ইউনিট ১৩

ভেক্টর ও স্কেলার রাশি

ভূমিকা

এতদিন মাধ্যমিক ও উচ্চমাধ্যমিক শ্রেণীতে গণিতে বীজগণিত, পাটিগণিত, জ্যামিতি, ত্রিকোণমিতি ইত্যাদি শেখানো হয়েছে।

বর্তমানে গণিতের নতুন সিলেবাসে গণিতের 'ভেক্টর' শাখাটি যুক্ত করা হয়েছে। বিজ্ঞানের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যা সমাধানে বিশেষ করে গণিত শাস্ত্রের অনেক সমস্যা সমাধানে ভেক্টরের প্রয়োগ খুবই অপরিহার্য বিধায় স্কুল হতেই ভেক্টর শিক্ষাদানের একটি বিশেষ পদক্ষেপ নেয়া হয়েছে। এ পদক্ষেপটি গণিত শিক্ষা ব্যবস্থার একটি মহতী উদ্যোগ বলা চলে।

বিভিন্ন গণিতবিদ রেনে দেকার্ত (১৫৯৬-১৬৫০), লিবনিজ (১৬৭৯), মোবিয়াস (১৮২৬), বেলাভিটিস (১৮৩২), হেমিলটন (১৮৪৩-৪৪), এ রকম পর্যায়ক্রমিকভাবে অনেক গণিতবিদের চিন্তার ফসল এই ভেক্টর। অবশেষে ১৯ শতকের মধ্যবর্তী সময়ের গণিত শাস্ত্রে অনেক গণিতবিদের অনেক চিন্তাধারার ফসল হিসাবে 'ভেক্টর' নামের গণিত শাস্ত্রের একটি শাখা স্বকীয়রূপে বিবেচিত হওয়া শুরু হয়। বর্তমান যুগে 'ভেক্টর'-এর জ্ঞান অর্জন ও এর প্রয়োগ গণিতশাস্ত্রে একটি অতিব গুরুত্বপূর্ণ শাখা হিসেবে বিবেচিত। গণিতবিদ, পদার্থবিদ, প্রকৌশলী ও বিভিন্ন শাখার বিজ্ঞানীগণ তাদের গাণিতিক সমস্যা সমাধানের জন্য 'ভেক্টর' ব্যবহার করে থাকেন। বিশেষ করে ফলিত বিজ্ঞানের ক্ষেত্রে, জ্যামিতিক ধ্যান ধারণা ব্যাখায়, বলবিদ্যার ক্ষেত্রে ভেক্টরের প্রয়োগ অপরিসীম। সংক্ষিপ্তভাবে বলা যায়, ফিজিক্যাল সায়েন্স-এর অনেক গাণিতিক সমস্যা সমাধানের জন্য 'ভেক্টর' একটি সহজ ভাষা ও পদ্ধতি হিসাবে ব্যবহার করা হয়ে থাকে।

উদ্দেশ্যঃ

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- *ভেক্টর ও স্কেলার রাশি সম্পর্কে জানতে পারবেন;*
- *ভেক্টরের পরমমাণ ও অবস্থান ভেক্টর সম্পর্কে জানতে পারবেন;*
- *ভেক্টরের সমতা , শূণ্য ভেক্টর ও একক ভেক্টর সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন;*
- *ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার দ্বারা গুণ করতে পারবেন এবং এই প্রক্রিয়াগুলির বৈশিষ্ট্যসমূহ বর্ণনা করতে পারবেন;*
- *দ্বিমাত্রিক ও ত্রিমাত্রিক স্থানাংক পদ্ধতিতে ভেক্টর বিশ্লেষণ করতে পারবেন;*
- *ভেক্টরের স্কেলার গুণন বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন;*
- *একক ভেক্টর ও তাদের প্রয়োগ সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন।*

পাঠ ১ ভেক্টর ও স্কেলার রাশি এবং জ্যামিতিক ভেক্টরের ধারণা

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ভেক্টর ও স্কেলার রাশি সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- ভেক্টরের পরমমান ও অবস্থান ভেক্টর সম্পর্কে জানতে পারবেন।

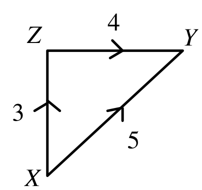
প্রকৃতির বস্তুজগতে যা কিছু পরিমাপ যোগ্য, তাকেই রাশি বলে। রাশি দুই প্রকার। যথা- ১. স্কেলার রাশি, ২. ভেক্টর রাশি।

প্রাকৃতিক বস্তু জগতে যা কিছু পরিমাপযোগ্য, তাকেই রাশি বলে।

স্কেলার রাশি ঃ যে সমস্ত রাশির শুধুমাত্র মান জানলেই চলে, দিক নির্দেশের প্রয়োজন হয় না, তাকে স্কেলার রাশি বলে। যেমনঃ ১০ কেজি চালের জন্য শুধু উহার পরিমাণ জানলেই চলে, দিকের কোন প্রয়োজন হয় না। এছাড়াও তাপমাত্রা, দ্রুতি, ওজন ইত্যাদি স্কেলার রাশি।

ভেক্টর রাশি (Vector) ঃ যে সকল রাশির মান ও দিক উভয়েই আছে, তাদেরকে ভেক্টর রাশি বলে। যেমনঃ সরণ, ত্বরণ, বল, বেগ ইত্যাদি। কারণ এদের মান ও দিক উভয়ই আছে।

যদি একজন লোক হেঁটে X অবস্থান থেকে 3 মিটার উত্তরে Z যেয়ে পর্যন্ত 4 মিটার পূর্বে Y অবস্থানে আসে; তার সম্পূর্ণ সরণ 5 মিটার হয়। লোকটির সরণ ভেক্টর রাশি $\overrightarrow{XY}$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়, যেখানে দূরত্বের মান $= |\overrightarrow{XY}|$ এবং তীর চিহ্ন X থেকে Y- এর দিকে দূরত্ব নির্দেশ করে।



চিত্র ১৩.১

এখানে X হলো যাত্রাবিন্দু এবং Y হলো শেষ বিন্দু। $\overrightarrow{XY}$ কে সাধারণতঃ $\underline{a}$ or $\vec{a}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং ভেক্টর রাশিকে সাধারণ গাণিতিক নিয়মে যোগ বিয়োগ করা যায় না। এ উদ্দেশ্যে এক বিশেষ বীজগণিতের প্রয়োজন, যাকে ভেক্টর বীজগণিত বলে।

স্কেলার রাশির শুধুমাত্র মান আছে, ভেক্টর রাশির মান ও দিক উভয়ই আছে।

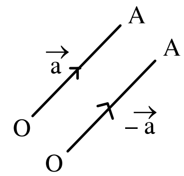
মনে রাখার বিষয়

রাশি দু' প্রকার ঃ

১. স্কেলার বা অদিক রাশি (Scalar quantity);
২. ভেক্টর রাশির বা সদিক রাশি (Vector quantity)

সদিক রেখার সাহায্যে একটি ভেক্টর রাশির প্রকাশ

জ্যামিতিতে তীরচিহ্নিত একটি রেখাংশ দিয়ে একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য এবং দিককে বুঝানো হয়। সুতরাং একটি ভেক্টর রাশিকে একটি রেখাংশ দ্বারা সূচিত করা যায়, যেখানে রেখাংশের দৈর্ঘ্য হবে ভেক্টর রাশির মান ও তীর চিহ্ন এর দিক নির্দেশ করে।



চিত্র ১৩.২

যেমনঃ $\overrightarrow{OA}$ রেখার দৈর্ঘ্য OA ও তীরচিহ্ন যথাক্রমে রাশিটির মান ও দিক নির্দেশ করে। যেখানে, O হলো মূলবিন্দু বা আদিবিন্দু বা প্রারম্ভিক বিন্দু এবং A হলো শেষ বা প্রান্তীয় বিন্দু।

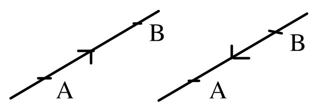
চিত্রে, $\overrightarrow{AO}$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{OA}$ এর বিপরীত ভেক্টর সূচিত করে।

দিক নির্দেশিত রেখাংশ (Directed line segment) এর তিনটি বৈশিষ্ট্য রয়েছে।

(i) $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা সূচিত ভেক্টরের মান বা সদিক রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$ এর দৈর্ঘ্য $= |\overrightarrow{AB}|$, স্পষ্টতঃ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$.

