ইউনিট ১৪

ত্রিকোণমিতিক কোণ ও অনুপাত

ভূমিকা

ত্রিকোণমিতি শব্দটি এসেছে গ্রীক শব্দ tri 'gonon+met' ron থেকে যার অর্থ ত্রিভুজের পরিমাপ। গণিত শাস্ত্রের যে শাখায় ত্রিভুজের তিনটি কোণ ও তিনটি বাহুর পরিমাপ এবং তদসম্পর্কীয় বিষয় আলোচিত হয় তাকে ত্রিকোণমিতি বলা হয়। অতি প্রাচীন কালে ত্রিকোণমিতির পরিধি শুধুমাত্র ত্রিভুজের কোণ, বাহু ও ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের মধ্যে সীমিত ছিল। কিন্তু বর্তমানে বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় এর প্রয়োগ বিস্তৃত লাভ করেছে। বর্তমানে গণিতের যে কোন শাখায় শিক্ষালাভের জন্য ত্রিকোণমিতির জ্ঞান একান্ত অপরিহার্য। ত্রিকোণমিতি দুইটি শাখায় বিভক্ত। তাদের একটি হল সমতল ত্রিকোণমিতি (Plane Trigonometry) এবং অপরটি হল গোলকীয় ত্রিকোণমিতি (Spherical Trigonometry)। আমাদের আলোচনা শুধুমাত্র সমতল ত্রিকোণমিতিতে সীমাবদ্ধ থাকবে।

উদ্দেশ্য ঃ *এই ইউনিট শেষে আপনি-*

- *ত্রিকোণমিতিক কোণ সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন এবং তা প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন,*
- *রেডিয়ান কোণ কি বলতে পারবেন এবং তা প্রয়োগ করতে পারবেন,*
- *ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাতসমূহ বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন,*
- *চৌকণ অনুযায়ী ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন নির্ধারণ করতে পারবেন,*
- *ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধ্রুবতা ও সীমাবদ্ধতা সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন,*
- *ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাত সমূহের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় ও প্রয়োগ করতে পারবেন,*
- *নির্ধারিত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় করতে পারবেন এবং সমস্যা সমাধানে তা প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।*

kJb 1 ত্রিকোণমিতিক কোণ, ডিগ্রী ও রেডিয়ান পরিমাপ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

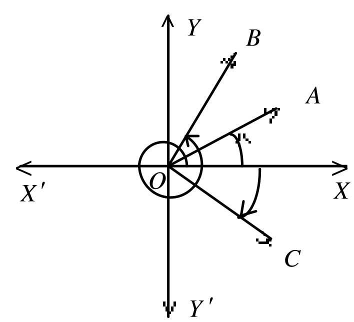
- ত্রিকোণমিতিক কোণ সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- কোণের ডিগ্রী ও রেডিয়ান পরিমাণ সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- চৌকণ সম্পর্কে জানতে পারবেন।

ত্রিকোণমিতিক কোণ ঃ

সাধারণত জ্যামিতিতে দুইটি পরস্পরছেদী রশ্মি দ্বারা কোণের উৎপত্তি হয় এবং কোণ পরিমাণ 0° হতে 360° এর মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে এবং তা হয় ধনাত্মক। জ্যামিতিতে ঋণাত্মক কোণ অর্থহীন। ত্রিকোণমিতিকে কোণের উৎপত্তির ব্যাখ্যা একটু ভিন্ন। একটি রশ্মি অপর একটি স্থির রশ্মির প্রেক্ষিতে ঘুরে নির্দিষ্ট অবস্থানে আসতে যে পরিমাণ আবর্তিত হয় তাহা ঐ রশ্মি দ্বারা সৃষ্ট কোণের পরিমাপ।

> একটি স্থির রশ্মি অপর একটি স্থির রশ্মির প্রেক্ষিতে ঘুরে নির্দিষ্ট অবস্থানে আসতে যে পরিমাণ আবর্তিত হয় তা ঐ রশ্মি দ্বারা সৃষ্ট ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাপ।

মনে করুন XOX' ও YOY' দুইটি স্থির রশ্মি লম্বভাবে অবস্থিত। এখন যদি একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান হতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে OA অবস্থানে এসে স্থির হয় তাহলে কোণের সংজ্ঞানুযায়ী ঘূর্ণায়মান রশ্মি দ্বারা সৃষ্ট কোণের পরিমাণ $\angle XOA$।



চিত্র ১৪.১

যদি এই ঘূর্ণায়মান রাশিটি একই দিকে ঘুরতে ঘুরতে আদি অবস্থান OX পার হয়ে OB অবস্থানে এসে স্থির হয় তাহলে সৃষ্ট কোণের পরিমাণ হবে $\angle XOB$ এবং তা দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। উপরোক্ত কোণ দুইটি ধনাত্মক। কিন্তু ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি যদি ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে আদি অবস্থান হতে সেদিকে ঘুরে OC অবস্থানে এসে স্থির হয় তাহলে কোণের পরিমাণ হবে $\angle XOC$ এবং তা হবে ঋণাত্মক। সুতরাং ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাণ 0° হতে শুরু করে যে কোন মানের হতে পারে এবং তা ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয়ই হতে পারে।

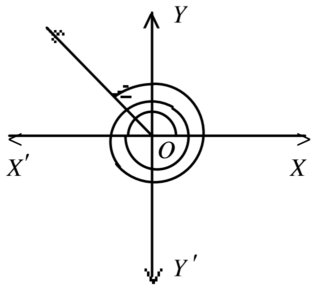
> ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাণ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয় মানের হতে পারে।

চৌকণ (Quadrant)

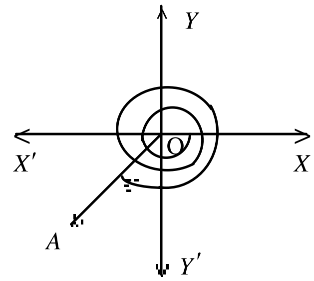
চিত্র ১৪.১ লক্ষ করলে দেখা যাবে যে, লম্বভাবে দণ্ডায়মান XOX' ও YOY' রশ্মি দুইটি সমতল ক্ষেত্রটিকে চারটি অংশে বিভক্ত করেছে। এই চারটি অংশের প্রত্যেকটি অংশকে চৌকোণ (Quadrant) বলে। চিত্রে XOY, YOX', $X'OY'$ ও $Y'OX$ অংশকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চৌকোণ বলা হয়। সুতরাং ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাণ যাই হোক না কেন সেটি যে কোন একটি চৌকোণের মধ্যে অবস্থান করবে।

মনে করুন একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি 840° কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে বুঝতে হবে ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে দুইবার ($360^\circ \infty 2=720^\circ$) সম্পূর্ণ অবর্তনের পর একই দিকে অবর্তন করে $(840^\circ-720^\circ)=120^\circ$ কোণ চিহ্নিত

করেছে। সুতরাং ঘূর্ণায়মান রশ্মিটির শেষ অবস্থান হবে দ্বিতীয় চৌকণ (চিত্র ১৪.২)। কিন্তু যদি কোণের পরিমাণ -840° হয় তাহলে বুঝতে হবে ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে সেদিকে দুইবার পূর্ণ অবর্তন করে পরে একই দিকে আরও 120° আবর্তন করে কোণ চিহ্নিত করেছে এবং ঘুর্ণায়মান রশ্মিটির শেষ অবস্থান হবে তৃতীয় চৌকণ (চিত্র ১৪.৩)



চিত্র ১৪.২



চিত্র ১৪.৩

নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণ চিহ্নিত করার পর ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি যে প্রান্ত অবস্থানে অবস্থান করে সেই অবস্থানকে প্রান্তিক রেখা বা ব্যাসার্ধ ভেক্টর (radius vector) বলা হয়।

ডিগ্রী ও রেডিয়ান পরিমাপ

সংজ্ঞানুসারে সমকোণের পরিমাণ হল স্থির বা ধ্রুব (constant)। সমকোণকে মূল একক ধরে কোণ পরিমাপের জন্য ত্রিকোণমিতিতে সাধারণত তিন প্রকার একক ব্যবহার করা হয়। এই পদ্ধতিগুলো হল-

i) ষাটমূলক পদ্ধতি (Sexagesmal System)
ii) শতমূলক পদ্ধতি (Centesimal System)
iii) বৃত্তীয় পদ্ধতি (Crcular System)

ত্রিকোণমিতিক কোণ পরিমাপের পদ্ধতিগুলো হল ষাটমূলক পদ্ধতি, শতমূলক পদ্ধতি ও বৃত্তীয় পদ্ধতি।

i) ষাটমূলক পদ্ধতি ঃ এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে সমান 90 ভাগে ভাগ করে এক এক ভাগকে ডিগ্রী বলা হয়। প্রতি ডিগ্রীকে 60 মিনিটে এবং প্রতি মিনিটকে 60 সেকেন্ডে ভাগ করা হয়।

1 সমকোণ $= 90^\circ$ (নব্বই ডিগ্রী)

1° $= 60'$ (ষাট মিনিট)

$1'$ $= 60''$ (ষাট সেকেন্ড)

