ইউনিট ১৫

সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

ভূমিকা

পূর্বের ইউনিটে আপনারা ত্রিকোণমিতিক কোণ, ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাত, অনুপাতের সীমাবদ্ধতা, ধ্রুবতা, অনুপাতগুলির মৌলিক সম্পর্ক ইত্যাদি বিষয়ে জ্ঞান অর্জন করেছেন। এখন আপনারা আগ্রহী হবেন কিভাবে দুইটি ত্রিকোণমিতিক কোণ A ও B এর যোগ, বিয়োগ করা যায়। এই ইউনিটে আপনারা জানবেন কিভাবে ত্রিকোণমিতিক কোণের যোগ, বিয়োগ স্বতন্ত্র কোণ হিসাবে ব্যবহৃত হয়। এগুলো আপনাদের বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক কোণের মান নির্ণয়ে সাহায্য করবে।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- *সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন এবং তা প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন,*
- *যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন এবং তা প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন,*
- *ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের রূপান্তর করতে পারবেন,*
- *গুণিতক ও উপগুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন এবং তা প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন,*
- *ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী সম্পর্কিত সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।*

পাঠ ১ সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

উদ্দেশ্য

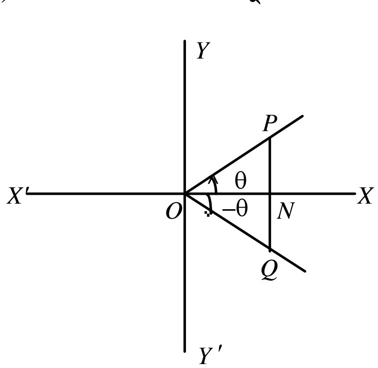
এই পাঠ শেষে আপনি-

- সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন,
- সমস্যা সমাধানে তা প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন।

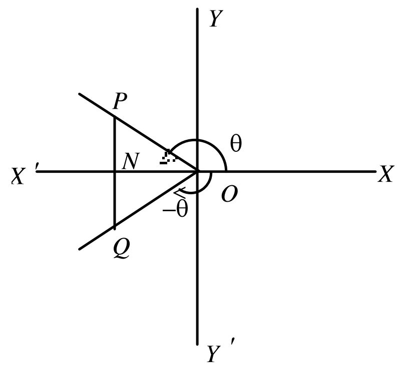
সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের সময় দূরত্বের চিহ্নগুলো অবশ্যই বিবেচনা করতে হবে এবং মনে রাখতে হবে যে ব্যাসার্ধ ভেক্টর সব সময়ই ধনাত্মক।

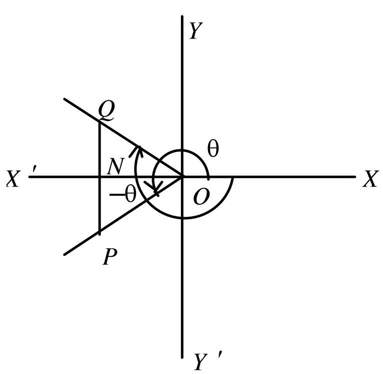
$(-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



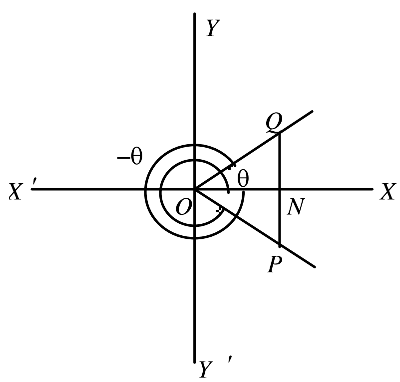
১ম চিত্র



২য় চিত্র



৩য় চিত্র



৪র্থ চিত্র

মনে করুন, একটি ঘূর্ণায়মান রেখা OX অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $\angle XOQ = -\theta$ কোণ উৎপন্ন করে। এখন P বিন্দু থেকে OX (১ম ও ৪র্থ চিত্র) অথবা OX' রেখার (২য় ও ৩য় চিত্র) উপর PN লম্ব অঙ্কন করুন। PN কে বর্ধিত করা হলে তা OQ রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করবে।