KY© 13.3

(ii) সদিক রেখাংশ AB যে অসীম রেখার অংশ, তাকে কার্যকর রেখা বা ক্রিয়ারেখা বা ধারক রেখা বলা হয়। নিম্নোক্তভাবে $\overrightarrow{AB}$ কে সূচিত করা হয়।



KY© 13.4

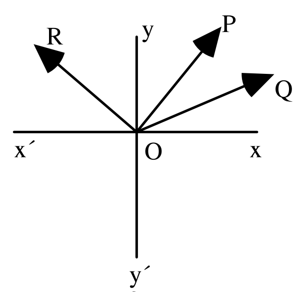
(iii) ক্রিয়াদিক ঃ $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের ক্রিয়াদিক হলো A হতে B-এর দিকে এবং $\overrightarrow{BA}$ এর ক্রিয়াদিক হলো B হতে A এর দিকে।

প্রত্যেক দিক নির্দেশিত রেখাংশ একটি ভেক্টর।

ভেক্টরের পরম মান ঃ একটি ভেক্টর $\vec{a}$ এর পরমমান বলতে ঐ ভেক্টরটির শুধুমাত্র মানকেই বুঝায়, যা হলো যোগবোধক বাস্তব সংখ্যা। অর্থাৎ $\vec{a}$ দ্বারা সূচিত রেখার দৈর্ঘ্যকে বুঝায়। অতএব, $\vec{a}$ ভেক্টরের পরম মান হলো $|\vec{a}|$ বা a .

অবস্থান ভেক্টর (Position Vector) ঃ কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর প্রেক্ষিতে অন্য যে কোন বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টর দিয়ে নির্দেশ করা হয়, তাকে ঐ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলে।

মনে করুন, x- অক্ষ ও y- অক্ষ পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। O বিন্দুকে অক্ষদ্বয়ের মূলবিন্দু বলা হয়। সংজ্ঞানুযায়ী, মূলবিন্দু O-এর প্রেক্ষিতে P, Q, R- এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$.



চিত্র ১৩.৫

পাঠ ২ ভেক্টরের সমতা, শূন্য ভেক্টর ও একক ভেক্টর।

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

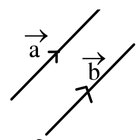
- ভেক্টরের সমতা, শূন্য ভেক্টর ও একক ভেক্টর সম্পর্কে জানতে পারবেন।

ভেক্টরের সমতা, শূন্য ভেক্টর ও একক ভেক্টর

সমান ভেক্টর (Equal Vector) ঃ দুটি ভেক্টর পরস্পর সমান হবে যদি তাদের দৈর্ঘ্য সমান ও দিক একই হয় এবং ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল হয়।

(i) $\vec{a}$, $\vec{b}$ -এর ধারকরেখা একই হয়।

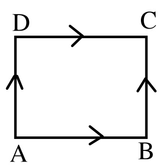
অর্থাৎ $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}|, \\ \vec{a}\ \vec{b} \text{ - এর দিক একই।} \end{cases}$



চিত্র ১৩.৬

[$\Leftrightarrow$ অর্থ যদি এবং কেবল যদি]

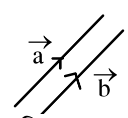
(ii) যদি ধারক সমান্তরাল হয় ABCD একটি বর্গক্ষেত্র হলে- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ এবং $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$



চিত্র ১৩.৭

ঋণাত্মক ভেক্টর (Negative of a Vector) ঃ

যদি দুটি ভেক্টরের দৈর্ঘ্য সমান, ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল কিন্তু দিক বিপরীত হয়, তবে একটি ভেক্টর অপরটির ঋণাত্মক। চিত্রে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান কিন্তু দিক বিপরীত। অর্থাৎ $\vec{a} = -\vec{b}$



চিত্র ১৩.৮

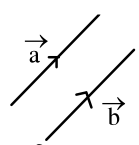
শূন্য ভেক্টর (Null or Zeor Vector) ঃ

ভেক্টরের মান শূন্য হলে, তাকে শূন্য ভেক্টর বলে। দুটি সমান ভেক্টর বিয়োগ করলে অথবা একটি ভেক্টরের সাথে তার ঋণাত্মক ভেক্টর যোগ করলে শুন্য ভেক্টর পাওয়া যায়। শুন্য ভেক্টর নাল ভেক্টর নামেও অভিহিত।

i) শূন্য ভেক্টরের কোন মান নেই

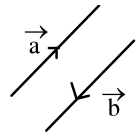
ii) শূন্য ভেক্টর 0 বা $\vec{0}$ দ্বারা সূচিত

সদৃশ ভেক্টর (Like Vector) ঃ দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের দিক একই বলে, ভেক্টরদ্বয়কে সদৃশ ভেক্টর বলে। চিত্রে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুটি ভেক্টর সদৃশ।



চিত্র ১৩.৯

বিসদৃশ ভেক্টর (Unlike Vector) ঃ দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের দিক ভিন্ন হলে, ভেক্টরদ্বয়কে বিসদৃশ ভেক্টর বলে। চিত্রে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুইটি বিসদৃশ ভেক্টর।



চিত্র ১৩.১০

একক ভেক্টর (Unit Vector) ঃ যে ভেক্টরের মান এক, তাকে একক ভেক্টর বলে। ধরা যাক, $\vec{a}$ একটি ভেক্টর। তাকে একক ভেক্টর বলা হবে যদি $|\vec{a}| = 1$ হয়। অন্যথা একক ভেক্টর পেতে হলে ভেক্টরটিকে তার মান দিয়ে ভাগ দিতে হবে। অর্থাৎ তখন একক ভেক্টর $= \frac{}{||}$

একক ভেক্টরকে $\hat{a}$ দ্বারাও সূচিত করা হয়। অতএব যদি $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ভেক্টর রাশি হয় তবে এদের ভেক্টর হলো যথাক্রমে $\hat{u}$, ◊ এবং ŵ ।

পাঠ ৩ ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার দ্বারা গুণ

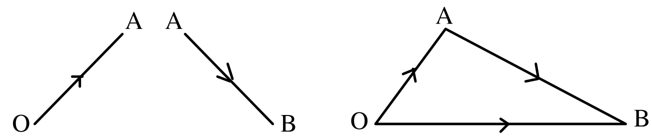
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ভেক্টরের যোগ সম্পর্কে জানতে পারবেন;
- ভেক্টর রাশির যোগের উপাংশ সূত্র নির্ণয় করতে পারবেন;
- ভেক্টরের বিয়োগ সম্পর্কে জানতে পারবেন;
- ভেক্টরের বীজগণিতের বিধি সম্পর্কে জানতে পারবেন;
- প্রান্তবিন্দুর অবস্থান ভেক্টরের সাহায্যে ভেক্টরকে সূচিত করতে পারবেন।

ভেক্টরের যোগ (Addition of Vectors) ঃ

দুই বা ততোধিক ভেক্টরের একত্রিত মান বা যোগফল একটি নূতন ভেক্টর রাশি দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এই নূতন ভেক্টর রাশিকে ভেক্টরগুলির যোগফল বা লব্ধি বলা হয়।



KY© 13.11

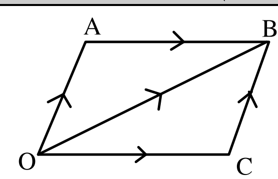
মনে করুন, $\overrightarrow{OA}=a$, $\overrightarrow{AB}=b$ এমন দুটি ভেক্টর রাশি যেন $\vec{a}$ এর শেষ বিন্দু এবং $\vec{b}$ এর আদিবিন্দু একই, তাহলে $\vec{a}$ এর আদিবিন্দু O এবং $\vec{b}$ এর শেষ বিন্দু B এর সংযোগ রেখাংশ $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরকে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দুটির যোগফল বা লব্ধি বলা হয় এবং $\vec{a}+\vec{b}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

অর্থাৎ ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$$

মনে রাখার বিষয় ঃ

ত্রিভুজ সূত্র ঃ একই বিন্দুতে একই সময়ে কার্যরত সমজাতীয় এবং সমতলীয় দুইটি দিক রাশি কোন একটি ত্রিভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা একইক্রমে দিকে ও মানে সূচিত হলে, তাদের যোগফল বা লব্ধি তৃতীয় বাহুর বিপরীত ক্রমে সূচিত হয়।



চিত্র ১৩.১২

মনে করুন $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ এবং $\overrightarrow{OC}=\vec{b}$। $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরের যোগফল বা লব্ধি OABC সামন্তরিকটি সম্পূর্ণ করে এর কর্ণের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। যেহেতু সামন্তরিকের বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল অতএব $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}=\vec{a}$ এবং $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=\vec{b}$

এখন $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$

$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{OB}$$
$$=\vec{c}$$

$\vec{c}=\overrightarrow{OB}$, সামন্তরিকের কর্ণ।

আবার, $\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}$

$$=\overrightarrow{OB}$$
$$=\vec{c}$$

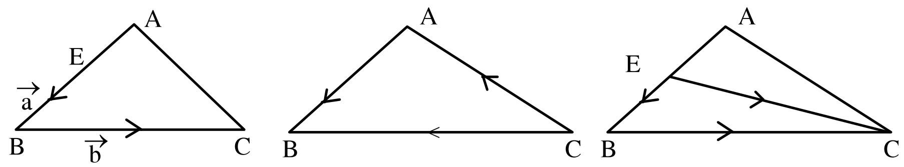
$$\therefore\ \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