ক্ষুদ্রতম ভাগগুলো 60 বলে এর নামকরণ ষাটমূলক হয়েছে। কোণ পরিমাপের এই একককে সাধারণ (common) বা বৃটিশ পদ্ধতিও (British System) বলা হয়।

ii) শতমূলক পদ্ধতিঃ এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে সমান 100 ভাগে ভাগ করে এক এক ভাগকে গ্রেড বলা হয়। প্রতি গ্রেডকে এক শতমূলক মিনিট এবং প্রতি এক শতমূলক মিনিটকে এক শতমূলক সেকেন্ডে ভাগ করা হয়।

1 সমকোণ $=100^g$ (একশ গ্রেড)

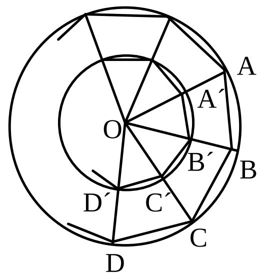
$1^g = 100`$ (একশ শতমূলক মিনিট)

$1` = 100``$ (একশ শতমূলক সেকেন্ড)

এই পদ্ধতিকে ফরাসী পদ্ধতিও বলা হয়।

iii) বৃত্তীয় পদ্ধতি ঃ এই পদ্ধতিতে মূল একক হল রেডিয়ান। একে 1^c চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যে কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান বৃত্তচাপ তার কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকেই বলা হয় এক রেডিয়ান। রেডিয়ান একটি ধ্রুব (constant) কোণ। এই ধ্রুবতা প্রমাণ করতে হলে নিম্নলিখিত উপপাদ্য সম্পর্কে স্বচ্ছ ধারণা থাকতে হবে।

উপপাদ্য (Theorem) ঃ যে কোন বৃত্তের পরিধি ও তার ব্যাসের অনুপাত একটি ধ্রুবক।



চিত্র ১৪.৪

প্রমাণ ঃ মনে করুন O দুইটি বৃত্তের সাধারণ কেন্দ্র। বড় বৃত্তটিতে n-সংখ্যক সমান বাহুবিশিষ্ট $ABCD$ ... ... বহুভুজ অঙ্কন করুন। $OA, OB, OC, OD,$ ... ... যোগ করুন। এই রেখাগুলি ছোট বৃত্তটিকে যথাক্রমে $A', B', C', D',$ ... ... বিন্দুতে ছেদ করে। এখন $A'B', B'C', C'D'$ ... ... যোগ করুন। তাহলে $A'B'C'D'$ ... ... ক্ষেত্রটি ছোট বৃত্তে অন্তর্লিখিত n-সংখ্যক সমান বাহুবিশিষ্ট বহুভুজ হবে।

এখন

$OA=OB$ (বড় বৃত্তের দুটি ব্যাসার্ধ)।

এবং $OA'=OB'$ (ছোট বৃত্তের দুটি ব্যাসার্ধ)

সুতরাং, $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$ এবং $\angle AOB$, ΔOAB এবং $\Delta OA'B'$-এর সাধারণ কোণ।

অতএব, ΔOAB এবং $\Delta OA'B'$ হবে সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'}$

বা, $\frac{n.AB}{n.A'B'} = \frac{OA}{OA'}$

বা, $\frac{n.AB}{OA} = \frac{n.A'B'}{OA'}$

অর্থাৎ, $\frac{\text{বড় বৃত্তে অন্তর্লিখিত বহুভুজের পরিসীমা}}{\text{বড় বৃত্তের ব্যাসার্ধ}} = \frac{\text{ছোট বৃত্তের অন্তর্লিখিত বহুভুজের পরিসীমা}}{\text{ছোট বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$ ... ... (i)

এখন, বহুভুজের বাহু সংখ্যা n যত বেশি হবে AB এবং অন্যান্য বাহুর দৈর্ঘ্য তত ছোট হবে। এভাবে যদি n–এর মানকে অসীম পর্যন্ত বাড়ানো যায়, তবে উভয় বহুভুজের বাহুগুলি বৃত্তের পরিধির সঙ্গে প্রায় মিশে যাবে।
অতএব, (i)নং নিম্নরূপ আকারে ধারণ করবে-

$$\frac{\text{বড় বৃত্তের পরিধি}}{\text{বড় বৃত্তের ব্যাসার্ধ}} = \frac{\text{ছোট বৃত্তের পরিধি}}{\text{ছোট বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$$

বা, $\frac{\text{বড় বৃত্তের পরিধি}}{\text{বড় বৃত্তের ব্যাস}} = \frac{\text{ছোট বৃত্তের পরিধি}}{\text{ছোট বৃত্তের ব্যাস}}$ ... ... (ii)

এভাবে যে কোন সংখ্যক বৃত্ত অংকন করে (ii)নং সমীকরণের সত্যতা প্রমাণ করা যায়।

সুতরাং, $\frac{\text{যে কোন বৃত্তের পরিধি}}{\text{সেই বৃত্তের ব্যাস}} =$ ধ্রুব সংখ্যা।

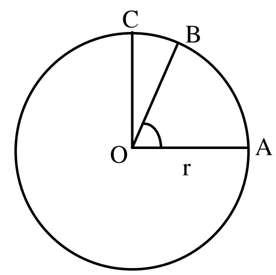
এই ধ্রুব সংখ্যাকে π দ্বারা নির্দেশ করা হয়। সাধারণত π–এর আসন্ন মানকে *(Approximate value)* ধরা হয় $\frac{22}{7}$ বা, 3.14159 (পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত)।

কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধকে r এবং ব্যাসকে d ধরা হলে (ii) নং সমীকরণ হবে, $\frac{\text{পরিধি}}{d} = \pi$,
বা, পরিধি $= \pi d = 2\pi r$.

বৃত্তের পরিধি $= \pi d = 2\pi r$ যেখানে d = বৃত্তের ব্যাস এবং r = ব্যাসার্ধ

প্রমাণ করুন যে, রেডিয়ান একটি ধ্রুব কোণ।

মনে করুন, O একটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং $OA = r$ ব্যাসার্ধ। ধরুন AB বৃত্তচাপটি ব্যাসার্ধের সমান। তাহলে, সংজ্ঞানুযায়ী, $\angle AOB = 1^c$.
এখন, OA সরলরেখার উপর OC লম্ব আঁকুন। তাহলে, $\angle AOC$ = এক সমকোণ এবং বৃত্তচাপ AC= বৃত্তের পরিধির এক চতুর্থাংশ $= \frac{1}{4} . 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$



চিত্র ১৪.৫

আমরা জানি, একটি বৃত্তচাপ দ্বারা সৃষ্ট কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তচাপটির সমানুপাতিক।

সুতরাং $\frac{\angle AOB}{\text{বৃত্তচাপ } AB} = \frac{\angle AOC}{\text{বৃত্তচাপ } AC}$

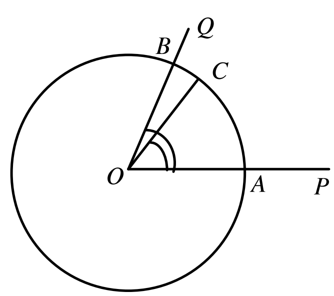
বা, $\frac{\angle AOB}{\angle AOC} = \frac{\text{বৃত্তচাপ } AB}{\text{বৃত্তচাপ } AC} = \frac{r}{\pi r/2}$

অর্থাৎ, $\frac{\text{এক রেডিয়ান}}{\text{এক সমকোণ}} = \frac{2}{\pi}$

বা, এক রেডিয়ান $= \frac{2}{\pi} \infty$ এক সমকোণ।

যেহেতু π এবং সমকোণ উভয়ই ধ্রুবক, সুতরাং রেডিয়ান একটি ধ্রুব কোণ।

উপপাদ্য (Theorem) ঃ বৃত্তের যে কোন চাপ ও তার ব্যাসার্ধের অনুপাত ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে সেই চাপ দ্বারা উৎপন্ন কোণের সমান।



চিত্র ১৬.৬

মনে করুন, POQ একটি নির্দিষ্ট কোণ। O কে কেন্দ্র করে r এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করুন। মনে করুন বৃত্তটি OP এবং OQ কে যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। এখন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান একটি বৃত্তচাপ AC নিন।

তাহলে, চাপ AC = ব্যাসার্ধ $OA = r$ এবং $\angle AOC = 1$ রেডিয়ান।

আমরা জানি, একটি বৃত্তচাপ দ্বারা সৃষ্ট কেন্দ্রস্থ কোণ সেই বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।

সুতরাং, $\dfrac{\angle AOB}{\text{চাপ } AB} = \dfrac{\angle AOC}{\text{চাপ } AC}$,

বা, $\dfrac{\angle AOB}{\angle AOC} = \dfrac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } AC}$

বা, $\dfrac{\angle AOB}{1 \text{ রেডিয়ান}} = \dfrac{\text{চাপ } AB}{r}$

বা, $\angle AOB = \dfrac{\text{চাপ } AB}{r} \times 1$ রেডিয়ান।

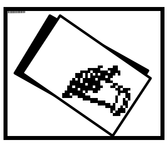
বা, $\angle AOB = \dfrac{s}{r}$ রেডিয়ান, যেখান চাপ $AB = s$

