এর কেন্দ্র মূলবিন্দুতে, উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 6 একক এবং বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 10 একক। উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন, এর উৎকেন্দ্রকতা এবং দিকাক্ষের সমীকরণও নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ



প্রশ্নানুসারে উপবৃত্তের ফোকাসদ্বয় y–অক্ষের উপর অবস্থিত এবং এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব 6 একক। উপবৃত্তের কেন্দ্র (0,0) মূল বিন্দুতে অবস্থিত।

অতএব ফোকাসদ্বয়ের স্থানাংক (0,3) এবং (0,– 3) এবং $ae = 3$

কিন্তু $a = 5 \Rightarrow e = \frac{3}{5}$

আমরা জানি $b^2 = a^2(1-e^2)$ $\Rightarrow b^2 = 25\left(1 - \frac{9}{25}\right) = 16$

যেহেতু বৃহৎ অক্ষটি y- অক্ষ বরাবর,

অতএব নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

অর্থাৎ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

দিকাক্ষ x– অক্ষ বরাবর, এবং মূলবিন্দু হতে $\frac{a}{e}$ দূরত্বে অবস্থিত

অতএব দিকাক্ষের সমীকরণ হবে $y = \pm\frac{25}{3}$

উদাহরণ-4 ঃ দেখান যে, $9x^2+25y^2-18x-216 = 0$ একটি উপবৃত্ত। উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা, নিয়ামক ও উপকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $9x^2 - 18x + 25y^2 = 216$

বা, $9x^2 - 18x + 9 + 25y^2 = 225$

বা, $9(x^2-2x+1) + 25y^2 = 225$

বা, $\frac{9(x-1)^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = \frac{225}{225}$

বা, $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

সমীকরণটি একটি উপবৃত্ত সূচিত করে।

ধরুন, $x - 1 = X$ এবং $y=Y$

অতএব, $\frac{X^2}{5^2} + \frac{Y^2}{3^2} = 1$

উৎকেন্দ্রতা $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

নিয়ামকের সমীকরণ ঃ $X = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{5}{\frac{4}{5}} = \pm\frac{25}{4}$

$\therefore\ x - 1 = \pm\frac{25}{4}$

$\Rightarrow\ x = \frac{29}{4}$ (+ চিহ্ন নিয়ে)

এবং $x = -\frac{21}{4}$ (– চিহ্ন নিয়ে)

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ ঃ $X = \pm\ ae = \pm\ 5.\frac{4}{5} = \pm\ 4$

$\Rightarrow\ x - 1 = \pm\ 4$

$\Rightarrow\ x = 5, -3$

উপকেন্দ্র (5, 0), (–3, 0)

উদাহরণ-5 ঃ $7x+13y-87=0$ এবং $5x-8y+7=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিকলম্ব $\frac{32}{5}\sqrt{2}$ । a এবং b এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাংক ঃ

$$7x + 13y - 87 = 0 \text{ - - - - - - (i)}$$

$$6x - 8y + 7 = 0 \text{ - - - - - - - - (ii)}$$

$$\frac{x}{91-696} = \frac{y}{-435-49} = \frac{1}{-56-65}$$

$$\Rightarrow\ \frac{x}{-605} = \frac{y}{-484} = \frac{1}{-121}$$

$$\therefore\ x = \frac{-605}{-121} = 5,\ \ y = \frac{-484}{-121} = 4$$

অতএব ছেদবিন্দুর স্থানাংক (5, 4)

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, উপবৃত্ত (5, 4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে-

$$\therefore\ \frac{25}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1$$

আবার উপকেন্দ্রিক লম্ব ঃ $\frac{2b^2}{a} = \frac{32}{5}\sqrt{2}$

$$\therefore\ b^2 = \frac{16\sqrt{2}a}{5}$$

$$\therefore\ \frac{25}{a^2}+\frac{16.5}{16\sqrt{2}a}=1$$

$$\Rightarrow\ \frac{25}{a2}+\frac{5}{\sqrt{2a}}=1$$

$$\Rightarrow\ 25\sqrt{2} + 5a = \sqrt{2}\,a^2$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{2}\,a^2 - 10a + 5a - 25\sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{2}\,a\,(a-5\sqrt{2}) + 5(a-5\sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow\ (a-5\sqrt{2})(\sqrt{2}\,a+5) = 0$$

$$\therefore\ a = 5\sqrt{2} \qquad a = -\frac{5}{\sqrt{2}}$$

যেহেতু $a-$ এর মান ঋণাত্মক হতে পারে না

$\therefore\ a = 5\sqrt{2}$

$\therefore\ b^2 = \dfrac{16\sqrt{2}}{5}\ .\ a = \dfrac{16\sqrt{2}}{5}\ .\ 5\sqrt{2}\ = 32$