এখন সমকোণী ত্রিভুজ OPN এবং OQN হতে পাওয়া যায়

$\angle PON = \angle QON, \angle ONP = \angle ONQ$ এবং ON সাধারণ বাহু। অতএব, ΔOPN এবং ΔOQN সর্বসম। সুতরাং তাদের অনুরূপ বাহুগুলোও সমান হবে। অতএব প্রচলিত রীতি অনুযায়ী বাহুগুলোর চিহ্ন বিবেচনা করে পাওয়া যায়

$PN = -QN$ এবং $OP = OQ$ (বাসার্ধ ভেক্টর।)

সুতরাং, $\sin(-\theta) = \dfrac{QN}{OQ} = \dfrac{-PN}{OP} = -\sin\theta$

$$\cos(-\theta) = \frac{ON}{OQ} = \frac{ON}{OP} = \cos\theta$$

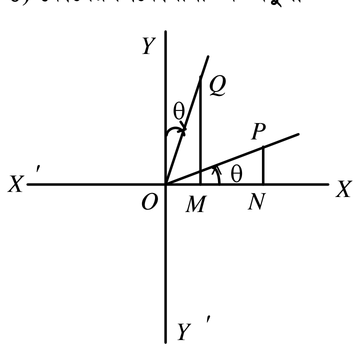
$$\tan(-\theta) = \frac{QN}{ON} = \frac{-PN}{ON} = -\tan\theta$$

$$\operatorname{cosec}(-\theta) = \frac{OQ}{QN} = \frac{OP}{-PN} = -\operatorname{cosec}\theta$$

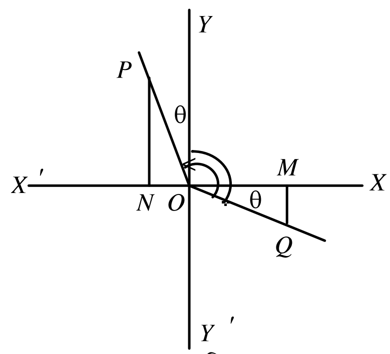
$$\sec(-\theta) = \frac{OQ}{ON} = \frac{OP}{ON} = \sec\theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{ON}{QN} = \frac{ON}{-PN} = -\cot\theta$$

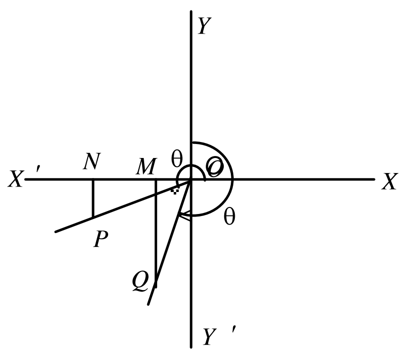
(90°– θ) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



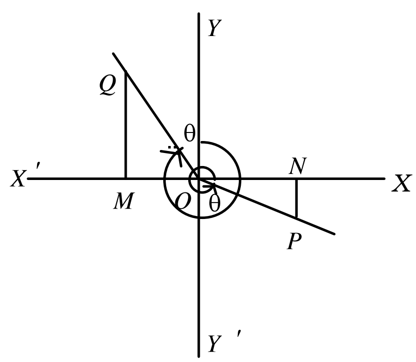
১ম চিত্র



২য় চিত্র



৩য় চিত্র



৪র্থ চিত্র

মনে করুন, একটি ঘূর্ণায়মান রেখা OX অবস্থান হতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। অপর একটি ঘূর্ণায়মান রেখা একই আদি অবস্থান OX হতে একই দিকে ঘুরে $\angle XOY = 90°$ কোণ উৎপন্ন করে। দ্বিতীয় রেখাটি OY- অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $\angle YOQ = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে $\angle XOQ = 90° - \theta$।