$\angle AOB$ এর বৃত্তীয় পরিমাপ θ রেডিয়ান হলে তাকে $\angle AOB = \theta$ রেডিয়ান

বা, $\angle AOB = \theta^c$ আকারে লিখা যায়।

তাহলে নির্দিষ্ট কোণ, $AOB = \dfrac{s}{r}$ রেডিয়ান

অর্থাৎ, $\theta = \dfrac{s}{r}$



অনুশীলনী-১৪.১

1. ত্রিকোণমিতিক কোণের ধারণা ব্যাখ্যা করুন।
2. কোণ পরিমাপের বিভিন্ন পদ্ধতিগুলো কি? তা বর্ণনা করুন।
3. প্রমাণ করুন, রেডিয়ান একটি ধ্রুব কোণ।
4. প্রমাণ করুন, যে কোন বৃত্তের পরিধি তা ব্যাসের সমানুপাতিক।

kJb 2 কোণ পরিমাপের বিভিন্ন এককের মধ্যে সম্পর্ক

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- কোণ পরিমাপের বিভিন্ন এককের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন,
- সম্পর্কগুলোর সাহায্য সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

কোণ পরিমাপের বিভিন্ন এককের মধ্যে সম্পর্ক

ক) ষাটমূলক ও শতমূলক এককের মধ্যে সম্পর্ক

ষাটমূলক পদ্ধতিতে 1 সমকোণ $= 90°$

এবং শতমূলক পদ্ধতিতে 1 সমকোণ $= 100^g$

$\therefore \quad 90° = 100^g$

বা, $9° = 10^g$

$\therefore \quad 1° = \left(\frac{10}{9}\right)^g = 1.11^g$ (প্রায়)

আবার $10^g = 9°$

$\therefore \quad 1^g = \left(\frac{9}{10}\right)^° = 0.9^o$

খ) ষাটমূলক, শতমূলক ও বৃত্তীয় এককের মধ্যে সম্পর্ক

বৃত্তীয় পদ্ধতিতে আমরা পাই

1 রেডিয়ান $= \frac{2}{\pi}$ সমকোণ

বা, π রেডিয়ান $= 2$ সমকোণ

$\therefore \quad$ 1 রেডিয়ান $= \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3.14159} = 57°17'44.8''$

আবার $1° = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \frac{3.14159}{180} = 0.0174533$ রেডিয়ান

কিন্তু অপর দুইটি পদ্ধতি অনুসারে,

2 সমকোণ $= 180° = 200^g$

$\therefore \quad$ 2 সমকোণ $= 180° = 200^g = \pi^c$

বা, 1 সমকোণ $= 90° = 100^g = \frac{\pi^c}{2}$

মনে করুন, একটি নির্দিষ্ট কোণের পরিমাণকে ষাটমূলক, শতমূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতিতে যথাক্রমে D ডিগ্রী, G গ্রেড ও θ রেডিয়ানে নির্দেশ করা হল। তাহলে,

যেহেতু $180° = \pi^c$

$\therefore \quad D° = \frac{\pi}{180} \infty D$ রেডিয়ান

আবার যেহেতু $200^g = \pi^c$

$\therefore \quad G^g = \frac{\pi}{200} \infty G$ রেডিয়ান

সুতরাং $\frac{\pi D}{180} = \frac{\pi G}{200} = \theta$

বা, $\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{\theta}{\pi}$

উদাহরণ 1 : $15^g\ 25`13``$ কে ষাটমূলক পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।

সমাধান ঃ $15^g\ 25`13``$

$= 15^{g} + 0.25^{g} + 0.0013^{g}$

$= 15.2513^{g}$

$= 0.152513$ সমকোণ

$= 90 \infty 0.152513°$

$= 13.726170°$

$= 13°(60 \infty 0.72617)'$

$= 13° \, 43.5702'$

$= 13°43' \, (60 \infty 0.5702)''$

$= 13°43'34.2''$

উদাহরণ 2: $50°37'30''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ করুন।

সমাধান ঃ $30'' = \frac{30'}{60} = \frac{1'}{2}$

$\therefore \quad 37'30'' = 37\frac{1'}{2} = \frac{75'}{2} = \frac{75°}{2 \infty 60} = \frac{5°}{8}$

অতএব, $50°37'30'' = 50\frac{5°}{8} = \frac{405°}{8} = \frac{405}{8 \infty 90}$ সমকোণ

$= \frac{9}{16}$ সমকোণ

$= \frac{\pi}{2} \infty \frac{9}{16}$ রেডিয়ান $= \frac{9\pi}{32}$ রেডিয়ান

উদাহরণ 3 : যদি একটি বৃত্তচাপ 35 ফুট দীর্ঘ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্রে 50^{g} কোণ উৎপন্ন করে, তাহলে বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য $= l$

এখন $l = r\theta$

যেখানে $r =$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং $\theta =$ রেডিয়ান কোণ

এখন $50^{g} = \frac{50 \infty \pi^{c}}{200} = \frac{\pi^{c}}{4}$

$\therefore$ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= 35 \infty \frac{\pi^{c}}{4}$ ফুট

$= \frac{35 \infty 3.14159}{4}$ ফুট

$= 27.49$ ফুট (প্রায়)

উদাহরণ 4 : চাঁদের ব্যাস দর্শকের চোখের সাথে $30'$ কোণ তৈরি করে এবং সূর্যের $32'$। যদি সূর্য চাদের থেকে 675 গুণ দূরে অবস্থিত হয়, তাহলে তাদের ব্যাসের অনুপাত নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন চাঁদের ক্ষেত্রে, ব্যাস $= d_1$ ও দূরত্ব $= l_1$

এবং সূর্যের ক্ষেত্রে ব্যাস $= d_2$ ও দূরত্ব $= l_2$

এখন $30' = \frac{30}{60} \infty \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \frac{\pi}{360}$

এবং $32' = \frac{32}{60} \infty \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \frac{2\pi}{675}$

সুতরাং আমরা পাই, $\frac{\pi}{360} = \frac{d_1}{l_1}$

এবং $\frac{2\pi}{675} = \frac{d_2}{l_2}$

কিন্তু দেওয়া আছে $l_2 = 675 \, l_1$

এখন $\dfrac{\dfrac{\pi}{360}}{\dfrac{2\pi}{675}} = \dfrac{\dfrac{d_1}{l_1}}{\dfrac{d_2}{l_2}}$

বা, $\dfrac{\pi}{360} \infty \dfrac{675}{2\pi} = \dfrac{d_1}{l_1} \infty \dfrac{l_2}{d_2}$

বা, $\dfrac{675}{720} = \dfrac{d_1}{l_1} \infty \dfrac{675 l_1}{d_2}$

বা, $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{675 \infty l_1}{675 \infty 720 \infty l_1}$

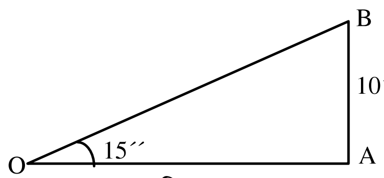
বা, $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{1}{720}$

সুতরাং চাঁদ ও সূর্যের ব্যাসের অনুপাত হল 1 ঃ 720

উদাহরণ 5 : 10 ফুট উচু একটি খুঁটি কতদূরে 15′′ কোণ উৎপন্ন করে?

সমাধান ঃ

মনে করুন *AB* খুঁটিটি ভূমির উপর *O* বিন্দুতে 15′′ কোণ উৎপন্ন করে। ধরুন *OA*= *r*। যেহেতু □*AOB* খুব ক্ষুদ্র সুতরাং *AB* এর দৈর্ঘ্য *OA* এর দৈর্ঘ্যের তুলনায় খুব ক্ষুদ্র হবে। সুতরাং *AB* কে একটি বৃত্তের চাপ ধরা যেতে পারে যার কেন্দ্র *O* এবং ব্যাসার্ধ = *r*.



চিত্র ১৪.৭

এখন $15'' = \dfrac{15'}{60} = \dfrac{15^\circ}{60 \infty 60} = \dfrac{15}{60 \infty 60} \infty \dfrac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

এখন $s = r\theta$ হতে পাই

$10 = r.\dfrac{15□}{60 \infty 60 \infty 180}$

বা, $r = \dfrac{60 \infty 60 \infty 180 \infty 10}{15□}$ ফুট

$= \dfrac{60 \infty 60 \infty 180 \infty 10}{15 \infty 3.14159 \infty 3 \infty 1760}$ মাইল

$= 26.04$ মাইল (প্রায়)

অনুশীলনী-১৪.২

1. $\dfrac{□}{18}$ কে ডিগ্রীতে প্রকাশ করুন।
2. রেডিয়ানে প্রকাশ করুন।

   (i) 115°33′45′′ (ii) 20°15′30′′
3. একটি গাড়ীর চাকা 200 বার আবর্তন করে 800 গজ অতিক্রম করে। গাড়ীর চাকার ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।
4. একটি স্তম্ভের উচ্চতা 100 ফুট এবং তা একজন পর্যবেক্ষকের চোখের অবস্থানে 9′ কোণ উৎপন্ন করে। স্তম্ভের গোড়া হতে পর্যবেক্ষকের দূরত্ব নির্ণয় করুন।
5. একটি কোণের পরিমাপ ষাটমূলক ও বৃত্তীয় এককে যথাক্রমে D° ও R^c হলে দেখান যে, $\dfrac{D}{180} = \dfrac{R}{□}$.