$\therefore\ \ b = \pm\, 4\sqrt{2}$

অতএব $a = 5\sqrt{2}$ এবং $b = 4\sqrt{2}$

উদাহরণ 6 ঃ $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ উপবৃত্তটির লেখ অঙ্কন করুন।

সমাধানঃ প্রদত্ত সমীকরণকে নিম্নরূপে লেখা যায়-

$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ - - - - - - - - (i)

বা $x^2 = 16\left(1-\dfrac{y^2}{9}\right)$

বা $x = \pm\dfrac{4}{3}\sqrt{9-y^2}$ - - - - - (ii)

এবং $y^2 = 9\left(1-\dfrac{x^2}{16}\right)$

বা $y = \pm\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$ - - - - - (iii)

এখন (iii) এ $y = 0$ বসালে $\Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\, 4$

(ii) এ $x = 0$ বসালে $\Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm\, 3$

$\therefore$ উপবৃত্তটি $x-$ অক্ষকে $A(4, 0)$ 3 $A'(-4, 0)$ বিন্দুতে

এবং $y-$ অক্ষকে $B(0, 3)$ ও $B'(0, -3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

এখানে, $e^2 = 1 - \dfrac{b^2}{a^2} = 1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16}$

$\therefore\ e = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ এবং $ae = \sqrt{7}\ = 2.65$

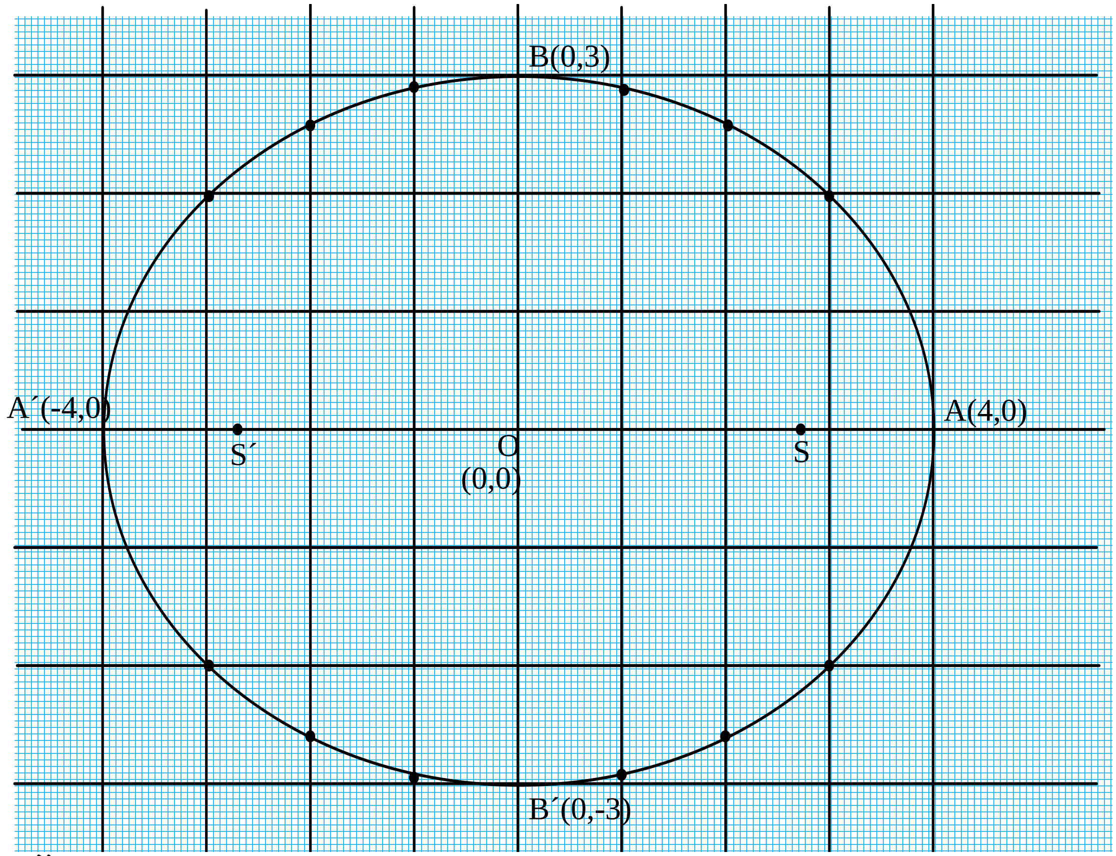
$\therefore$ উপকেন্দ্র $S(2.\ 65, 0);\ S'(-2.65, 0)$