সুতরাং সামন্তরিকের কর্ণ ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল বা লব্ধি প্রকাশ করে। একে ভেক্টরযোগের সামন্তরিক সূত্র বলে।

মনে রাখার বিষয় ঃ

সামন্তরিক সূত্র ঃ কোন সামন্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দিয়ে দুইটি ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত করা হলে, উক্ত ভেক্টরদ্বয়ের সূচক রেখার ছেদবিন্দুগামী সামন্তরিকের কর্ণটি ভেক্টরদ্বয়ের যোগফলের মান ও দিক সূচিত করবে।

উদাহরণ-1 ঃ ABC ত্রিভুজে, E, AB এর মধ্যবিন্দু। $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{BC}$ বাহু যথাক্রমে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দ্বারা সূচিত। $\overrightarrow{CA}$ এবং $\overrightarrow{EC}$ এর মান $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।



চিত্র ১৩.১৩

সমাধান ঃ

২নং চিত্র হতে,

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$

এবং $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = -\vec{b}$

$\therefore\ \overrightarrow{CA} = -\vec{a} - \vec{b} = -(\vec{a} + \vec{b})$

আবার, ৩নং চিত্র হতে,

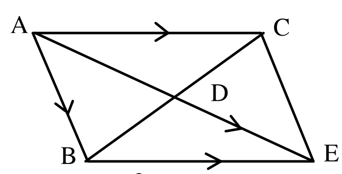
$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{2}\ \vec{a} + \vec{b}$

উদাহরণ-2 ঃ ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D, দেখান যে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$

সমাধান ঃ



চিত্র ১৩.১৪

ABEC সামন্তরিকটি সম্পূর্ণ করুন। $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$ [∵ পরস্পর সমান ও সমান্তরাল]

$\therefore\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$ [ত্রিভুজ সূত্র]

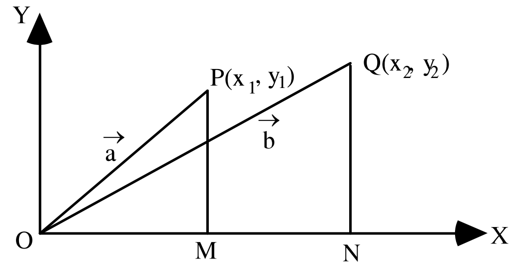
সামন্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

অতএব $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$

(iii) ভেক্টর রাশির যোগের উপাংশ সূত্র ঃ

যে কোন স্থানাংক ব্যবস্থায় একটি ভেক্টর রাশিকে উপাংশে বিভক্ত করা যায়। প্রত্যেকটি ভেক্টর রাশিকে উপাংশে বিভক্ত করে উপাংশগুলোর বীজগাণিতিক যোগফল নির্ণয় করে এদের লব্ধি-দিক রাশি নির্ণয় করা যায়।



চিত্র ১৩.১৫

মনে করুন, পরস্পর সমকোণে অবস্থিত OX, OY সরলরেখা দুইটি যথাক্রমে X ও Y অক্ষ নির্দেশ করে। XY- সমতলে X-অক্ষের সাথে কোণে অবস্থিত OP দ্বারা a মানের একটি ভেক্টর রাশি $\vec{a}$ এর মান ও দিক নির্দিষ্ট রয়েছে। অনুরূপভাবে, OQ দ্বারা $\vec{b}$ কে নির্দেশ করে। মনে করুন P এর স্থানাংক (x_1,y_1) এবং Q এর স্থানাংক হলো (x_2, y_2) এবং ধনাত্মক X–Y অক্ষে একক দিক রাশি হলো $\hat{i}$, $\hat{j}$ । X- অক্ষের উপর P ও Q হতে যথাক্রমে PM ও QN লম্ব টানুন।

অতএব $\vec{a} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$, $\hat{i} = \frac{\quad}{OM}$; $\hat{j} = \frac{\quad}{PM}$

একক ভেক্টর রাশির সংজ্ঞানুসারে $\overrightarrow{OM} = \hat{i}\ OM = \hat{i}\ x_1$

$$\overrightarrow{PM} = \hat{j}\ PM = \hat{j}\ y_1$$

কাজেই $\overrightarrow{OP} = \hat{i}\ x_1 + \hat{j}\ y_1$

অর্থাৎ $\vec{a} = \hat{i}\ x_1 + \hat{j}\ y_1$

অনুরূপভাবে $\vec{b} = \hat{i}\ x_2 + \hat{j}\ y_2$

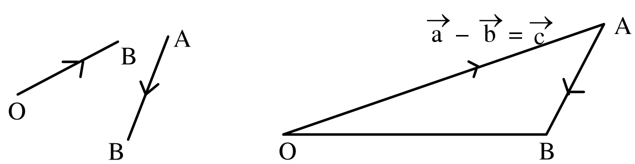
সুতরাং $\vec{a} + \vec{b} = \hat{i}\ x_1 + \hat{j}\ y_1 + \hat{i}\ x_2 + \hat{j}\ y_2$

$$= \hat{i}\ (x_1+x_2) + \hat{j}\ (y_1+y_2)$$

ভেক্টরের বিয়োগ (Subtraction of Vector)

মনে করুন, $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুইটি ভেক্টর। তাদের একটির সাথে অপরটির ঋণাত্মক ভেক্টরের যোগফলকে ভেক্টর বিয়োগ বলে। অর্থাৎ $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টর দুটির বিয়োগ নিম্নলিখিত ভাবে লেখা হয়,

(i) $\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$



চিত্র ১৩.১৬

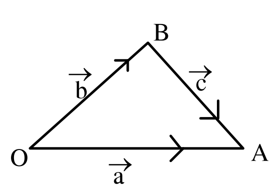
মনে করুন, $\overrightarrow{OB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$,

A, B যোগ করুন।

এখন $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA}$

অর্থাৎ $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ [$\overrightarrow{OA} = \vec{c}$ ধরে]

(ii)



চিত্র ১৩.১৭

ধরুন, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, যেখানে $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

$\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$

$\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$

চিত্র থেকে $\vec{c} = \overrightarrow{BA}$

স্কেলার দ্বারা গুণন

$\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{b} + \vec{b} + \vec{b} + \vec{b}$ এই ভেক্টর যোগটি বিবেচনা করুন। একে নিম্নলিখিত ভাবেও লেখা যায় ঃ $3\vec{a} + 5\vec{b}$

আবার $-3\vec{a}$ বলতে $-\vec{a} - \vec{a} - \vec{a}$ বুঝায়।

অতএব m যে কোন বাস্তব সংখ্যা বা স্কেলার হলে $m\vec{a}$ বলতে $\vec{a}$ ভেক্টরের m $(m>0)$ গুণিতক বুঝায় এবং উহার মান $|m\vec{a}|$ এবং দিক হবে $\vec{a}$ ভেক্টরের দিকে। যদি m এর মান ঋণাত্মক হয় অর্থাৎ $m<0$ হয় তাহলে $m\vec{a}$ ভেক্টরের দিক হবে $\vec{a}$ ভেক্টরের বিপরীত দিকে। $m=0$ হলে $m\vec{a}$ একটি শূন্য ভেক্টর হবে।

মনে রাখার বিষয় ঃ

কোন ভেক্টরকে একটি বাস্তব সংখ্যা বা স্কেলার দ্বারা গুণ করলে গুণফল একটি ভেক্টর হয়।

ভেক্টর বীজগণিতের বিধি

যদি $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টর হয় এবং m ও n স্কেলার হয়, তবে

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ [বিনিময় সূত্র]

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ [সংযোজন সূত্র]

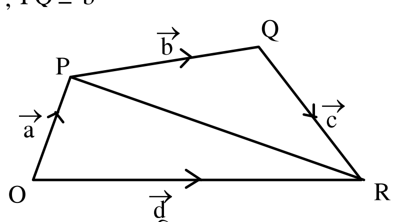
3) $m\vec{a} = \vec{a}m$ [গুণের বিনিময় সূত্র]

4) $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$ [গুণের সংযোজন সূত্র]

5) $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$ [বন্টন সূত্র]

6) $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$ [বন্টন সূত্র]

প্রমাণ ঃ 2 ধরুন, $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$, $\overrightarrow{QR} = \vec{c}$, $\overrightarrow{PQ} = \vec{b}$



চিত্র ১৩.১৮

$\therefore \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OQ}$

এবং $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{PR}$

এখন, $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} = \vec{d}$ (মনে করুন)

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{d}$

আবার, $\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OR}=\vec{d}$

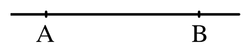
i.e. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{d}$

$\therefore \quad \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

3. 1. $\vec{a} = \vec{a}$

ধরুন, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ এবং $\vec{a}$ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{i}$