kJb 3 ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞা ও চিহ্ন

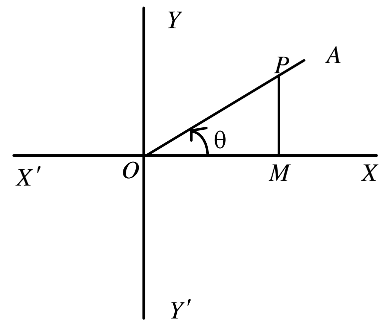
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সুক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- যে কোন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন।

সুক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করুন, একটি ঘূর্ণায়মান রেখা OX অবস্থান হতে শুরু করে OA অবস্থানে আসতে যে কোণ উৎপন্ন করে তা θ দ্বারা নির্দেশ করা হল। এখন OA এর উপরে যে কোন বিন্দু P হতে OX এর উপর PM লম্ব অঙ্কন করুন। তাহলে ΔPOM সমকোণী ত্রিভুজ। এই ত্রিভুজের অতিভুজ হচ্ছে OP বাহু, লম্ব হচ্ছে PM বাহু এবং ভূমি হচ্ছে OM বাহু।



চিত্র ১৪.৮

এখন POM ত্রিভুজের বাহুগুলি দ্বারা গঠিত অনুপাতসমূহ হল ঃ $\frac{PM}{OP}$, $\frac{OM}{OP}$, $\frac{PM}{OM}$, $\frac{OP}{PM}$, $\frac{OP}{OM}$ এবং $\frac{OM}{PM}$

এখন, θ কোণের জন্য ত্রিকোণমিতি অনুপাতসমূহকে নিম্নলিখিত ভাবে সজ্ঞায়িত করা হয়।

θ কোণের সাইন (sine) অনুপাত বা sine$\theta = \frac{PM}{OP}$ = **Error!**, (সংক্ষেপে sinθ = **Error!**)

θ কোণের কোসাইন (cosine) অনুপাত বা cosine$\theta = \frac{OM}{OP}$ = **Error!**, (সংক্ষেপে cosθ = **Error!**)

θ কোণের টেনজেন্ট (tangent) অনুপাত বা tangent$\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{\text{u'}}{\text{nëKo}}$, (সংক্ষেপে $\tan\theta = \frac{PM}{OM}$)

θ কোণের কোসেকেন্ট (cosecant) অনুপাত বা cosecantθ=$\frac{OP}{PM}$ = **Error!**, (সংক্ষেপে cosecθ=**Error!**)

θ কোণের সেকেন্ট (secant) অনুপাত বা secant$\theta = \frac{OP}{OM}$ = **Error!**, (সংক্ষেপে secθ = **Error!**)

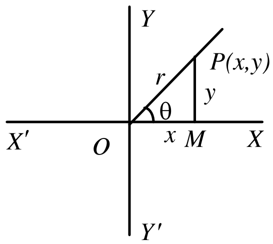
θ কোণের কোটেনজেন্ট (cotangent) অনুপাত বা cotangent$\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{\text{nëKo}}{\text{u'}}$,(সংক্ষেপে $\cot\theta=\frac{OM}{PM}$)

উপরোক্ত ছয়টি অনুপাত ছাড়া আরও দুটি অনুপাতের ব্যবহার ত্রিকোণমিতিতে কখনও কখনও দেখা যায়। এ দুটি অনুপাত হল ঃ

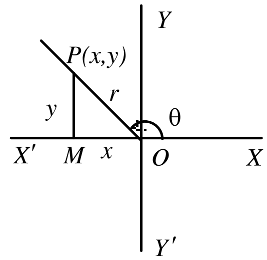
θ কোণের versed sine, সংক্ষেপে vers $\theta = 1-\cos\theta$;

θ কোণের coversed sine, সংক্ষেপে covers$\theta = 1-\sin\theta$.

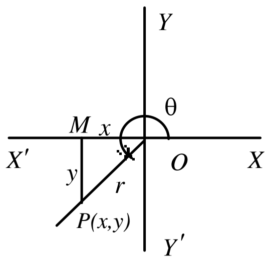
যে কোন সাধারণ কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাত।



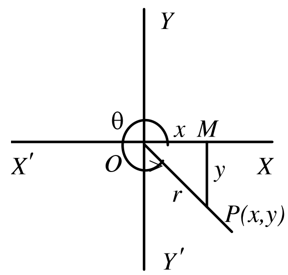
1o KY©



2~ KY©



৩য় চিত্র



৪র্থ চিত্র

চিত্র- ১৪.৯

মনে করুন, XOX' এবং YOY' দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে। O কে মূলবিন্দু ধরলে রেখা দুইটি যথাক্রমে x- অক্ষ ও y- অক্ষ হবে। এখন ধরুন একটি ঘূর্ণায়মান রেখা আদি অবস্থান OX হতে ঘূর্ণন শুরু করে OP অবস্থানে এসে শেষ হয় এবং □$XOP = \theta$ কোণটি উৎপন্ন করে। সুতরাং P বিন্দর অবস্থান XOY, YOX', $X'OY'$ অথবা $Y'OX$ এই চারটি চৌকণের যে কোন একটিতে হতে পারে। এখন P বিন্দু হতে XOX' সরলরেখার উপর PM লম্ব আঁকুন। মূলবিন্দু O হতে P বিন্দুর দূরত্ব OP কে P বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলা হয়। P বিন্দুর স্থানাংক (x,y) এবং ব্যাসার্ধ ভেক্টর $OP = r$ হলে θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নিম্নলিখিত ভাবে সংজ্ঞায়িত হয় ”

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{P \text{ বিন্দুর } y\text{-স্থানাংক}}{P \text{ বিন্দুর ব্যাসার্ধ ßnÖr}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{P \text{ বিন্দুর } x\text{-স্থানাংক}}{P \text{ বিন্দুর ব্যাসার্ধ ßnÖr}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{P \text{ বিন্দুর } y\text{-স্থানাংক}}{P \text{ বিন্দুর } x\text{-˙JjJÄT}} = \frac{y}{x}$$

$$\text{cosec}\theta = \frac{OP}{PM} = = \frac{r}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{P \text{ বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর}}{P \text{ বিন্দুর } x\text{-˙JjJÄT}} = \frac{r}{x}$$

$$\cot\theta = \frac{OM}{PM} = = \frac{x}{y}$$

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান নির্ণয়ের সময় P বিন্দুর বিভিন্ন চৌকণে অবস্থানের জন্য x ও y এর যথাযথ চিহ্ন অবশ্যই বিবেচনা করতে হবে।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন

যেহেতু ব্যাসার্ধ ভেক্টর $OP(=r)$ সর্বদা ধনাত্মক, সুতরাং θ কোণের বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর চিহ্ন x ও y- এর চিহ্ন অর্থাৎ OM ও PM বাহুর পরিমাপের উপর নির্ভর করবে (চিত্র ১৪.৯)।

এখন একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা আদি অবস্থান OX হতে শুরু করে যে কোন পরিমাপের কোণ উৎপন্ন করার পর তা চারটি কোয়াড্রেন্টের যে কোন একটিতে অবস্থান করবে। যদি ঘূর্ণায়মান সরলরেখার শেষ অবস্থান, অর্থাৎ ব্যাসার্ধ ভেক্টর প্রথম কোয়াড্রেন্টে থাকে (চিত্র ১৪.৯, ১ম চিত্র) তাহলে POM ত্রিভুজের PM, OM এবং OP বাহুর প্রত্যেকটির পরিমাণ ধনাত্মক হবে। সুতরাং প্রথম কোয়াড্রেন্টে সমস্ত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান ধনাত্মক হবে।

যদি OP রেখা দ্বিতীয় কোয়াড্রেন্টে অবস্থান করে (চিত্র ১৪.৯, ২য় চিত্র), তবে OP ও PM বাহুদ্বয়ের মান ধনাত্মক (+) এবং OM বাহুর মান ঋণাত্মক (—) হবে। সুতরাং, ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞানুসারে তাদের চিহ্ন হবে নিম্নরূপঃ

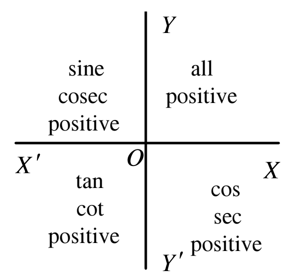
$\sin\theta = \dfrac{PM}{OP}$ অর্থাৎ, $\dfrac{+}{+}$, বা, ধনাত্মক;

$\cos\theta = \dfrac{OM}{OP}$ অর্থাৎ, $\dfrac{-}{+}$ বা, ঋণাত্মক;

$\tan\theta = \dfrac{PM}{OM}$ অর্থাৎ, $\dfrac{+}{-}$ বা, ঋণাত্মক।

অনুরূপভাবে $\text{cosec}\,\theta =$ ধনাত্মক, $\sec\theta =$ ঋণাত্মক এবং $\cot\theta =$ ঋণাত্মক।
সুতরাং, দ্বিতীয় কোয়াড্রেন্টে সাইন এবং কোসেকেন্ট অনুপাতদ্বয় ধনাত্মক এবং অন্যান্য অনুপাত ঋণাত্মক হবে।