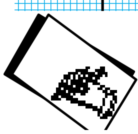
এখন (iii) সমীকরণে x=0, 1, 2, 3, 4 - - - - ইত্যাদি মান বসিয়ে y–এর আনুষঙ্গিক মান বের করা হলো।

x	0	±1	±2	±3	±4
y	±3	±2.90	±2.60	±1.98	0

ছক কাগজে $x-$ অক্ষ, $X'OX$ এবং $y-$ অক্ষ, $Y'OY$ অঙ্কন করুন। এখন $x-$ অক্ষে এবং $y-$ অক্ষে ছোট বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের পাঁচগুন দৈর্ঘ্যকে একক ধরে x- এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য প্রাপ্ত $y-$ এর মানগুলো বিন্দুর মাধ্যমে স্থাপন করুন। বিন্দুগুলো বক্ররেখায় সংযোগ করে উপবৃত্তটির লেখ অঙ্কন করুন।

চিত্রে দেখা যায় $x-$ অক্ষ ও $y-$ অক্ষের সাপেক্ষে উপবৃত্ত প্রতিসম।





অনুশীলনী-১২.২

1. উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে x– অক্ষ ও y– অক্ষ ধরে নিম্নলিখিত বিন্দু দিয়ে গমনকারী উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

   (i) (4, 1) এবং (2, 2) (ii) $(5, \sqrt{3})$ এবং $(-\sqrt{3}, \sqrt{11})$

2. নিম্নলিখিত উপবৃত্ত সমূহের উৎকেন্দ্রতা, উপকেন্দ্রদ্বয়, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

   (i) $x^2+3y^2 = a^2$ (ii) $3x^2+4y^2=24$ (iii) $16(x-2)^2+9(y+3)^2=144$

3. একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়কে X এবং Y অক্ষ ধরে $(1, \sqrt{6})$ এবং (3,0) বিন্দু দিয়ে গমনকারী উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

4. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি ফোকাস (–2, 3), দিকাক্ষের সমীকরণ $x-y+7=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

5. P এর মান কত হলে $4x^2+Py^2 = 90$ উপবৃত্তটি (0,4) বিন্দু দিয়ে যাবে? উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক ও অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

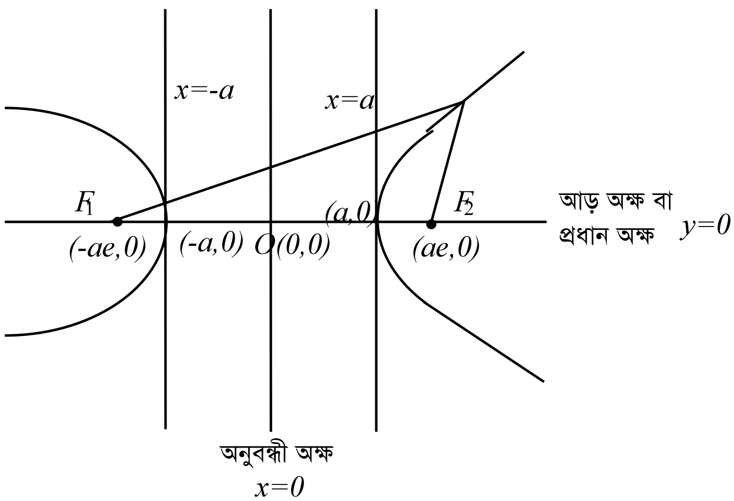
পাঠ ৫ অধিবৃত্তের সমীকরণ, উপকেন্দ্র, দিকাক্ষ ইত্যাদি নির্ণয়

উদ্দেশ্য

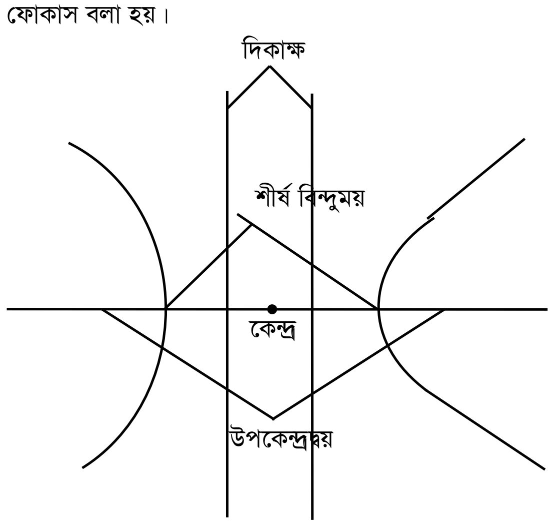
এই পাঠ শেষে আপনি-

- অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন;
- উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবেন;
- অধিবৃত্তের বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন।