$\therefore \quad \vec{a} = |\vec{a}|\,\hat{i}$



চিত্র ১৩.১৯

$\therefore \quad 1.\vec{a} = AB\,\hat{i}$

$= \overrightarrow{AB}$

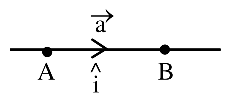
$= \vec{a}$

$\therefore \quad \boxed{1.=\vec{a}}$

4. $\boxed{m(n) = (mn)\,\vec{a}}$

ধরুন, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ এবং $\vec{a}$ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{i}$

$\therefore \quad \vec{a} = |\vec{a}|\,\hat{i} = AB\,\hat{i}$



চিত্র ১৩.২০

$\therefore \quad m(n\,\vec{a}) = m(nAB)\,\hat{i}$

$= (mn)\,AB\,\hat{i}$

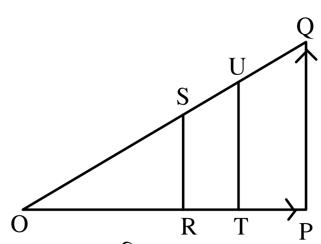
$= (mn)\,\overrightarrow{AB}$

$= (mn)\,\vec{a}$

$\therefore \quad \boxed{m(n) = (mn)\,\vec{a}}$

6. ধরুন, $\overrightarrow{OP}=\vec{a}$ এবং $\overrightarrow{PQ}=\vec{b}$

$\therefore \quad \overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\vec{a}+\vec{b}$



চিত্র ১৩.২১

ধরুন $0<m<1$

PQ || RS এবং PQ || TU অংকন করুন।

এখন ΔOPQ ও ΔOSR সদৃশকোণী।

$\therefore \ \frac{OR}{OP} = \frac{SR}{PQ} = \frac{OS}{OQ} = m$ (ধরে)

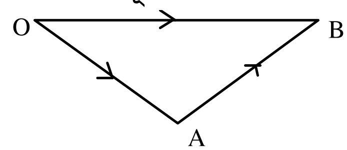
$\therefore \ \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$

$m\overrightarrow{OQ} = m\overrightarrow{OP} + m\overrightarrow{PQ}$

$m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

$m>1$ হলে একইভাবে প্রমাণ করা যাবে।

প্রান্তবিন্দুর অবস্থান ভেক্টরের সাহায্যে ভেক্টরকে সূচিত করণ



চিত্র ১৩.২২

মনে করুন O, মূলবিন্দুর সাপেক্ষে $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দু A এবং B এর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ । $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরটিকে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়।

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ [ত্রিভুজ সূত্র]

$\therefore \ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

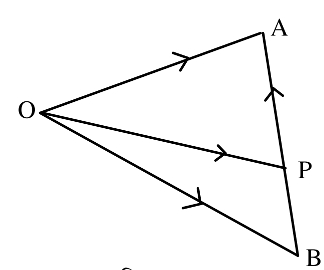
$= \vec{b} - \vec{a}$

= B এর অবস্থান ভেক্টর - A এর অবস্থান ভেক্টর

আবার $\overrightarrow{BA}$=A এর অবস্থান ভেক্টর - B এর অবস্থান ভেক্টর।

বিভক্তিকরণ সূত্র ঃ যদি A এবং B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ হয় এবং $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের উপরস্থ P বিন্দু AB-কে m ঃ n অনুপাতে বিভক্ত করে, তবে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP} = \frac{m+n}{m+n}$ হবে।

প্রমাণ ঃ



চিত্র ১৩.২৩

মনে করুন, মূল বিন্দু O- এর প্রেক্ষিতে A এবং B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ । AB রেখার অন্তস্থঃ P বিন্দু AB কে m ঃ n অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore \ \frac{AP}{PB} = \frac{m}{n} \qquad n.AP = m.PB$

এখন ΔOAP হতে, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}$

$\vec{a} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}$

$n\vec{a} = n\overrightarrow{OP} + n\overrightarrow{PA}$ - - - - - - - - - (1)

অনুরূপভাবে, ΔOPB থেকে

$m\vec{b} = m\overrightarrow{OP} + m\overrightarrow{PB}$ - - - - - - - - - - (2)

(1) + (2) $\ n\vec{a} + m\vec{b} = (m+n)\overrightarrow{OP} + (m\overrightarrow{PB} + n\overrightarrow{PA})$

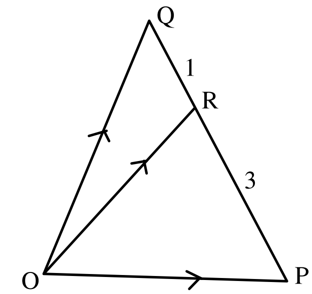
$n\vec{a} + m\vec{b} = (m+n)\overrightarrow{OP} + 0$ [$\because$ nAP = mPB] = দৈর্ঘ্য সমান]

$\boxed{= \frac{m+n}{m+n}}$ - - - - - - - - (3)

উদাহরণ ঃ $\overrightarrow{OP} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$ এবং $\overrightarrow{OQ} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$; R, PQ– কে 3ঃ1 অনুপাতে বিভক্ত করে। $\overrightarrow{OR}$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

$$\overrightarrow{OR} = \frac{3(-3+4)+1(5-2)}{3+1}$$
$$= \frac{-9+12+5-2}{4}$$
$$= \frac{-4+10}{4}$$
$$= \frac{-2+5}{2}$$



চিত্র ১৩.২৪

অনু ১ঃ P বিন্দুটি AB- এর মধ্যবিন্দু হলে m=n হবে এবং মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = \frac{m+m}{m+m} = \frac{m(+)}{2m} = \frac{+}{2}$.

অনু ২ঃ P বিন্দুটি AB– কে mঃ n অনুপাতে বহির্বিভক্ত করলে, $\vec{r} = \frac{m-n}{m-n}$ হবে।

সমরেখ (বা সমান্তরাল) ভেক্টর ঃ মনে করুন, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{PO}$ দুটি ভেক্টর। তাদেরকে সমরেখ (সমান্তরাল) বলা হবে যদি এবং কেবল যদি $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{PQ}$ হয়; k– একটি অশূন্য স্কেলার।

পাঠ ৪ ভেক্টর বিশ্লেষণ

উদ্দেশ্য

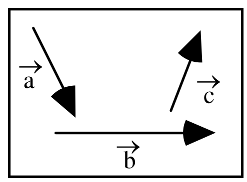
এই পাঠ শেষে আপনি-

- সম-তলী ভেক্টর সম্পর্কে জানতে পারবেন;
- দ্বিমাত্রিক স্থানাংক পদ্ধতিতে ভেক্টর বিশ্লেষণ করতে পারবেন।

ভেক্টর বিশ্লেষণ

সম-তলী ভেক্টর (Coplanar Vector) :

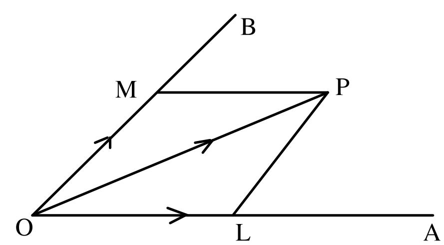
দুই বা ততোধিক ভেক্টর একই তলে অবস্থান করলে তাদেরকে সম-তলী ভেক্টর বলে। চিত্রে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ সমতলী ভেক্টর।



চিত্র ১৩.২৫

উপপাদ্য ঃ যদি $\vec{a}, \vec{b}$ দুইটি অসমরেখ ভেক্টর হয় তবে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরের সমতলে অবস্থিত যে কোন ভেক্টর $\vec{r}$ কে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর সুবিধাজনক কোন নির্দিষ্ট গুণিতকের সমষ্টি হিসেবে প্রকাশ করা যায়।

যেমন $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b}$, যেখানে x ও y স্কেলার রাশি।



চিত্র ১৩.২৬

O, যে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু। মনে করুন $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$। OA, OB, OP রেখাসমূহ সমতলীয়। P বিন্দু দিয়ে OA এবং OB এর সমান্তরাল যথাক্রমে PM এবং PL অঙ্কন করুন।

আমরা পাই $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM}$

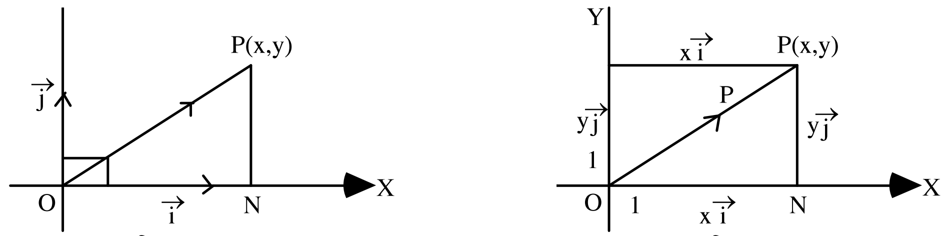
আবার $\overrightarrow{OL}$ ও $\overrightarrow{OM}$ কে ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরের কোন স্কেলার রাশির গুণিতক হিসেবে প্রকাশ করা যায় যেমন,

$$\overrightarrow{OL} = x.\overrightarrow{OA} = x.\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OM} = y.\overrightarrow{OB} = y.\vec{b}$$

$$\therefore \quad \vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

দ্বিমাত্রিক স্থানাংক পদ্ধতিতে ভেক্টর বিশ্লেষণ



১ম চিত্র ২য় চিত্র

চিত্র ১৩.২৭

মনে করুন, OX ও OY অক্ষরেখায় O বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করে। তাহলে O মূলবিন্দু এবং OX ও OY রেখাদ্বয় যথাক্রমে X ও Y অক্ষদ্বয় নির্দেশ করে। X ও Y এর ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{i}$ ও $\vec{j}$ ধরি। এখন XY সমতলে P বিন্দু যার স্থানাংক (x,y) নেয়া হল। P থেকে X– অক্ষের উপর PN লম্ব টানি এবং OP যোগ করি। সুতরাং ON=x এবং NP=y। ধরুন $\vec{OP} = \vec{r}$