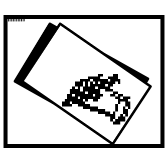
অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, তৃতীয় কোয়াড্রেন্টে টেনজেন্ট এবং কোটেনজেনট অনুপাতদ্বয় ধনাত্মক এবং অপরগুলি ঋণাত্মক এবং চতুর্থ কোয়াড্রেন্টে কোসাইন ও সেকেন্ট অনুপাতদ্বয় ধনাত্মক এবং অপরগুলি ঋণাত্মক। নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান সরলরেখা শেষ পর্যায়ে কোন্ কোয়াড্রেন্টে অবস্থা করবে তা জানতে পারলে আপনারা পার্শ্বস্থ চিত্রের সাহায্যে অতি সহজেই ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন নির্ণয় করতে পারবেন।



চিত্র ১৪.১০

> প্রথম চৌকণে সবগুলো ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন ধনাত্মক, দ্বিতীয় চৌকণে sin ও cosec-এর চিহ্ন ধনাত্মক এবং অন্যগুলো ঋণাত্মক, তৃতীয় চৌকণে tan ও cot-এর চিহ্ন ধনাত্মক এবং অন্যগুলো ঋণাত্মক, চতুর্থ চৌকণে cos ও sec এর চিহ্ন ধনাত্মক এবং অন্যগুলো ঋণাত্মক।

লক্ষণীয়, যখন সাইন, কোসাইন এবং টেনজেন্টের চিহ্ন ধনাত্মক, তখন এদের বিপরীত অনুপাতসমূহ, অর্থাৎ যথাক্রমে কোসেকেন্ট, সেকেন্ট এবং কোটেনজেন্টের চিহ্ন ধনাত্মক। ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের ঋণাত্মক চিহ্নের ক্ষেত্রেও এই নিয়ম প্রযোজ্য।



অনুশীলনী-১৪.৩

1. সুক্ষ্মকোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় করুন।
2. যে কোন সাধারণ কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নির্ণয় করুন।
3. ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন কিরূপে নির্ণয় করা হয় তা বর্ণনা করুন।

kJb 4 ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মধ্যে মৌলিক সম্পর্ক

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন,
- সম্পর্কগুলোর সাহায্যে বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর পারস্পারিক সম্পর্ক

পাঠ ৩ এর চিত্র ১৪.৮ থেকে নিচের সম্পর্কগুলো প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

(i) $\because\ \sin\theta = \dfrac{PM}{OP}$ এবং $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{OP}{PM}$,

$\therefore\ \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PM}} = \dfrac{1}{\frac{PM}{OP}} = \dfrac{1}{\sin\theta}$;

অনুরূপভাবে, $\sin\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$

(ii) $\because\ \cos\theta = \dfrac{OM}{OP}$ এবং $\sec\theta = \dfrac{OP}{OM}$,

$\therefore\ \sec\theta = \dfrac{OP}{OM} = \dfrac{1}{\frac{OM}{OP}} = \dfrac{1}{\cos\theta}$;

অনুরূপভাবে, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$.

(iii) $\because\ \tan\theta = \dfrac{PM}{OM}$ এবং $\cot\theta = \dfrac{OM}{PM}$,

$\therefore\ \cot\theta = \dfrac{OM}{PM} = \dfrac{1}{\frac{PM}{OM}} = \dfrac{1}{\tan\theta}$;

অনুরূপভাবে $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$.

(iv) $\because\ \sin\theta = \dfrac{PM}{OP}$, $\cos\theta = \dfrac{OM}{OP}$, $\tan\theta = \dfrac{PM}{OM}$ এবং $\cot\theta = \dfrac{OM}{PM}$,

$\therefore\ \tan\theta = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{PM/OP}{OM/OP} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

এবং $\cot\theta = \dfrac{OM}{PM} = \dfrac{OM/OP}{PM/OP} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মধ্যে মৌলিক সম্পর্কগুলি হল ঃ

$\sin\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ ...... (1), $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ .... (2)

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ ..... (3), $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ .... (4);

$\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ .... (5), $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ ......(6) ;

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ....(7), $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ .... (8).

অনুসিদ্ধান্ত ঃ 1 নং ও 2 হতে, $\sin\theta \operatorname{cosec}\theta=1$,

3 নং ও 4 নং হতে $\cos\theta \sec\theta =1$,

5 নং ও 6 নং হতে, $\tan\theta \cot\theta=1$.

(v) ΔOPM একটি সমকোণী ত্রিভুজ বলে,

$$PM^2+OM^2=OP^2 \text{ - - - - - - (i)}$$

বা, $\dfrac{PM^2}{OP^2}+\dfrac{OM^2}{OP^2}=1$ [উভয় পক্ষকে OP^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\left(\dfrac{PM}{OP}\right)^2+\left(\dfrac{OM}{OP}\right)^2=1$

অর্থাৎ, $(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$

$\therefore\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ....(9)

এখন (i) এর উভয় পক্ষকে OM^2 দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই,

$$\left(\frac{PM}{OM}\right)^2+1=\left(\frac{OP}{OM}\right)^2$$

অর্থাৎ $(\tan\theta)^2+1=(\sec\theta)^2$

$\therefore\ \sec^2\theta=1+\tan^2\theta$ ... ... (10)

আবার (i) এর উভয় পক্ষকে PM^2 দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই,

$$1+\left(\frac{OM}{PM}\right)^2=\left(\frac{OP}{PM}\right)^2$$

বা, $1+(\cot\theta)^2=(\mathrm{cosec}\,\theta)^2$

$\therefore\ \mathrm{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta$ . ... (11)

(9), (10) এবং (11)নং সূত্রগুলোকে নিম্নলিখিতভাবেও লিখা যায়ঃ

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$, $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$, $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$; $\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$, $\mathrm{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1$, $\mathrm{cosec}^2\theta-1=\cot^2\theta$; ইত্যাদি।

ত্রিকোণমিতিতে অতি প্রয়োজনীয় কতগুলি সূত্র ঃ
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$, $\mathrm{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1$

উদাহরণ 1 : **$\sec\theta$ অনুপাতকে $\mathrm{cosec}\,\theta$ অনুপাতে প্রকাশ করুন।**

সমাধান ঃ $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$.

$$\begin{aligned}\sec\theta &= \pm\sqrt{1+\tan^2\theta}\\ &= \pm\sqrt{1+\frac{1}{\cot^2\theta}}\\ &= \pm\sqrt{\frac{\cot^2\theta+1}{\cot^2\theta}}\\ &= \pm\sqrt{\frac{\mathrm{cosec}^2\theta}{\mathrm{cosec}^2\theta-1}}\end{aligned}$$

উদাহরণ 2 : **যদি** $\sin A=\dfrac{12}{13}$ হয় তবে $\cot A$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ আমরা জানি, $\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}$

$$=\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2A}}{\sin A}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}}{\frac{12}{13}}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{1-\frac{144}{169}}}{\frac{12}{13}}$$

$$= \frac{\pm\sqrt{\frac{169-144}{169}}}{\frac{12}{13}}$$

$$= \frac{\pm\sqrt{\frac{25}{169}}}{\frac{12}{13}}$$

$$= \pm \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}}$$

$$= \pm \frac{5}{12}$$

উদাহরণ 3 : **যদি $\sin\theta = \frac{21}{29}$ হয় তবে প্রমাণ করুন $\sec\theta+\tan\theta= 2\frac{1}{2}$, যখন θ প্রথম চৌকণে অবস্থিত।**

সমাধান ঃ $\sin\theta = \frac{21}{29}$

আবার $\cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$

$\therefore \cos^2\theta = 1- \sin^2\theta= 1-\left(\frac{21}{29}\right)^2$

$= 1 - \frac{441}{841} = \frac{400}{841}$

$\therefore \cos\theta = \frac{20}{29}$

যেহেতু θ প্রথম চৌকণে অবস্থিত সুতরাং শুধুমাত্র ধনাত্মক চিহ্ন বিবেচনা করা হয়েছে।

এখন $\sec\theta+\tan\theta = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{1}{\frac{20}{29}} + \frac{\frac{21}{29}}{\frac{20}{29}}$$

$$= \frac{29}{20} + \left(\frac{21}{29} \infty \frac{29}{20}\right)$$

$$= \frac{29}{20} + \frac{21}{20}$$

$$= \frac{50}{20} = 2\frac{1}{2}$$

উদাহরণ 4 : **প্রমাণ করুন $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \text{cosec}\theta + \cot\theta.$**

সমাধান ঃ $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}$ $[\because \sin\theta+\cos^2\theta = 1]$

$= \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

উদাহরণ 5 : **প্রমাণ করুন** $\dfrac{\cos\theta+\cos\phi}{\sin\theta-\sin\phi} = \dfrac{\sin\theta+\sin\phi}{\cos\phi-\cos\theta}$

সমাধান ঃ **বামপক্ষ** $= \dfrac{\cos\theta+\cos\phi}{\sin\theta-\sin\phi}$

$= \dfrac{(\cos\theta+\cos\phi)(\sin\theta+\sin\phi)}{(\sin\theta-\sin\phi)(\sin\theta+\sin\phi)}$