একটি নির্দিষ্ট শর্তে কণিকের ছেদিতাংশ থেকে অধিবৃত্ত কিভাবে পাওয়া যায় তার ধারণা আপনারা পূর্বেই পাঠ-১ ও পাঠ ২ তে পেয়েছেন। এই পাঠে স্থানাংকের সাহায্যে কিভাবে অধিবৃত্তের সমীকরণ পাওয়া যায়, তার ব্যাখ্যা ও বর্ণনা করা হবে।



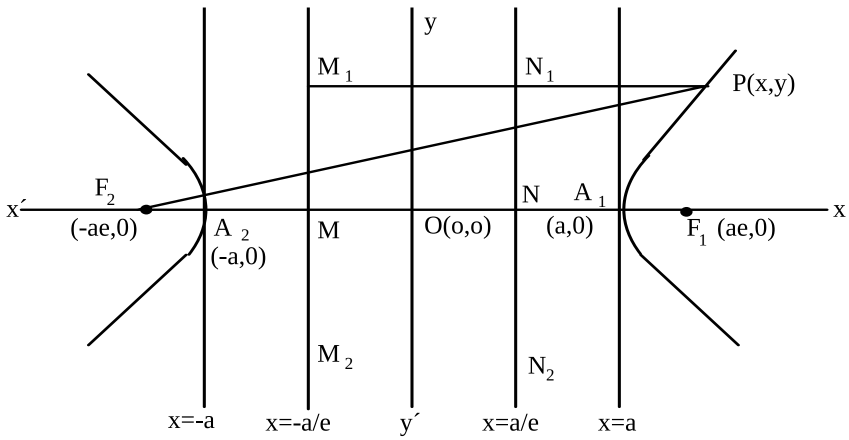
একটি সমতলে অধিবৃত্ত একটি বিন্দুগুচ্ছের সমষ্টি, দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু হতে যার দূরত্বের পার্থক্য সর্বদা একটি ধ্রুবরাশি। নির্দিষ্ট বিন্দু দুটিকে অধিবৃত্তের ফোকাস বলা হয়।



দুটি বক্ররেখা মিলেই অধিবৃত্ত।
অধিবৃত্তের বিভিন্ন অংশের একটি পরিষ্কার ছবি দেয়া হলো। যাতে বুঝতে সুবিধা হয়।

অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ (Standard equation of a hyperbola).

পূর্বে বলা হয়েছে অধিবৃত্তের উপরস্থির কোন বিন্দু ফোকাস-এর দূরত্ব ও উক্তবিন্দু থেকে দিকাক্ষের লম্ব দূরত্বের অনুপাত e>1 হবে।



মনে করুন, অধিবৃত্তের কেন্দ্র $O(0,0)$, ফোকাসদ্বয় $F_1(ae,0)$ ও $F_2(-ae,o)$। M_1MM_2 ও N_1NN_2 তার দিকাক্ষদ্বয়। আরও ধরা যাক, $P(x,y)$ অধিবৃত্তের উপরস্থিত যে কোন একটি বিন্দু। P বিন্দু থেকে M_1MM_2 নিয়ামকের উপর PM_1 লম্ব আকা হলো। অধিবৃত্তের অক্ষরেখা xox' অধিবৃত্তকে A_1 ও A_2 বিন্দুতে ছেদ করে। A_1,A_2 বিন্দুদ্বয়কে অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু বলা হয়। আবার, অক্ষরেখাটি দিকাক্ষদ্বয়কে M ও N বিন্দুতে ছেদ করে।

অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

$$\frac{F_2A_2}{A_2M} = e\ ,\ e>1$$

$$\Rightarrow\ F_2A_2 = e.\ A_2M \text{ - - - - - - } (1)$$

এবং $\dfrac{F_2A_1}{A_1M} = e$

$$\Rightarrow\ F_2A_1 = e\ A_1M \text{ - - - - - - - } (2)$$

(1) নং ও (2) নং হতে পাওয়া যায় $F_2A_2+F_2A_1 = e\ (A_2M+A_1M) = e.\ A_1A_2$

$$\Rightarrow\ (OF_2-OA_2) + (OF_2+OA_1) = e.\ 2a$$

$$\Rightarrow\ (OF_2-a) + (OF_2+a) = e.\ 2a$$

$$\Rightarrow\ 2OF_2 = 2ae$$

$$\therefore\ OF_2 = ae.$$

অনুরূপভাবে, $OF_1 = ae$

আবার, (2) নং হতে (1) বিয়োগ করে পাওয়া যায়–

$$F_2A_1 - F_2A_2 = e\ (A_1M-A_2M)$$

$$\Rightarrow\ A_1A_2 = e\{(OA_1+OM) - (OA_2-OM)\}$$

$$\Rightarrow\ 2a = e(a+OM-a+OM)$$

$$\Rightarrow\ 2a = 2OM.\ e$$

$$\therefore\ MO = \frac{a}{e}$$

অনুরূপভাবে, $ON = \dfrac{a}{e}$

এখন, $x'ox$ ও $y'oy$-কে যথাক্রমে x ও y অক্ষ নির্দেশ করলে F_2 ও F_1 বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-ae, O)$ ও (ae, o)

দিকাক্ষ M_1MM_2 ও N_1NN_2– এর সমীকরণ যথাক্রমে $x = -\frac{a}{e}$ এবং $x = \frac{a}{e}$

$P(x,y)$ বিন্দু থেকে দিকাক্ষ M_1MM_2 $(x + \frac{a}{e})$- এর লম্ব দূরত্ব

$$PM_1 = \frac{|x+\frac{a}{e}|}{\sqrt{1^2+0^2}} = |x + \frac{a}{e}|$$

আবার, $PF_2 = \sqrt{(x+ae)^2+y^2}$

অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

$$\frac{PF_2}{PM_1} = e, \quad e>1$$

$$\Rightarrow PF^2 = ePM_1$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+ae)^2+y^2} = e\,|x + \frac{a}{e}|$$

$$\Rightarrow (x+ae)^2 + y^2 = e^2 (x+\frac{a}{e})^2$$

$$\Rightarrow x^2+2aex+a^2e^2+y^2 = e^2(x^2+2\frac{a}{e}x+\frac{a^2}{e^2})$$

$$\Rightarrow x^2+2aex+a^2e^2+y^2-e^2x^2-2aex-a^2=0$$

$$\Rightarrow x^2(1-e^2) + y^2 = a^2(1-e^2)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \text{ ------ } (3)$$

ধরুন, $a^2(1-e^2) = -b^2$ - - - - - - - (4)

$\therefore$ (3) নং হতে পাওয়া যায় $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ - - - - - (5)

ইহাই অধিবৃত্তের একটি আদর্শ সমীকরণ।

আবার (4) নং হতে $a^2(e^2-1) = b^2$

$$\Rightarrow e^2 = 1+\frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}\ ; \quad e > 1$$

অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব (Latus rectum)

উপকেন্দ্রের মধ্য দিয়ে অঙ্কিত জ্যা যা প্রধান অক্ষ বা আড় অক্ষের সাথে লম্ব, তাকে উপকেন্দ্রিক লম্ব বলে।

মনে করুন, LL' একটি উপকেন্দ্রিক লম্বরেখা যা অধিবৃত্তকে L ও L' বিন্দুতে ছেদ করে। মনে করুন, L বিন্দুর স্থানাংক = (ae, l)

$\therefore$ $L\ (ae, l)$ বিন্দুটি অধিবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর উপর অবস্থিত

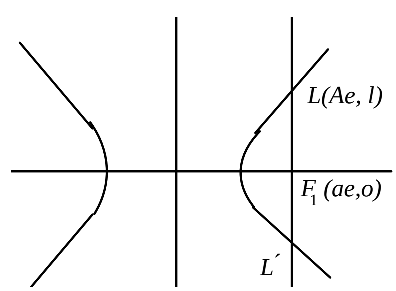
অতএব, $\frac{a^2e^2}{a^2} - \frac{l^2}{b^2} = 1.$

$$\Rightarrow e^2-1 = \frac{l^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow l^2 = b^2(e^2-1)$$

$$\Rightarrow l^2 = b^2 . \frac{b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow l = \frac{b^2}{a}$$



$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= LL' = 2F_1L = 2l = \dfrac{2b^2}{a}$

অধিবৃত্তের বৈশিষ্ট্যসমূহ (Properties of hyporbola)