এখন OP এবং OQ রেখা বরাবর এমন দুটি রেখা নিন যেন $OP = OQ$ হয়। P ও Q হতে OX রেখার উপর যথাক্রমে PN এবং QM লম্ব অঙ্কন করুন। এখন OP প্রথম অথবা তৃতীয় চতুর্ভাগে থাকলে OQ রেখাও যথাক্রমে প্রথম এবং তৃতীয় চতুর্ভাগে থাকবে (১ম ও ৩য় চিত্র)। আবার OP দ্বিতীয় অথবা চতুর্থ চতুর্ভাগে থাকলে OQ রেখা যথাক্রমে চতুর্থ অথবা দ্বিতীয় চতুর্ভাগে থাকবে (২য় ও ৪র্থ চিত্র)।

এখন ΔPON ও ΔQOM সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাওয়া যায়,

$\angle PON = \angle OQM$ এবং $OQ = OP$। অতএব, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম এবং তাদের অনুরূপ বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান। অতএব প্রচলিত রীতি অনুযায়ী বাহুগুলোর চিহ্ন বিবেচনা করে পাওয়া যায়,

$QM = ON$, $OM = PN$, $OQ = OP$ (ব্যাসার্ধ ভেক্টর)

অতএব, $\sin(90° - \theta) = \sin XOQ = \dfrac{QM}{OQ} = \dfrac{ON}{OP} = \cos XOP = \cos\theta$

$$\cos(90° - \theta) = \cos XOQ = \frac{OM}{OQ} = \frac{PN}{OP} = \sin XOP = \sin\theta$$

$$\tan(90° - \theta) = \tan XOQ = \frac{QM}{OM} = \frac{ON}{PN} = \cot XOP = \cot\theta$$

উপরোক্ত ফলাফল হতে সহজে দেখানো যায় যে,

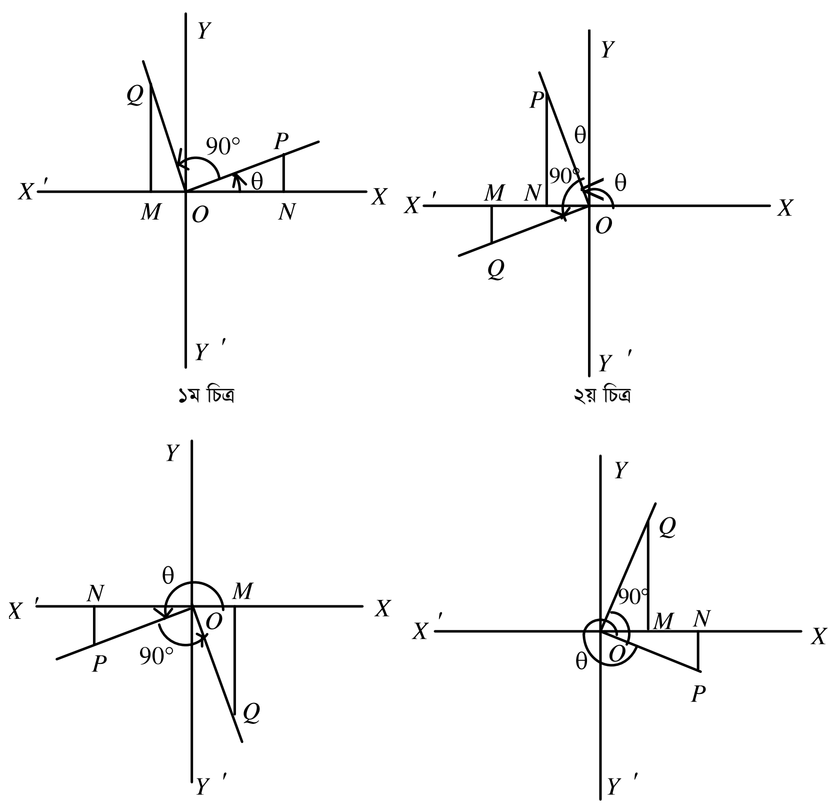
$$\operatorname{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta,$$