$= \dfrac{(\cos\theta+\cos\phi)(\sin\theta+\sin\phi)}{\sin^2\theta-\sin^2\phi}$

$= \dfrac{(\cos\theta+\cos\phi)(\sin\theta+\sin\phi)}{1-\cos^2\theta-1+\cos^2\phi}$

$= \dfrac{(\cos\theta+\cos\phi)(\sin\theta+\sin\phi)}{\cos^2\phi-\cos^2\theta}$

$= \dfrac{(\cos\theta+\cos\phi)(\sin\theta+\sin\phi)}{(\cos\phi+\cos\theta)(\cos\phi-\cos\theta)}$

$= \dfrac{\sin\theta+\sin\phi}{\cos\phi-\cos\theta}$

উদাহরণ 6 : **প্রমাণ করুন** $\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B} + \dfrac{\cos A-\cos B}{\sin A+\sin B} = 0$

সমাধান ঃ $\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B} + \dfrac{\cos A-\cos B}{\sin A+\sin B}$

$= \dfrac{(\sin^2 A-\sin^2 B) + (\cos^2 A-\cos^2 B)}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}$

$= \dfrac{(\sin^2 A+\cos^2 A) - (\sin^2 B+\cos^2 B)}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}$

$= \dfrac{1-1}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)} = 0$

উদাহরণ 7: **প্রমাণ করুন** $\sin^4\theta-\cos^4\theta = \sin^2\theta-\cos^2\theta$

সমাধান ঃ $\sin^4\theta-\cos^4\theta$

$= (\sin^2\theta)^2-(\cos^2\theta)^2$

$= (\sin^2\theta+\cos^2\theta)\ (\sin^2\theta-\cos^2\theta)$
$= 1\ (\sin^2\theta-\cos^2\theta)$
$= \sin^2\theta-\cos^2\theta$

উদাহরণ 8 : **প্রমাণ করুন $(\sec\theta-\cos\theta)(\mathrm{cosec}\theta-\sin\theta) = \dfrac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$**

সমাধান ঃ $(\sec\theta-\cos\theta)\ (\mathrm{cosec}\theta-\sin\theta)$

$= \left(\dfrac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)\left(\dfrac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)$

$= \left(\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)\cdot\left(\dfrac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)$

$= \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$

$= \sin\theta\cos\theta$

$= \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$

$= \dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$ [$\cos^2\theta$ দ্বারা লব ও হরকে ভাগ করে]

$= \dfrac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

উদাহরণ 9 : **যদি $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\ \sin\theta$ হয় তবে দেখান যে, $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\ \cos\theta$.**

সমাধান ঃ $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\ \sin\theta$

বা, $\cos\theta=\sqrt{2}\ \sin\theta+\sin\theta$

বা, $\cos\theta=\sin\theta\ (\sqrt{2}+1)$

বা, $\sin\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}+1}$

বা, $\sin\theta=\dfrac{(\cos\theta)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

বা, $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}\cos\theta-\cos\theta}{2-1}$

বা, $\sin\theta=\sqrt{2}\ \cos\theta-\cos\theta$

বা, $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\ \cos\theta$

উদাহরণ 10 : **যদি $a^2\sec^2\theta-b^2\tan^2\theta=c^2$ হয় তবে দেখান যে, $\mathrm{cosec}\theta=\pm\sqrt{\dfrac{c^2-b^2}{c^2-a^2}}$**

সমাধান ঃ $a^2\sec^2\theta-b^2\tan^2\theta=c^2$

বা, $a^2\sec^2\theta-b^2(\sec^2\theta-1)=c^2$

বা, $a^2\sec^2\theta-b^2\sec^2\theta+b^2=c^2$

বা, $\sec^2\theta(a^2-b^2)=c^2-b^2$

বা, $\sec^2\theta=\dfrac{c^2-b^2}{a^2-b^2}$

$\therefore \quad \cos^2\theta = \frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}$

বা, $\quad 1-\sin^2\theta = \frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}$

বা, $\quad \sin^2\theta = 1-\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}$

বা, $\quad \sin^2\theta = \frac{c^2-b^2-a^2+b^2}{c^2-b^2}$

বা, $\quad \sin^2\theta = \frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}$

বা, $\quad \operatorname{cosec}^2\theta = \frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}$

$\therefore \quad \operatorname{cosec}\theta = \pm\sqrt{\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}}$

অনুশীলনী-১৪.৪

1. $\sin\theta$ অনুপাতকে $\cot\theta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

অভেদগুলো প্রমাণ করুন (2–9)

2. $\frac{1}{\cot A+\tan A} = \sin A\cos A$

3. $\frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{1+\cos A}{\sin A} = 2\operatorname{cosec}A.$

4. $\operatorname{cosec}^6\theta-\cot^6\theta = 1+3\operatorname{cosec}^2\theta\cot^2\theta.$

5. $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

6. $(\tan\theta+\sec\theta)^2 = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

7. $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} - \sec\theta = \sec\theta - \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

8. $\frac{\sin A-\cos A+1}{\sin A+\cos A-1} = \frac{1+\sin A}{\cos A}$

9. $\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta} - \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$

10. যদি $a\cos^2\theta+b\sin^2\theta = c$ হয়, তবে দেখান যে $\tan\theta = \pm\sqrt{\frac{c-a}{b-c}}$

11. θ এবং ϕ সুক্ষ্মকোণ এবং $\sin\theta = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\phi = \frac{12}{13}$ হলে $\frac{\tan\theta-\tan\phi}{1+\tan\theta\tan\phi}$ এর মান নির্ণয় করুন।

12. যদি $\tan\theta = \frac{a}{b}$ হয় তবে $\frac{a\sin\theta-b\cos\theta}{a\sin\theta+b\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় করুন।

13. যদি $\cos A = \frac{9}{41}$ হয়, তবে $\tan A$ এবং $\operatorname{cosec}A$ অনুপাতের মান নির্ণয় করুন।

14. যদি $k\tan\theta = \tan k\theta$ হয় তবে প্রমান করুন যে, $\frac{\sin^2 k\theta}{\sin^2\theta} = \frac{k^2}{1+(k^2-1)\sin^2\theta}$

kJb 5 ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধ্রুবতা ও সীমাবদ্ধতা

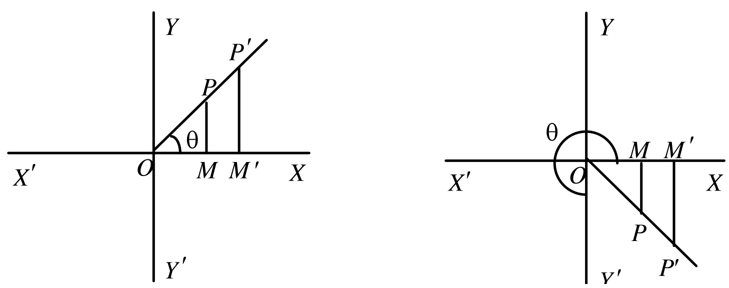
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধ্রুবতা ও সীমাবদ্ধতা সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধ্রুবতা

একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণের জন্য যে কোন নির্দিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান সব সময়ই ধ্রুব হবে।



১ম চিত্র ২য় চিত্র

চিত্র ১৪.১১

মনে করুন $\angle XOP = \theta$। যে কোন দুটি বিন্দু P ও P' হতে XOX' এর উপর যথাক্রমে PM এবং $P'M'$ লম্বদ্বয় অংকন করুন।

প্রথম চিত্রে ΔOPM -এ, $\sin\theta = \dfrac{PM}{OP}$ এবং $\Delta OP'M'$ -এ, $\sin\theta = \dfrac{P'M'}{OP'}$ ।

এখন ΔOPM এবং $\Delta OP'M'$ সদৃশকোণী বলে, $\dfrac{PM}{OP} = \dfrac{P'M'}{OP'}$.