(i) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ সমীকরণে এ $y = 0$ বসালে, আমরা পাই $x = \pm a$ অর্থাৎ অধিবৃত্তটি x- অক্ষকে $A_1(a,0)$ ও $A_2(-a, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে। A_1A_2 কে আড়অক্ষ বা প্রধান অক্ষ (transverse axis) বলে এবং এর দৈর্ঘ্য $= 2a$ একক।

(ii) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ সমীকরণে এ x=0 বসালে, আমরা পাই, $y = \pm ib$ যা অবাস্তব রাশি। সুতরাং অধিবৃত্তটি y– অক্ষকে দুইটি কাল্পনিক বিন্দুতে ছেদ করে। ধরা যাক, y- অক্ষের দুইটি কাল্পনিক (জটিল) বিন্দু B_1, B_2 এমনভাবে নেওয়া হলো যেন $OB_1 = OB_2 = b$ হয়। BB_1 কে অনুবন্ধী অক্ষ (Conjugate axis) এবং এর দৈর্ঘ্য $2b$ একক।

মনে রাখার বিষয়

অধিবৃত্তের সমীকরণ ঃ $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ - এর

(i) কেন্দ্রের স্থানাংক (0,0)
(ii) শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক $(\pm a, 0)$
(iii) উপকেন্দ্রের স্থানাংক $(\pm ae, 0)$
(iv) নিয়ামক বা দিকাক্ষের সমীকরণ, $x = \pm \dfrac{a}{e}$
(v) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $x = \pm ae$.
(vi) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{2b^2}{a}$
(vii) আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a$
(viii) অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b$
(ix) আড় অক্ষের সমীকরণ, $y = 0$
(x) অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ, $x = 0$
(xi) বিকেন্দ্রিকতা বা উৎকেন্দ্রতা, $e = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}$
(xii) দিকাক্ষ ও প্রধান অক্ষের ছেদবিন্দুর স্থানাংক $= (\pm \dfrac{a}{e}, 0)$

এখন অধিবৃত্ত সম্পর্কিত কিছু সমস্যার সমাধান দেখান হল।

উদাহরণ-1 ঃ অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার উপকেন্দ্রদ্বয় (0,4) এবং (0,–2) এবং উৎকেন্দ্রতা $\dfrac{3}{2}$

সমাধান ঃ এখানে $e = \dfrac{3}{2} = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}$ এবং $S'(0, -2)$ এবং $S(0,4)$

কেন্দ্র C, SS' এর মধ্যবিন্দু হবে। অতএব কেন্দ্রের স্থানাংক (0,1)

যেহেতু $CS = CS' = \sqrt{0 + (1+2)^2} = 3$

এবং $CS = e.\ CA$

$$\Rightarrow \quad 3 = \frac{3}{2}\ .\ CA \Rightarrow CA = 2$$

অর্থাৎ a=2 এবং $\dfrac{9}{4} = 1 + \dfrac{b^2}{a^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{9}{4} - 1 = \frac{b^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 5 = b^2 \therefore \quad b = \sqrt{5}$$

যেহেতু বৃহৎ অক্ষ y–অক্ষ বরাবর

অতএব নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ

$$\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

বা, $5(y-1)^2 - 4x^2 = 20$

উদাহরণ-2 ঃ অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার ফোকাস (2,2), উৎকেন্দ্রতা 2 এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x+y = 9$

সমাধান ঃ মনে করুন, অধিবৃত্তের উপর $P(x,y)$ যে কোন একটি বিন্দু এবং উপকেন্দ্র $S(2,2)$

অতএব (x,y) এবং (2,2) এর মধ্যে দূরত্ব $SP = \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$ এবং $P(x,y)$ থেকে দিকাক্ষের উপর লম্ব দূরত্বে= $\left|\frac{x+y-9}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|$

অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই, $SP = e$, (P থেকে দিকাক্ষের দূরত্ব)

$$\therefore \quad (\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}\,)^2 = 4.\frac{(x+y-9)^2}{2}$$

বা $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2(x+y-9)^2$

বা $x^2-4x+4+y^2-4y+4 = 2x^2+2y^2+162+4xy-36x-36y$

বা $x^2 + y^2+4xy-32x-32y+154 = 0$

অতএব নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ ঃ $x^2+y^2+4xy-32x-32y+154=0$