এখন একক ভেক্টরের সংজ্ঞা থেকে আমরা পাই

X- অক্ষের দিকে একক ভেক্টর $= \frac{\;}{ON} = \frac{\;}{x} = \vec{i}$

Y- অক্ষের দিকে একক ভেক্টর $= \frac{\;}{NP} = \frac{NP}{y} = \vec{j}$

$\therefore \quad \vec{ON} = x\,\vec{i}$ এবং $\vec{NP} = y\,\vec{j}$

এখন $\vec{OP} = \vec{ON} + \vec{NP}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

$\therefore \quad \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

আবার সমকোণী ত্রিভুজ ONP থেকে আমরা পাই,

$$OP^2 = ON^2 + NP^2$$

$$r^2 = x^2+y^2$$

$$\text{or } r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$\therefore \quad \vec{OP}$, অর্থাৎ $\vec{r}$ ভেক্টর দিক বরাবর একক ভেক্টর $= \frac{\;}{OP} = \frac{\;}{r}$

$$= \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ভেক্টর $x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ কে $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ এভাবেও সূচিত করা যায়। $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ কে বলা হয় কলাম ভেক্টর বা কলাম মেট্রিক্স।

শিখন ফল ঃ

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

$$\left|\vec{OP}\right| = \left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right| = \left|x\,\vec{i} + y\,\vec{j}\right| = \sqrt{x^2+y^2}$$

একক ভেক্টর $= \cdot = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

উদাহরণ-1 ঃ যদি $\vec{a} = 4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$, $\vec{b} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j}$ এবং $\vec{c} = 3\,\vec{i} + 5\,\vec{j}$ হয়, তবে নিম্নের ভেক্টরগুলো

(a) $\vec{i}$ এবং $\vec{j}$ এর মাধ্যমে

(b) কলাম ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

(i) $\vec{a}+\vec{b}$ (ii) $3\vec{b}+2\vec{c}$ (iii) $2\vec{a}-\vec{c}$

সমাধান ঃ

(i) (a) $\vec{a}+\vec{b}=(4\vec{i}+3\vec{j})+(3\vec{i}-2\vec{j})=7\vec{i}+\vec{j}$

(b) $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$

(ii) (a) $3\vec{b}+2\vec{c}=3(3\vec{i}-2\vec{j})+2(3\hat{i}+5\hat{j})=15\vec{i}+4\vec{j}$

(b) $3\vec{b}+2\vec{c}=\begin{pmatrix}15\\4\end{pmatrix}$

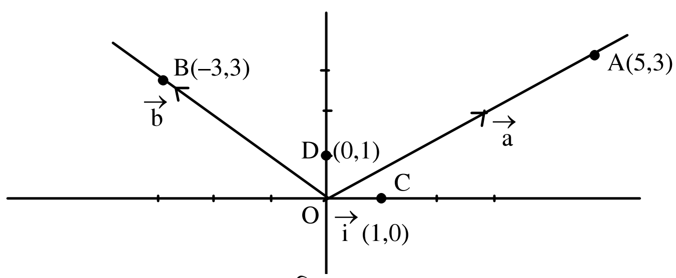
(iii) (a) $2\vec{a}-\vec{c}=2(4\vec{i}+3\vec{j})-(3\vec{i}+5\vec{j})$

$=5\vec{i}+\vec{j}$

(b) $2\vec{a}-\vec{c}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

উদাহরণ-2 ঃ A, B, C, D বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে (5, 3), (–3, 3), (1, 0) এবং (0, 1), মূলবিনদু O এর প্রেক্ষিতে A, B, C, D এর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ এবং $\overrightarrow{OD}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ



চিত্র ১৩.২৮

ধরুন $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{OD}=\vec{d}$

$\therefore\ \overrightarrow{OA}=\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}=5\vec{i}+3\vec{j}$

$\overrightarrow{OB}=\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}=-3\vec{i}+3\vec{j}$

$\overrightarrow{OC}=\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\vec{i}$

$\overrightarrow{OD}=\vec{d}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\vec{j}$

পাঠ ৫ ভেক্টরের স্কেলার গুণন

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ভেক্টরের স্কেলার জ্ঞান সম্পর্কে জানতে পারবেন।

বাস্তব সংখ্যার গুণনরীতি ভেক্টরের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা চলে না। ভেক্টর রাশি দিক ও মান দ্বারা সংজ্ঞায়িত হওয়ার কারণে ভেক্টরের গুণন পদ্ধতি একটু ব্যতিক্রমধর্মী। দুইটি পদ্ধতিতে ভেক্টর গুণন করা হয়ে থাকে।

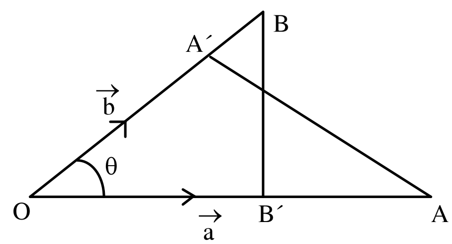
(i) স্কেলার বা ডট গুণন

(ii) ভেক্টর বা ক্রস গুণন

আমরা এই পাঠে প্রথমটির সাথে পরিচিত হব।

স্কেলার বা ডট গুণনের সংজ্ঞা ঃ

দুইটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল একটি স্কেলার রাশি হবে। স্কেলার রাশিটি হবে ভেক্টর রাশি দুটির মানের গুণফল এবং উদের মধ্যবর্তী কোণের cosine এর গুণফলের সমান।



চিত্র ১৩.২৯

মনে করুন দুইটি ভেক্টর $\vec{a}$ ও $\vec{b}$, O বিন্দুতে θ কোণ উৎপন্ন করে। এখন ab cos θ হবে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর স্কেলার বা ডট গুণন।

গাণিতিক ভাষায় সুচিত ঃ $\vec{a}\,.\,\vec{b} = ab\cos\theta = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$

অর্থাৎ $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ = ($\vec{a}$ এর মান) ($\vec{b}$ এর মান) ($\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণের cosine)

বা $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ = ($\vec{a}$ এর মান) ($\vec{a}$ বরাবর $\vec{b}$ এর অংশকের মান)

= ($\vec{b}$ এর মান) ($\vec{b}$ বরাবর $\vec{a}$ এর অংশকের মান)

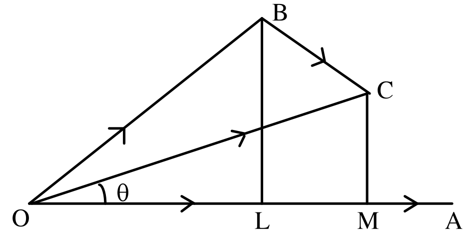
মনে রাখার বিষয় ঃ

দুটি ভেক্টরের মধ্যে ' . ' চিহ্ন বসিয়ে যে গুণন সংজ্ঞায়িত তাই ডট গুণন।

1. (i) ডট গুণন বিনিময় বিধি মেনে চলে : $\vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{b}\,.\,\vec{a}$

যেহেতু $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta = |\vec{b}|\,|\vec{a}|\cos\theta = \vec{b}\,.\,\vec{a}$

(ii) ডট গুণন সংযোজন বিধি মেনে চলে ঃ $\vec{a}\,.\,(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\,.\,\vec{b} + \vec{a}\,.\,\vec{c}$



চিত্র ১৩.৩০

মনে করুন, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ এবং $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$

অতএব $\overrightarrow{OC} = \vec{b} + \vec{c}$ [ত্রিভুজ সূত্র]

B এবং C থেকে, OA এর উপর যথাক্রমে BL এবং CM লম্ব অঙ্কন করুন।

OL, LM এবং OM দ্বারা $\vec{a}$ ভেক্টরের উপর যথাক্রমে $\vec{b}$, $\vec{c}$ এবং $\vec{b} + \vec{c}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ নির্দেশ করে।