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{P'M'}{OP'}$$

সুতরাং, $\sin\theta$ এর মান উভয় ত্রিভুজ হতে একই পাওয়া যায়। অতএব নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণের জন্য $\sin\theta$ এর মান ধ্রুব। অন্যান্য অনুপাতের ক্ষেত্রেও ইহা প্রযোজ্য।

আবার ঘূর্ণায়মান সরলরেখার শেষ অবস্থান অন্য যে কোন কোয়াড্রেন্টে (২য় চিত্র) অবস্থান করলে ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী হওয়া ছাড়াও অনুরূপ বাহুর চিত্র একই প্রকৃতির হয়। সুতরাং যে কোন ত্রিভুজ হতে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করলে তাদের মান এবং চিহ্ন একই হবে।

অতএব, একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণের জন্য যে কোন নির্দিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান সব সময়ই ধ্রুব হবে।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সীমাবদ্ধতা

আপনারা জানেন, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$. যেহেতু বাস্তব সংখ্যার বর্গ সর্বদা ধনাত্মক; সুতরাং $\sin^2\theta$ এবং $\cos^2\theta$ এর প্রত্যেকটির মান ধনাত্মক হবে। আবার এদের যোগফল $= 1$ বলে তাদের কোনটির মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না। অর্থাৎ $\sin\theta$ বা $\cos\theta$ এর মান$+1$ অপেক্ষা বৃহত্তর অথবা -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতম হতে পারে না।

কাজেই θ এর মান যত বড় বা ছোটই হোক, $\sin\theta$ বা $\cos\theta$ এর মান $+1$ এবং -1 এর মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকবে ($-1\leq\sin\theta\leq1$ এবং $-1\leq\cos\theta\leq1$) অর্থাৎ, যে মান $+1$ অপেক্ষা বৃহত্তর (যেমন $2, \sqrt{2}, 3$) তারা $\sin\theta$ বা $\cos\theta$ এর জন্য প্রযোজ্য নহে। তদ্রূপ, -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতম সংখ্যা (যেমন, $-2, -1.5, -\sqrt{3}$) $\sin\theta$ কিংবা $\cos\theta$ এর জন্য প্রযোজ্য নহে।

যেহেতু, $\text{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ এবং $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$; সুতরাং $\sec\theta$ বা, $\text{cosec}\theta$ এর মান $+1$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতম অথবা -1 অপেক্ষা বৃহত্তম হতে পারে না। উদাহরণস্বরূপ, $\sec\theta$ এবং $\text{cosec}\theta$ এর মান $0.2, 0.3, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{5}, -0.4$ ইত্যাদি হতে পারে না।

কিন্তু মনে রাখতে হবে যে, $\tan\theta$ বা $\cot\theta$ এর মান $+1$ অপেক্ষা বৃহত্তর বা, -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে।

অনুশীলনী-১৪.৫

১. ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধ্রুবতা ও সীমাবদ্ধতা বর্ণনা করুন।

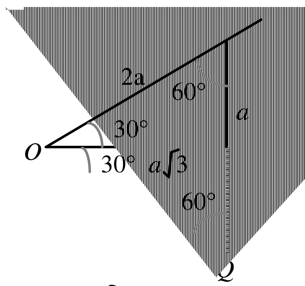
kJb 6 কয়েকটি নির্ধারিত কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- নির্ধারিত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মান নির্ণয় করতে পারবেন।
- সমস্যা সমাধানে অনুপাতের মানসমূহ প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

30 কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



চিত্র ১৪.১২

মনে করুন, একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা আদি অবস্থান OX হতে আরম্ভ করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে আবর্তিত হয়ে □$XOP=30°$ কোণ উৎপন্ন করে। OX এর উপর PN লম্ব অঙ্কন করে তাকে Q পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করুন যেন $PN=NQ$ হয়। এখন OQ যোগ করুন।

যেহেতু, OPN এবং OQN সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বতোভাবে সমান অতএব □$OPN =$ $OQN=60°$,
সুতরাং, OPQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

$\therefore \quad OP = PQ = 2PN \; [\because PN = NQ]$

ধরুন $PN = a$

তাহলে $OP = 2a$ এবং $ON = \sqrt{OP^2 - PN^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

$$\therefore \sin 30° = \frac{PN}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30° = \frac{ON}{OP} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{PN}{ON} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

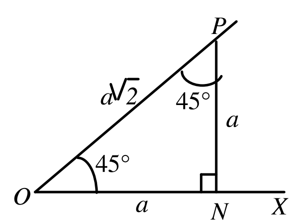
$$\operatorname{cosec} 30° = \frac{OP}{PN} = \frac{2a}{a} = 2,$$

$$\sec 30° = \frac{OP}{ON} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

এবং $\cot 30° = \frac{ON}{PN} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$.

45 কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত।

মনে করুন, □$XOP=45°$ এবং OX এর উপর PN লম্ব। অতএব □$PON =$ 45 । যেহেতু OPN সমকোণী ত্রিভুজ এবং □$PON=45$, সুতরাং □$OPN=45°$ অতএব, $PN = ON$.



KY© 14.13

ধরুন $PN = a$

তাহলে $ON = a$ এবং $OP = \sqrt{PN^2+OP^2} = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

$\therefore \quad \sin 45° = \frac{PN}{OP} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 45° = \frac{ON}{OP} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

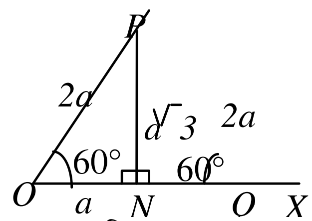
$\tan 45° = \frac{PN}{ON} = \frac{a}{a} = 1.$

$\text{cosec}45 = \frac{OP}{PN} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$,

$\sec 45 = \frac{OP}{ON} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$,

এবং $\cot 45° = \frac{ON}{PN} = \frac{a}{a} = 1.$

60° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত।



চিত্র ১৪.১৪

মনে করুন, □XOP=60° এবং OX এর উপর PN লম্ব। তাহলে □$PON = 60$ । OX এর উপর এমন একটি বিন্দু Q নেয়া হল যেন $ON=NQ$ হয়। PQ যোগ করুন। এখন ΔOPN এবং ΔPQN সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বতোভাবে সমান বলে □PON = □PQN = 60°; সুতরাং, OPQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং OP বাহু = OQ বাহু।

ধরুন $ON=a$ তাহলে $OP=OQ=2ON=2a$

এবং $PN=\sqrt{OP^2-ON^2} = \sqrt{4a^2-a^2}$

$= \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

$\therefore \quad \sin 60° = \frac{PN}{OP} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos 60° = \frac{ON}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$,

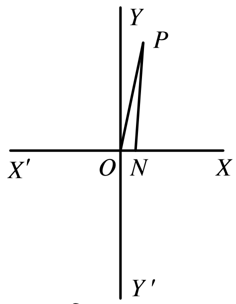
$\tan 60° = \frac{PN}{ON} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$,

$\text{cosec } 60° = \frac{OP}{PN} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sec 60° = \frac{OP}{ON} = \frac{2a}{a} = 2$,

এবং $\cot 60° = \frac{ON}{PN} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

90° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত।



চিত্র ১৪.১৫

মনে করুন, XOP কোণের পরিমাপ প্রায় $90°$ এর সমান এবং OX এর উপর PN লম্ব। তাহলে, ON বাহু স্পষ্টতঃ খুবই ছোট।

এখন, PON কোণের পরিমাণ $90°$ ডিগ্রীর যতই কাছাকাছি হবে ON বাহুর দৈর্ঘ্য ততই ছোট হবে এবং OP ও PN পরস্পর নিকটবর্তী হতে থাকবে। এখন, $\angle PON=90°$ কল্পনা করলে $ON=0$ (শূন্য) হবে এবং PN ও OP উভয়ই OY এর উপর সমাপতিত হবে অর্থাৎ $PN = OP$ হবে।

অতএব যখন $\angle XOP = 90°$ তখন $\frac{PN}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1$ এবং $\frac{ON}{OP} = \frac{0}{OP} = 0$

$\therefore$ প্রান্তীয় অবস্থায়, $\sin 90° = \frac{PN}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1,$

$$\cos 90° = \frac{ON}{OP} = 0,$$

$$\tan 90° = \frac{PN}{ON} = \frac{PN}{0} = \infty$$

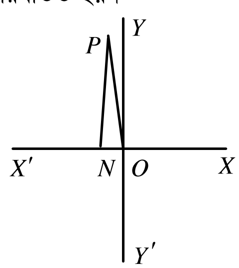
$$\operatorname{cosec} 90° = \frac{OP}{PN} = \frac{OP}{OP} = 1,$$

$$\sec 90° = \frac{OP}{ON} = \frac{OP}{0} = \infty$$

এবং $\cot 90° = \frac{ON}{PN} = \frac{0}{PN} = 0$।

টীকা ঃ ∞ চিহ্নটি এমন একটি রাশি যা যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা হতে বৃহত্তর, ধনাত্মক সংখ্যাটি যত বৃহত্তর সংখ্যাই হোকনা কেন।

উপরে $90°$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় করার সময় XOP কোণকে $90°$ অপেক্ষা সামান্য ছোট ধরা হয়েছে। কিন্তু XOP কোণকে $90°$ অপেক্ষা সামান্য বড় ধরে টেনজেন্ট ও সেকেন্ট অনুপাতের প্রান্তীয় মান নির্ণয় করলে তাদের মানের চিহ্ন পরিবর্তিত হয়।



চিত্র ১৪.১৬

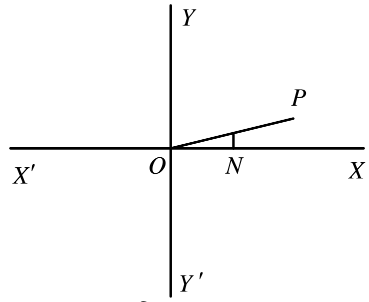
পার্শ্বের চিত্রানুযায়ী,

$$\tan 90° = \frac{PN}{-ON} = \frac{PN}{-0} = -\infty$$

$$\sec 90° = \frac{OP}{-ON} = \frac{OP}{-0} = -\infty.$$

সুতরাং, প্রকৃতপক্ষে আমরা পাই, $\tan 90° = \pm\infty$, এবং $\sec 90° = \pm\infty$. কিন্তু অন্যান্য অনুপাতের মানের পরিবর্তন হবে না।