উদাহরণ-3 ঃ অধিবৃত্ত $9x^2-16y^2-18x+32y-151 = 0$ এর কেন্দ্র, উপকেন্দ্রের স্থানাংক এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $9x^2-16y^2-18x+32y-151 = 0$ কে নিম্নরূপে লেখা যায়,

$$9(x^2-2x+1) - 16(y^2-2y+1) = 144$$

অর্থাৎ $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

এখন $x-1 = X$ এবং $y-1 = Y$ ধরে পাওয়া যায়, $\frac{x^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1$

এটিকে অধিবৃত্তের মান সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সংগে তুলনা করে পাওয়া যায়, a=4, b=3

$\therefore$ (i) উৎকেন্দ্রিকতা e হলে, $e^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{16+9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow e = \frac{5}{4}$

$$\therefore \quad ae = 4 \infty \frac{5}{4} = 5$$

(ii) অধিবৃত্তের কেন্দ্র (0,0),

অর্থাৎ $X = 0,\ Y = 0$

$\Rightarrow x-1 = 0,\ y-1 = 0$

$\Rightarrow x = 1,\ y=1$

অতএব নির্ণেয় কেন্দ্র (1,1)

(iii) উপকেন্দ্রের স্থানাংক $(\pm ae, 0)$

অর্থাৎ $X = \pm ae,\ Y = 0$

$\Rightarrow x - 1 = \pm5. \quad y-1 = 0$

$\Rightarrow x = 6; -4 \quad y = 1$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাংক (6, 1), (– 4, 1)

$\therefore$ দিকাক্ষের সমীকরণ ঃ $X = \pm \frac{a}{e} \Rightarrow x - 1 = \pm 4.\frac{4}{5}$

বা $x = 1 + \frac{16}{5}$, $x = 1 - \frac{16}{5}$

বা $5x - 21 = 0$ এবং $5x + 11 = 0$

উদাহরণ-4 ঃ $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র, উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাংক এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ অধিবৃত্তের প্রদত্ত সমীকরণ $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

এখন $x - 3 = X$ এবং $y + 2 = Y$ ধরে পাওয়া যায়, $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1$

এটিকে অধিবৃত্তের মান সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাওয়া যায় $a = 4, b = 3$.

অতএব কেন্দ্রের স্থানাংক $(X = 0, Y = 0)$ হবে $(3, -2)$

বৃহৎ অক্ষ $x-$ অক্ষ এবং বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 8$

উৎকেন্দ্রিক e হলে, $e^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}$

$= \frac{16+9}{16} = \frac{25}{16}$

$\therefore e = \frac{5}{4}$

ফোকাস, বৃহৎ অক্ষের উপর অবস্থান করে এবং কেন্দ্র হতে এর দূরত্ব ae.

অতএব ফোকাসের স্থানাংক $(\pm ae, 0)$

অর্থাৎ $X = \pm ae, Y = 0$

$\Rightarrow x - 3 = \pm 4.\frac{5}{4}$, $y + 2 = 0$

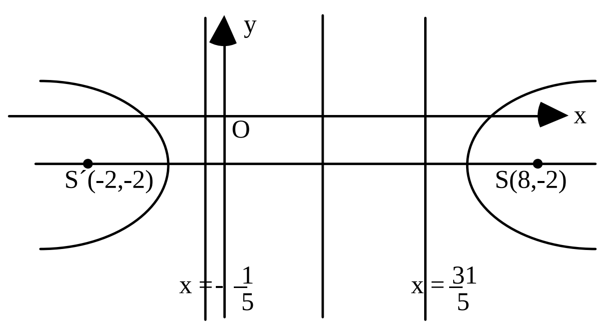
$\Rightarrow x = 3 \pm 5$ $\quad y = -2$

$\Rightarrow x = 8, -2$ $\quad y = -2$

$\therefore$ ফোকাসের স্থানাংক ঃ $(8, -2)$ এবং $(-2, -2)$

দিকাক্ষ কেন্দ্র হতে $\frac{a}{e}$ দূরত্বে অবস্থিত

অতএব দিকাক্ষের সমীকরণ ঃ $x = 3 \pm \frac{16}{5}$ অর্থাৎ $x = \frac{31}{5}$ এবং $x = -\frac{1}{5}$



অনুশীলনী-১২.৩

1. একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার ফোকাসদ্বয় $(\pm 6, 0)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা 2

2. একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন, যার উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$, ফোকাস (1,1) এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $2x+y+1=0$

3. $4x^2-9y^2=36$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা এবং অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

4. অধিবৃত্তের অক্ষদ্বয়কে x ও y অক্ষ ধরে এর সমীকরণ নির্ণয় করুন যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{2}$ এবং ফোকাসদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 6.

5. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাংক, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

এক নজরে এই ইউনিটের সংক্ষিপ্ত পাঠ্য বিষয়

	পরাবৃত্ত	উপবৃত্ত	অধিবৃত্ত
(i) আদর্শ সমীকরণ	$y2 = 4ax$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
(ii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য	$4\ \lvert a \rvert$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
(iii) উপকেন্দ্র	$(a,0)$	$(\pm ae,0)$	$(\pm ae,0)$
(iv) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x = a$	$x = \pm ae$	
(v) দিকাক্ষের বা নিয়ামকের সমীকরণ	$x = -a$	$x = \pm\frac{a}{e}$	$x = \pm \frac{a}{e}$
(vi) শীর্ষ	$(0,0)$	বৃহৎ অক্ষের উপর শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক $(\pm a,0)$ এবং ক্ষুদ্র অক্ষের উপর শীর্ষ বিন্দুর স্থানাংক $(0, \pm b)$	শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক $(\pm a,0)$
(vii) অক্ষের সমীকরণ	$y = 0$	বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ $y=0$ ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ $x=0$	প্রধান অক্ষের সমীকরণ $y=0$ অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ $x=0$
(viii) উৎকেন্দ্রতা	—	$e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$
(ix) অক্ষের দৈর্ঘ্য	—	বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $2a$, ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $2b$	প্রধান অক্ষের দৈর্ঘ্য $2a$, অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $2b$
(x) কেন্দ্র	—	$(0,0)$	$(0,0)$
(xi) শীর্ষ স্পর্শক	$x = 0$	—	—

উত্তরমালা

অনুশীলনী-১২.১

1.

	শীর্ষবিন্দু	উপকেন্দ্র	উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য
(i)	(0,0)	(3/2, 0)	6
(ii)	(0,0)	(0,2)	8
(iii)	(0,0)	(–3/4, 0)	3
(iv)	(0,0)	(0,–3)	12

2.

	শীর্ষবিন্দু	উপকেন্দ্র	উপকেন্দ্রিক লম্ব	অক্ষরেখার সমীকরণ	নিয়ামকের সমীকরণ
(i)	(2, 0)	(3, 0)	4	$y = 0$	$x-1 = 0$
(ii)	(4, 2)	(6, 2)	8	$y-2=0$	$x-2=0$
(iii)	(3, 2)	(4, 2)	4	$y-2 = 0$	$x-2=0$
(iv)	(–1, –1)	(–1, 0)	4	$x+1 = 0$	$y+2 = 0$

3. (3, 6) 4. $y^2 = \frac{9}{2}\ x$.

5. $(\frac{6}{5}, \frac{6}{5})$; (3/10, 0)

7. $(x-y)^2+8(x+y)-16 = 0$

8. $x-y+3=0$, $x+y-9 = 0$.

9. $y+x+1 = 0$

10. 8 বর্গ একক।

অনুশীলনী-১২.২

1. (i) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ (ii) $x^2+2y^2=31$

2.

	উৎকেন্দ্রতা	উপকেন্দ্রদ্বয়	নাভিলম্ব	নাভিলম্বের সমীকরণ	নিয়ামকের সমীকরণ
(i)	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(\pm a\sqrt{\frac{2}{3}},0\right)$	$\frac{2a}{3}$,	$x=\pm a\sqrt{\frac{2}{3}}$,	$x=\pm a\sqrt{\frac{3}{2}}$
(ii)	$\frac{1}{2}$	$(\pm\sqrt{2},0)$	$3\sqrt{2}$	$x=\pm\sqrt{2}$	$x=\pm 4\sqrt{2}$
(iii)	$\frac{\sqrt{7}}{4}$	$(2,-3\pm\sqrt{7})$	$\frac{9}{2}$	$y+3=\pm\sqrt{7}$,	$y+3=\pm\frac{16}{\sqrt{7}}$

3. $3x^2+4y^2=17$

4. $3x^2+3y^2+2xy+2x-10y+3=0$; 2

5. $P=5$; $(\pm 2, 0)$; $4\sqrt{5}$ এবং 8.

অনুশীলনী-১২.৩

1. $3x^2-y^2=27$

2. $7x^2+12xy-2y^2+22x+16y-7=0$

3. $\frac{\sqrt{13}}{3}$; 6, 4

4. $5x^2-4y^2=20$

5. $(\pm 13, 0), \frac{25}{6}, 13x=\pm 144.$