$\angle AOC = \theta$ ধরি,

এখন, $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$

$= |\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OC}| \cos\theta$

$= (OA)\ (OM)$

$= (OA)\ (OL+LM)$

$= (OA)\ (OL)+(OA)(LM)$

$= (OA)\ (OB \cos LOB) + (OA)$ ($\vec{a}$ এর উপর $\vec{c}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ)

$= \overrightarrow{OA}\,.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\,.\overrightarrow{BC}$

$= \vec{a}\,.\,\vec{b} + \vec{a}\,.\,\vec{c}$

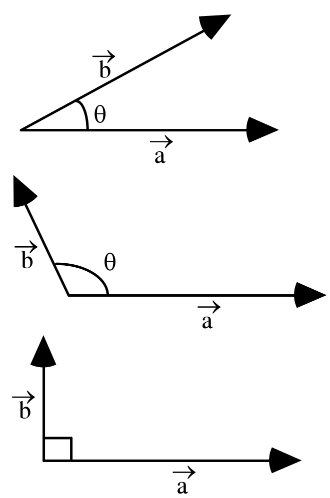
$\therefore\ \vec{a}\,.\,(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\,.\,\vec{b} + \vec{a}\,.\,\vec{c}$

2. $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুটো অশূন্য ভেক্টর হলে, তাদের স্কেলার গুণন $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$, ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা শুন্য হবে যদি অন্তর্ভুক্ত কোণ θ সূক্ষ্মকোণী, স্থূলকোণী অথবা সমকোণী হয়।

θ সূক্ষ্মকোণী হলে, $\vec{a}\,.\,\vec{b} > 0$

θ স্থূলকোণী হলে, $\vec{a}\,.\,\vec{b} < 0$

θ সমকোণী হলে, $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$



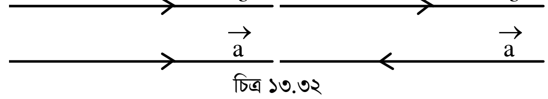
চিত্র ১৩.৩১

3(a) $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল হবে যদি

$\vec{a}\,.\,\vec{b} = ab \cos 0$ অথবা $\vec{a}\,.\,\vec{b} = ab \cos\pi$ হয়।

অর্থাৎ (i) $\vec{a}\,.\,\vec{b} = ab$, যদি সদৃশ সমান্তরাল ভেক্টর হয়

$\vec{a}\,.\,\vec{b} = -ab$, যদি অসদৃশ সমান্তরাল ভেক্টর হয়।



চিত্র ১৩.৩২

এবং (ii) $\hat{i}\,,\hat{j} = |\,\hat{i}\,|\,|\,\hat{j}\,|\cos 0^\circ = 1$

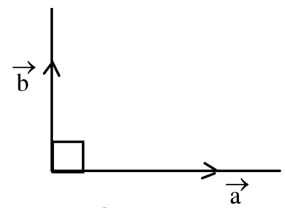
(iii) $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\,\vec{a}\,|\,|\,\vec{a}\,|\cos 0^\circ = |\,\vec{a}\,|^2$

(iv) $\vec{b}\,.\,\vec{b} = |\,\vec{b}\,|\,|\,\vec{b}\,|\cos 0^\circ = |\,\vec{b}\,|^2$

(b) (i) $\vec{a}$ S $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে যদি

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = ab\cos\frac{\square}{2} = 0$$

অর্থাৎ $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$



চিত্র ১৩.৩৩

এবং (ii) $\hat{i}\,,\hat{j} = \hat{j}\,, k = k,\ \hat{i} = 0$

$\hat{i}\,,\hat{j} = \hat{i}\,,\hat{j} = k\,.\,k = 1$

4. যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় একক ভেক্টর হয়

অর্থাৎ $|\,\vec{a}\,| = 1,\quad |\,\vec{b}\,| = 1$

তবে $\vec{a}\,,\ \vec{b} = |\,\vec{a}\,|\,|\,\vec{b}\,|\cos\theta = \cos\theta$

5. যদি $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$ হয় তবে যে কোন একটি সত্য হবে।

(i) $\vec{a} = 0$ কিন্তু $\vec{b}\ \square 0$ অথবা

(ii) $\vec{b} = 0$ কিন্তু $\vec{a}\ \square\ 0$ অথবা

(iii) $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ উভয়ই শূন্য অথবা

(iv) $\vec{a}$, $\vec{b}$ এর সাথে লম্ব।

6. $\cos\theta = \frac{\cdot}{||\,||}$

মনে করুন, $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3 + \hat{k}$

এবং $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$$\therefore\ \vec{a}\,.\,\vec{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}).(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

এবং $|\,\vec{a}\,| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$|\,\vec{b}\,| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

উদাহরণ ঃ $\vec{a} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ S $\vec{b} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দু'টির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

এখানে, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = (9, 1, -6)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = (4, -6, 5)$

মনে করুন, তাদের মধ্যবর্তী কোণ $= \theta$.

$$\therefore \cos\theta = \frac{9.4 + 1.(-6) + (-6).5}{\sqrt{9^2 + 1^2 + (-6)^2}\,.\,\sqrt{4^2 + (-6)^2 + 5^2}} = \frac{36 - 6 - 30}{\sqrt{81 + 1 + 36}\,\sqrt{16 + 36 + 25}}$$

$$\cos\theta = 0 = \cos 90^\circ$$

$$\theta = 90^\circ$$

$\therefore$ তাদের মধ্যবর্তী কোণ $= 90^\circ$.

পাঠ ৬ ত্রিমাত্রিক স্থানাংক পদ্ধতি

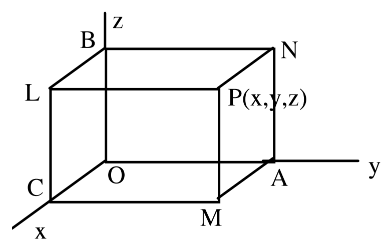
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিমাত্রিক স্থানাংক পদ্ধতিকে ভেক্টর বিশ্লেষণ করতে পারবেন।

ত্রিমাত্রিক স্থানাংক পদ্ধতি

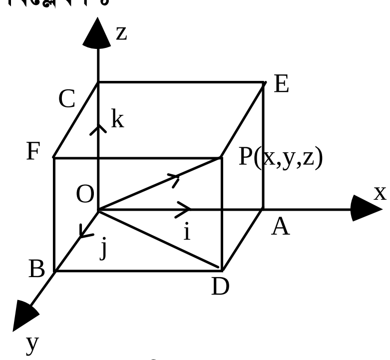
ইতিপূর্বে আমাদের আলোচনা x- অক্ষ ও y- অক্ষ-এই দুইটি অক্ষ- অর্থাৎ দ্বিমাত্রিক স্থানাংক জ্যামিতির মধ্যে সীমাবদ্ধ ছিল। কিন্তু x- অক্ষ ও y- অক্ষের ছেদ বিন্দু O- তে অপর একটি অক্ষ অর্থাৎ z- অক্ষ লম্বভাবে স্থাপন করলে - তখন আর দ্বিমাত্রিক থাকেনা। এসে যায় ত্রিমাত্রিক জ্যামিতির কথা। x ও y- অক্ষের তলকে xy- সমতল, y ও z অক্ষের তলকে yz তল এবং z ও x অক্ষের তলকে zx সমতল বলে। যেহেতু অক্ষ তিনটি পরস্পর লম্ব, তল তিনটিও পরস্পর লম্ব হবে। এই তল তিনটিকে স্থানাংক তল বলে। তল তিনটি সমগ্র স্থান (space) কে মোট আটভাবে ভাগ করে। প্রতিটি ভাগকে অষ্টতল (octant) বলে।



চিত্র ১৩.৩৪

মনে করুন, P শুন্যের (Space) একটি বিন্দু। P বিন্দুর মধ্য দিয়ে zx ॥ PMAN অঙ্কন করুন যা y অক্ষকে OA = y বিন্দুতে ছেদ করে। অনুরূপভাবে, xy ॥ LPNB এবং yz ॥ LCMP অঙ্কন করুন, তারা যথাক্রমে z ও x অক্ষকে OB = z এবং OC =x অংশ ছেদ করে। ∴ P বিন্দুর স্থানাংক = (x, y, z).

ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে ভেক্টর বিশ্লেষণ ঃ



চিত্র ১৩.৩৫

মনে করুন, OX, OY, OZ রেখাত্রয় পরস্পর O বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে এবং রেখাত্রয় যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষ (আয়ত-অক্ষ) নির্দেশ করে। X, Y ও Z অক্ষের দিকে একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ S $\hat{k}$ এবং শূন্যে অবস্থিত কোন বিন্দু P এর কার্তেসীয় স্থানাংক (x, y, z) ধরি।

চিত্র থেকে OA =x, OB = y এবং OC =z

একক ভেক্টরের সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি,

$\hat{i} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{x} \quad \therefore \overrightarrow{OA} = x\,\hat{i}$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{OB} = y\,\hat{j}$ এবং $\overrightarrow{OC} = z\,\hat{k}$

মূলবিন্দু O এর প্রেক্ষিতে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP}$ যার আদিবিন্দু O এবং শেষবিন্দু P। মনে করুন $|\overrightarrow{OP}| = r$

তাহলে ত্রিভুজ OPD এ, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP}$ - - - - - - (i)

এবং ত্রিভুজ OBD এ, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$ - - - - - - - - - - - (ii)

অতএব $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DP}$

$= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ [$\because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{OC}$]

সুতরাং $\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$

আবার $OP^2 = OD^2 + DP^2$ [$\because DP \perp OD$]

$= OB^2 + BD^2 + OC^2$ [$\because BD \perp OB$]

$= OA^2 + OB^2 + OC^2 = x^2+y^2+z^2$

$\therefore OP = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

সুতরাং OP বরাবর একক ভেক্টর, $= \dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} = \dfrac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

পাঠ ৭ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ একক ভেক্টর এবং তাদের প্রয়োগ

উদ্দেশ্য

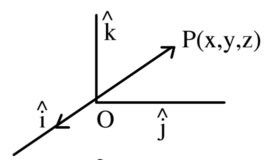
এই পাঠ শেষে আপনি-

- একক ভেক্টর ও তাদের প্রয়োগ সম্পর্কে জানতে পারবেন।

একক ভেক্টর এবং তাদের প্রয়োগ

আয়তাকার x, y, z- অক্ষের দিক নির্দেশনার জন্য যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ ব্যবহার করা হয়। এদেরকে একক ভেক্টর বলা হয়,

i.e. $|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$



চিত্র ১৩.৩৬

P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরকে $OP = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ দ্বারা লেখা হয়।

এবং $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$- বৈশিষ্ট্য ঃ

$\hat{i}\,.\,\hat{i} = |\hat{i}|\,|\hat{i}|\cos 0 = 1.$

অনুরূপভাবে, $\hat{j}\,.\,\hat{j} = \hat{k}\,.\,\hat{k} = 1.$

আবার, $\hat{i}\,.\,\hat{j} = |\hat{i}|\,|\hat{j}|\cos 90^\circ = 0$

অনুরূপভাবে, $\hat{j}\,.\,\hat{k} = \hat{k}\,.\,\hat{i} = 0$

শিখল ফল

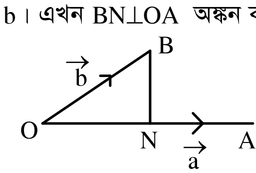
(i)	$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
(ii)	$\hat{i}\,.\,\hat{i} = \hat{j}\,.\,\hat{j} = \hat{k}\,.\,\hat{k} = 1$
(iii)	$\hat{i}\,.\,\hat{j} = \hat{j}\,.\,\hat{k} = \hat{k}\,.\,\hat{i} = 0$

ভেক্টরের অভিক্ষেপ ও উপাংশ

i) ভেক্টরে অভিক্ষেপ ঃ

মনে করুন, $OA = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\angle AOB = \theta$

এখানে O মূলবিন্দু। ধরা যাক, তার মান a ও b। এখন $BN \perp OA$ অঙ্কন করুন।



চিত্র ১৩.৩৭

∴ সমকোণী ত্রিভুজ BON থেকে

$$\cos\theta = \frac{ON}{OB}$$

$$ON = OB\cos\theta$$

$ON = b\cos\theta.$

এখন $\vec{a}$ – এর উপর $\vec{b}$ – এর লম্ব অভিক্ষেপ

$= ON$

$= b\cos\theta$

$= \frac{ab\cos\theta}{a}$

$= \frac{\cdot}{||}$

$\therefore$ $\vec{a}$ -এর উপর $\vec{b}$ - এর লম্ব অভিক্ষেপ $= \frac{\cdot}{||}$

অনুরূপভাবে, $\vec{b}$ - এর উপর $\vec{a}$ - এর লম্ব অভিক্ষেপ $= \frac{\cdot}{||}$

উদাহরণ ঃ $\vec{a} = 4\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{b} = 3\hat{i} + 7\hat{j} + 8\hat{k}$ এর অভিক্ষেপ বাহির করুন।

সমাধান ঃ

$\therefore$ $\vec{a}$ - এর উপর $\vec{b}$ -এর লম্ব অভিক্ষেপ

$$\frac{\cdot}{||} = \frac{(4+-2).(3+7+8)}{\sqrt{4^2+1^2+(-2)^2}}$$

$$= \frac{12+7-16}{\sqrt{16+1+4}} = \frac{3}{\sqrt{21}}$$

(ii) উপাংশ ঃ

মনে করুন $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\square AOB = \theta$

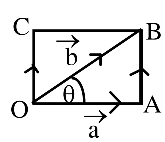
এবং $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$.

$\therefore$ $\vec{a}$ বরাবর $\vec{b}$ –এর উপাংশ $= OA$

$= b\cos\theta$

$= \frac{ab\cos\theta}{a}$

$= \frac{\cdot}{||}$



চিত্র ১৩.৩৮

এখন, OABC আয়তক্ষেত্রটি পূর্ণ করুন। সুতরাং $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$

$\therefore$ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$

$\vec{a}$ বরাবর $\vec{b}$ - এর উপাংশ + $\vec{a}$ এর উপর লম্ব বরাবর $\vec{b}$ -Fr উপাংশ = $\vec{b}$

$\frac{\cdot}{||}$ + $\vec{a}$ - এর উপর লম্ব বরাবর $\vec{b}$ - এর উপাংশ = $\vec{b}$

$\vec{a}$ -এর উপর লম্ব বরাবর $\vec{b}$ -এর উপাংশ = $\vec{b} - \frac{\cdot}{||}$

অনুরূপভাবে, $\vec{b}$ -এর উপর লম্ব বরাবর $\vec{a}$ এর উপাংশ = $\vec{a} - \frac{\cdot}{||}$

উদাহরণ ঃ $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ বরাবর $\vec{b}=5\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$-এর উপাংশ-এর মান বাহির করুন।

সমাধান ঃ $\vec{a}$ বরাবর $\vec{b}$ - এর উপাংশ $=\frac{\cdot}{||}$

$$=\frac{(2+-2).(5-3+2)}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}$$

$$=\frac{10-3-4}{\sqrt{9}}=\frac{3}{3}=1$$

মনে রাখার বিষয় ঃ

1. $\vec{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\vec{b}$ ভেক্টরের উপাংশ প্রকৃতপক্ষে $\vec{a}$ ভেক্টর উপর $\vec{b}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ।

উদাহরণঃ দুইটি ভেক্টর $\vec{a}=4\hat{i}-3\hat{j}$ ও $\vec{b}=6\hat{i}+8\hat{j}$ হলে। $\vec{a}$।, $(\vec{a}+\vec{b})$, $(\vec{b}-\vec{a})$, ও $(\vec{a}-\vec{b})$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

(i) $|\vec{a}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

(ii) $\vec{a}+\vec{b}=(4\hat{i}-3\hat{j})+(6\hat{i}+8\hat{j})=10\hat{i}+5\hat{j}$

(iii) $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10^2+5^2}=\sqrt{100+25}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

(iii) $\vec{b}-\vec{a}=(6\hat{i}+8\hat{j})-(4\hat{i}-3\hat{j})=2\hat{i}+11\hat{j}$

$\therefore |\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{2^2+11^2}=\sqrt{4+121}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

(iv) $\vec{a}-\vec{b}=-(\vec{b}-\vec{a})=-(2\hat{i}+11\hat{j})$

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+(-11)^2}=\sqrt{4+121}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

উদাহরণ ঃ $\vec{u}=\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ ও $\vec{v}=4\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ হলে $(3\vec{u}+2\vec{v})$ এর সমান্তরাল বা এর দিকে একক ভেক্টর নির্ণয় করুন।

উত্তরঃ $3\vec{u}+2\vec{v}=3(\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})+2(4\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k})$

$=3\hat{i}+9\hat{j}-6\hat{k}+8\hat{i}-4\hat{j}+8\hat{k}$

$=11\hat{i}+5\hat{j}+2\hat{k}$

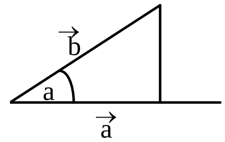
অতএব নির্ণেয় একক ভেক্টর $=\frac{3\vec{u}+2\vec{v}}{|3\vec{u}+2\vec{v}|}=\frac{11\hat{i}+5\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{11^2+5^2+2^2}}=\frac{11\hat{i}+5\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{121+25+4}}$

$=\frac{11\hat{i}+5\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{150}}=\frac{11\hat{i}+5\hat{j}+2\hat{k}}{5\sqrt{6}}$

উদাহরণ 1 ঃ $4\hat{i}-4\hat{j}+7\hat{k}$-এর উপর $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ মনে করুন $\vec{a}=4\hat{i}-4\hat{j}+7\hat{k}$