$$\sec(90° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta,$$

$$\cot(90° - \theta) = \tan\theta.$$

দ্রষ্টব্য ঃ $90° - \theta$ এবং θ পরস্পরের পরিপূরক কোণ। দুটি পরিপূরক কোণের জন্য একটি কোণের sine অপরটির cosine, একটির tangent অপরটির cotangent এবং একটির cosecant অপরটির secant এর সমান। যেমন, $30°$ ও $60°$ কোণ পরস্পরের পরিপূরক। অতএব $\sin 30° = \cos 60°$, $\tan 30° = \cot 60°$, $\operatorname{cosec} 30° = \sec 60°$।

$(90° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



মনে করুন, একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা আদি অবস্থান OX- থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। ঐ একই রেখা একই দিকে আরও ঘুরে $\angle POQ = 90°$ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে, $\angle XOQ = 90° + \theta$

এখন OP এবং OQ রেখা দুটি থেকে $OP = OQ$ নিন এবং P ও Q হতে OX (অথবা OX') রেখার উপর যথাক্রমে PN এবং QM লম্ব অঙ্কন করুন।

এখন ΔOPN এবং ΔOQM সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাওয়া যায়
$\angle PON = \angle QOY = \angle OQM$ এবং $OP = OQ$। অতএব, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম এবং তাদের অনুরূপ বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান। অতএব প্রচলিত রীতি অনুযায়ী বাহুগুলোর চিহ্ন বিবেচনা করে পাওয়া যায়

$QM = ON, -OM = PN, OP = OQ$ (ব্যাসার্ধ ভেক্টর)

অতএব, $\sin(90°+\theta) = \sin XOQ = \dfrac{QM}{OQ} = \dfrac{ON}{OP} = \cos XOP = \cos\theta$

$$\cos(90°+\theta) = \cos XOQ = \frac{OM}{OQ} = -\frac{PN}{OP} = -\sin XOP = -\sin\theta$$

$$\tan(90°+\theta) = \tan XOQ = \frac{QM}{OM} = \frac{ON}{-PN} = -\cot XOP = -\cot\theta$$

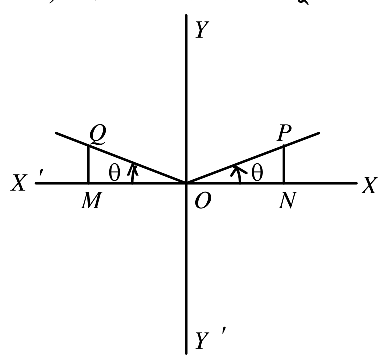
উপরোক্ত ফলাফল হতে সহজে দেখানো যায় যে,

$$\operatorname{cosec}(90°+\theta) = \sec\theta,$$

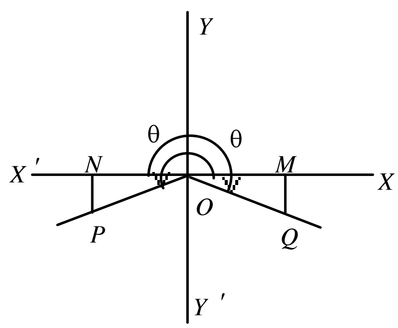
$$\sec(90°+\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$$

এবং $\cot(90°+\theta) = -\tan\theta$

$(180°-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



১ম চিত্র



২য় চিত্র

মনে করুন, একটি ঘূর্ণায়মান রেখা OX অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। অপর একটি ঘূর্ণায়মান রেখা একই আদি অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে OX' অবস্থানে এসে $180°$ কোণ উৎপন্ন করে পুনরায় ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $X'OQ = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে, $\angle XOQ = 180°-\theta$। এখন $OP = OQ$ নিন এবং P ও Q বিন্দু হতে OX (অথবা OX') রেখার উপর যথাক্রমে PN এবং QM লম্ব অঙ্কন করুন।