$0°$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত।



চিত্র ১৪.১৭

মনে করুন, □XOP খুবই ছোট এবং ধনাত্মক কোণ এবং OX এর উপর PN লম্ব। তাহলে, PN বাহুও খুব ছোট হবে। এখন □XOP ক্ষুদ্র হতে ক্ষুদ্রতর হতে থাকলে PN বাহুর দৈর্ঘ্য ক্রমশ ক্ষুদ্র হতে থাকবে। প্রান্তীয় অবস্থায় যখন □$XOP=0$ হয়, তখন PN বাহু লোপ পায় এবং OP বাহু ON উপর সমাপতিত হয় অর্থাৎ $OP = ON$ এবং $PN = O$ হয়।

সুতরাং, প্রান্তীয় অবস্থায়,

$$\sin 0° = \frac{PN}{OP} = \frac{0}{OP} = 0$$

$$\cos 0° = \frac{ON}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1$$

$$\tan 0° = \frac{PN}{ON} = \frac{0}{ON} = 0,$$

$$\operatorname{cosec} 0° = \frac{OP}{PN} = \frac{OP}{0} = □$$

$$\sec 0° = \frac{OP}{ON} = \frac{OP}{OP} = 1$$

$$\cot 0° = \frac{ON}{PN} = \frac{ON}{0} = □.$$

নির্ধারিত কোণের, যেমন 0°, 30°, 45°, 60° এবং 90° কোণসমূহের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মান শিক্ষার্থীদের অবশ্যই স্মরণ রাখা উচিত। কোণগুলোর প্রথম তিনটি অনুপাতের মান নিম্নে ছক আকারে দেয়া হল। অন্য অনুপাতগুলোর মান এদের বিপরীত ঃ

কোণ	sine	cosine	tangent
$0°$ বা 0^c	0	1	0
$30°$ বা $\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45°$ বা $\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$60°$ বা $\frac{\pi}{3}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{3}$
$90°$ বা $\frac{\pi}{2}$	1	0	±□

উদাহরণ 1 : যদি $A=30$ ও $B=60$ হয় তবে দেখান যে, $\sin(A+B)= \sin A\cos B + \cos A\sin B$

সমাধান ঃ **বামপক্ষ** $= \sin(A+B) = \sin(30^\circ+60^\circ) = \sin 90^\circ = 1.$

ডানপক্ষ $= \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$= \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

উদাহরণ 2 : **মান নির্ণয় করুন $(\sin 30 \ +\sin 45 \ )\ (\cos 60 \ -\cos 45 \ ) + \frac{1}{4}$**

সমাধান ঃ $(\sin 30^\circ+\sin 45^\circ)\ (\cos 60^\circ-\cos 45^\circ) + \frac{1}{4}$

$= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$= \frac{1-2+1}{4} = \frac{2-2}{4} = 0$

উদাহরণ 3: **যদি $\tan^2\frac{\pi}{4} - \cos^2\frac{\pi}{3} = x\sin\frac{\pi}{4}\ \cos\frac{\pi}{4}\ \tan\frac{\pi}{3}$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় করুন।**

সমাধান ঃ $\tan^2\frac{\pi}{4} - \cos^2\frac{\pi}{3} = x \sin\frac{\pi}{4}\ \cos\frac{\pi}{4}\ \tan\frac{\pi}{3}$

বা, $\tan^2\frac{180^\circ}{4} - \cos^2\frac{180^\circ}{3} = x \sin\frac{180^\circ}{4}\ \cos\frac{180^\circ}{4}\ \tan\frac{180^\circ}{3}$

বা, $\tan^2 45^\circ - \cot^2 60^\circ = x \sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ$

বা, $(\tan 45^\circ)^2 - (\cot 60^\circ)^2 = x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3}$

বা, $(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

বা, $1 - \frac{1}{4} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

বা, $\frac{3}{4} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ x = \frac{3}{4} \infty \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

উদাহরণ 4 : **সমাধান করুন $\sqrt{3}\ (\tan\theta+\cot\theta) = 4$ যখন $0^\circ<\theta<90^\circ$**

সমাধান ঃ $\sqrt{3}\ (\tan\theta+\cot\theta) = 4$

বা, $\sqrt{3}\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right) = 4$

বা, $\sqrt{3}\ (\tan^2\theta+1) = 4\tan\theta$

বা, $\sqrt{3}\ \tan^2\theta+\sqrt{3} = 4\tan\theta$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 4\tan\theta+\sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 3\tan\theta - \tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $(\sqrt{3}\tan\theta - 1)(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

হয় $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0.$ না হয় $\tan\theta - \sqrt{3} = 0$

$\therefore \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$ $\therefore \tan\theta = \sqrt{3} = \tan 60°$

$\therefore \theta = 30°$ $\therefore \theta = 60°$

যেহেতু θ এর মান $0°$ হতে $90°$ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ

$\therefore \theta = 30°, 60°$

উদাহরণ 5 : **θ ধনাত্মক সুক্ষ্মকোণ হলে $2\sin^2\theta = 3\cos\theta$ সমীকরণটি সমাধান করুন।**

সমাধান ঃ $2\sin^2\theta = 3\cos\theta.$

বা, $2(1-\cos^2\theta) = 3\cos\theta$

বা, $2 - 2\cos^2\theta = 3\cos\theta$

বা, $2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 4\cos\theta - \cos\theta - 2 = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 2) = 0$

হয় $2\cos\theta - 1 = 0$ অথবা $\cos\theta + 2 = 0$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2} = \cos 60°$ $\therefore \cos\theta = -2$

$\therefore \theta = 60°$ যা সম্ভব নয়

$\therefore \theta = 60°$

উদাহরণ 6 : ***A, B, C* কোণের মান নির্ণয় করুন (A, B, C কোণের প্রত্যেকটি ধনাত্মক ও সুক্ষ্ম), যখন $\sin(B+C-A)=1$, $\cos(C+A-B)=1$ এবং $\tan(A+B-C)=1$.**

সমাধান ঃ $\sin(B+C-A) = 1 = \sin 90°$

$\therefore B+C-A = 90°$ ... . (1)

$\cos(C+A-B) = 1 = \cos 0°$

$\therefore C+A-B = 0°$ ... . (2)

$\tan(A+B-C) = 1 = \tan 45°$

$\therefore A+B-C = 45°$ ... ... (3)

এখন (i) ও (ii) যোগ করে পাই, $2C = 90°$ $\therefore C = 45°$

(ii) ও (iii) যোগ করে পাই. $2A = 45°$ $\therefore A = 22\frac{1°}{2}$

(iii) ও (i) যোগ করে পাই, $2B = 135°$ $\therefore B = 67\frac{1°}{2}$.

অনুশীলনী-১৪.৬

মান নির্ণয় করুন (1–2)

1. $\sin 45^\circ \sin 60^\circ - \cos 45^\circ \cos 60^\circ$
2. $4\tan^2 45^\circ - \operatorname{cosec}^2 30^\circ - \cos^3 60^\circ$

প্রমাণ করুন (3–6)

3. যদি $\theta = 45^\circ$ হয় তবে,

   i) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

   ii) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$.

4. যদি $A = 60^\circ$ এবং $B = 30^\circ$ হয় তবে, $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$.
5. যদি $A = 30^\circ$ হয় তবে $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$
6. যদি $\theta = 60^\circ$ এবং $\phi = 30^\circ$ হয় তবে $\tan(\theta-\phi) = \dfrac{\tan\theta - \tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}$

সমাধান করুন (যদি θ ধনাত্মক ও সুক্ষ্মকোণ হয়) (7 – 11)

7. $\sec^2\theta = 2\tan\theta$
8. $\cot^2\theta + 3\operatorname{cosec}\theta - 9 = 0$
9. $3\tan^2\theta - 5\sec\theta + 1 = 0$
10. $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$
11. $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

12. সমাধান করুন $2\cos^2\theta = 3(1-\sin\theta)$. যখন $0^\circ < \theta < 90^\circ$
13. α ও β ধনাত্মক সুক্ষ্মকোণ হলে $\sin(2\alpha-\beta) = 1$ এবং $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{2}$ সমীকরণ দুটি থেকে α ও β এর মান নির্ণয় করুন।
14. A, B, C কোণের সবগুলোই ধনাত্মক সুক্ষ্মকোণ হলে A, B ও C এর মান নির্ণয় করুন। যখন

    $\cos(B+C-A) = \dfrac{1}{2}$

    $\tan(C+A-B) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

    এবং $\sec(A+B-C) = \sqrt{2}$

উত্তরমালা

অনুশীলনী-১৪.২

1. 10°

2. i) $0.642\pi^c$ ii) 0.116□^{c}

3. $\dfrac{7}{11}$ গজ

4. 7.23 মাইল (প্রায়)

অনুশীলনী-১৪.৪

1. $\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\theta}}$

11. $\dfrac{16}{63}$

12. $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

13. $\pm\dfrac{40}{9}, \pm\dfrac{41}{40}$

অনুশীলনী-১৪.৬

1. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

2. $-\dfrac{1}{8}$

7. 45°

8. 30°

9. 60°

10. 30°

11. 45°

12. 30°

13. $\alpha = 50^\circ,\ \beta = 10^\circ$

14. $A = 37\dfrac{1^\circ}{2}, B = 52\dfrac{1^\circ}{2}\ ,\ C = 45^\circ$