এবং $\vec{b}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$



চিত্র ১৩.৩৯

$\therefore$ $\vec{a}$ - এর উপর $\vec{b}$ - এর লম্ব অভিক্ষেপ $4\hat{i}-4\hat{j}+7\hat{k}$ $\vec{a}$ $\vec{b}$

$$= \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\,\vec{a}\,|}$$

$$= \frac{(4\,\hat{i}\,-4\,\hat{j}\,+7\,\hat{k}).(-2+)}{|\,4-4+7|}$$

$$= \frac{4.+8.+7.}{\sqrt{4^2+(-4)^2+7^2}}$$

$$= \frac{4+8+7}{\sqrt{16+16+49}} \;= \frac{19}{\sqrt{81}} \;= \frac{19}{9}$$

উদাহরণ-2 ঃ A(2, –1) ও B(–1,3) দুটি বিন্দু দেয়া আছে। AB– এর মান বাহির কর।

সমাধান ঃ

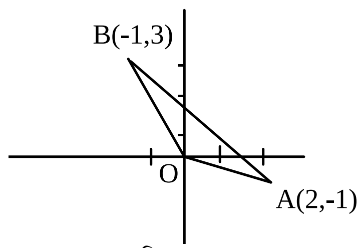
A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, □=2□–□

এবং B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর □= –□+3□

এখন AB = □ – □

□= –□+3□–2□+□

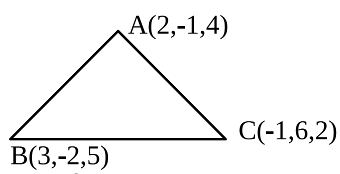
□= –3□+4□



চিত্র ১৩.৪০

উদাহরণ 3 ঃ A(2, –1, 4), B(3, –2, 5), C(–1, 6, 2)- বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। a□+b□+c□ আকারে □, □, □ বাহির করুন এবং বাহুগুলির দৈর্ঘ্য বাহির করুন।

সমাধান ঃ



চিত্র ১৩.৪১

আমরা জানি,

□ = B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর- A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর

= (3□–2□+5□–2□+□– 4□)

= □–□+□

অনুরূপভাবে, □= □–6□+2□–3□+2□–5□

□= – 4□–8□–3□

এবং □ =2□–□+4□+□– 6□–2□

□ = 3□–7□+2□

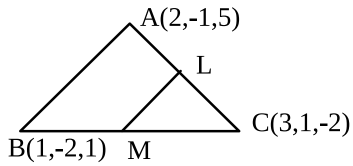
$\therefore$ AB = |□| $= \sqrt{1^2+1^2+1^2}\;\sqrt{1+1+1} \;= \sqrt{3}$

BC = |□| $= \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + (-3)^2} \;= \sqrt{16+64+9} \;= \sqrt{89}$

CA = |□| $= \sqrt{3^2+(-7)^2+2^2} \;= \sqrt{9+49+4} \;= \sqrt{62}$

উদাহরণ-4 ঃ A, B, C– এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\square-\square+5\square, \square-2\square+\square, 3\square+\square-2\square$, L, M যথাক্রমে AC ও CB এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, LM ॥ BA.

সমাধান ঃ



চিত্র ১৩.৪২

L বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= (\frac{5}{2}, 0, \frac{3}{2}) = \frac{5}{2}\square + \frac{3}{2}\square$

এবং M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= (2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = 2\square - \frac{1}{2}\square - \frac{1}{2}\square$

$\therefore \ \square = 2\square - \frac{1}{2}\square - \frac{1}{2}\square - \frac{5}{2}\square - \frac{3}{2}\square$

$\square = -\frac{1}{2}\square - \frac{1}{2}\square - 2\square$ ----------------------- (i)

এবং $\square = (2-1)\square + (-1+2)\square + (5-1)\square$

$\square = \square + \square + 4\square$

$\square = -2\,(-\frac{1}{2}\square - \frac{1}{2}\square - 2\square)$

$\square = -2\,\square$ [(i) এর সাহায্যে]

$\therefore \ \square \parallel \square$

অনুশীলনী

1. A ও B বিন্দু দুইটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $3\square+\square-2\square$ এবং $\square-3\square-\square$। বিভক্ত বিন্দুর স্থানাংক বের করুন যেখানে,
   (i) AB, 1 ঃ 3 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত হয়.
   (ii) AB, 3ঃ 1 অনুপাতে বহিস্থভাবে বহিস্থভাবে বিভক্ত হয়।
2. P, Q, R- এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $3\square+5\square-2\square, \square+2\square+3\square$ এবং $7\square-\square$ দেখান যে, P, Q, R বিন্দু তিনটি সমরেখ।
3. দেখান যে, নিম্নলিখিত কোন ভেক্টরটি $\square-5\square$ এর সাথে সমান্তরাল-
   (i) $\square+5\square$, (ii) $2\square-10\square$, (iii) $5\square-\square$
   (iv) $\frac{1}{3}\square - \frac{5}{3}\square$
4. A ও B– এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\square-3\square$ ও $2\square+5\square$ হলে, AB এর মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করুন।
   আবার, K, AB- এর উপর এমনভাবে অবস্থিত যেন $3\square=\square$ হয়, K- এর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করুন।
5. $\square$ ও $\square$ এর মধ্যবর্তী কোণ 120° হইলে $\square.\square$ এর মান বের করুন যেখানে $|\square| = 2, |\square| = \sqrt{3}$,
6. যদি $\square$ এবং $\square$ দুইটি অশুন্য ভেক্টর হয়, তবে $(\square+\square).(\square-\square)$ এর মান নির্ণয় করুন।
7. $\square = 4(\square-\square)$ এবং $\square = \square+\square+\square$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্নয় করুন।

8. □= 2□+a□+□ এবং □= 4□–2□–2□ পরস্পর লম্ব হলে a এর মান নির্ণয় কর।

9. b= 7□–6□+6□- এর দিক বরাবর □=□+2□+2k- এর উপাংশ নির্ণয় করুন। □- এর উপর □- এর লম্ব অভিক্ষেপ কত হবে?

10. □=□+3□–2□, □= 4□–2□+4□ হলে, ।3□+2□।–এর মান কত?

11. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে, সামন্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

এক নজরে এই ইউনিটের সংক্ষিপ্ত বিষয়বস্তু ঃ

1. একটি ভেক্টর রাশির পরিমাণ ও দিকের প্রয়োজন। □ ভেক্টরের মান হলো ।□। এবং এর দিক হলো O থেকে A.
2. যদি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O , মূলবিন্দু হয় তবে O বিন্দুর সাপেক্ষে যে কোন বিন্দু A এর অবস্থান ভেক্টর হল □
3. দুইটি ভেক্টর পরস্পর সমান হবে, যদি তাদের দৈর্ঘ্য ও দিক একই হয়।
4. ভেক্টর যোগ ঃ কোন সামন্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দিয়ে দুইটি ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত করা হলে, উক্ত ভেক্টরদ্বয়ের সূচক রেখার ছেদবিন্দুগামী সামন্তরিকের কর্ণটি ভেক্টরদ্বয়ের যোগফলের মান ও দিক সূচিত করবে।
5. □=□ ।□। = ।□। এবং □,□ এর সমান্তরাল।

   h□=t□ ।h□। = ।t□। এবং □,□ এর সমান্তরাল।

   অথবা h = t =0 যদি □,□ এর সমান্তরাল না হয়।
6. মূলবিন্দুর O এর সাপেক্ষে যদি A এবং B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে □ এবং□ হয়, তবে AB এর মধ্যবিন্দু (M) এর অবস্থান ভেক্টর □ =□= $\frac{1}{2}$ (+□)
7. দুইটি ভেক্টর □ এবং □এর স্কেলার গুণন হলো □.□= ।□। ।□। cosθ যেখানে θ, □ এবং □ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ।
8. বিনিময় সূত্র ঃ □.□=□.□
9. সংযোজন সূত্র ঃ □. (□+□)=□.□+□.□
10. যদি □.□=0 হয়, তবে নিম্নের যে কোন একটি সত্য হবে।

    i) □=0 কিন্তু □■0

    ii) □=0 কিন্তু □±0

    iii)□ এবং□ উভয়ই শূন্য

    iv) □ এবং □ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।
11. যদি □= x_1□+y_1□ এবং □=x_2□+y_2□ হয় তবে, □.□= $x_1x_2+y_1y_2$ এবং যদি □=x_1□+y_1□+z_1□এবং □=x_2□+y_2□+z_2□হয় তবে, □.□ = $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
12. □ এর উপর □ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ = $\frac{\cdot}{||}$

    □এর উপর □ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ = $\frac{\cdot}{||}$

উত্তরমালা

1. (i) $\frac{5}{2}\square - \frac{7}{4}\square$

   (ii) $-5\square - \frac{1}{2}\square$

5. $-\sqrt{3}$

6. $a^2 - b^2$

7. $-\frac{\square}{2}$

8. -3

9. $7(7\square - 6\square + 6k)/121$; $\frac{7}{3}$

10. $5\sqrt{6}$.