এখন $\angle PON = \angle QOM$ এবং $OP = OQ$ সুতরাং, ΔPON এবং ΔQOM সর্বসম। অতএব তাদের অনুরূপ বাহুগুলো পরস্পর সমান হবে। প্রচলিত রীতি অনুযায়ী বাহুগুলোর চিহ্ন বিবেচনা করে পাওয়া যায়, $QM = PN, -OM = ON, OP = OQ$

অতএব, $\sin(180°-\theta) = \sin XOQ = \dfrac{QM}{OQ} = \dfrac{PN}{OP} = \sin XOP = \sin\theta$

$$\cos(180°-\theta) = \cos XOQ = \frac{OM}{OQ} = \frac{-ON}{OP} = -\cos XOP = -\cos\theta$$

$$\tan(180° - \theta) = \tan XOQ = \frac{QM}{OM} = \frac{PN}{-ON} = -\tan XOP = -\tan\theta$$

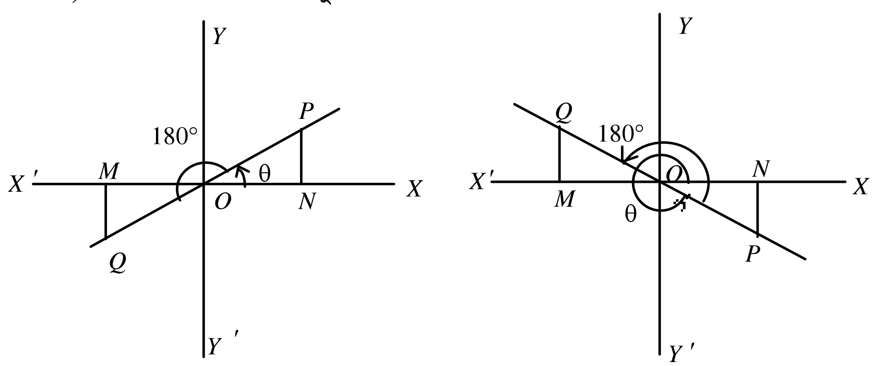
উপরোক্ত ফলাফল হতে সহজে দেখানো যায় যে,

$$\operatorname{cosec}(180° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$$

$$\sec(180° - \theta) = -\sec\theta$$

$$\cot(180° - \theta) = -\cot\theta$$

$(180° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



১ম চিত্র ২য় চিত্র

মনে করুন, একটি ঘূর্ণায়মান রেখা OX অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ এবং $\angle POQ = 180°$ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে, $\angle XOQ = 180° + \theta$ এবং OP ও OQ রেখা দুটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

এখন $OP = OQ$ নিন এবং P ও Q বিন্দু হতে $X'OX$ রেখার উপর যথাক্রমে PN এবং QM লম্ব অঙ্কন করুন। যেহেতু $\angle PON = \angle QOM$ এবং $OP = OQ$, অতএব ΔPON ও ΔQOM সর্বসম। সুতরাং তাদের অনুরূপ বাহুগুলোও পরস্পর সমান হবে। প্রচলিত রীতি অনুযায়ী বাহুগুলোর চিহ্ন বিবেচনা করে পাওয়া যায়,

$$-QM = PN,\ -OM = ON,\ OQ = OP$$

অতএব, $\sin(180° + \theta) = \sin XOQ = \dfrac{QM}{OQ} = -\dfrac{PN}{OP} = -\sin XOP = -\sin\theta$

$$\cos(180° + \theta) = \cos XOQ = \frac{OM}{OQ} = -\frac{ON}{OP} = -\cos XOP = -\cos\theta$$

$$\tan(180° + \theta) = \tan XOQ = \frac{QM}{OM} = \frac{-PN}{-ON} = \frac{PN}{ON} = \tan XOP = \tan\theta$$

উপরোক্ত ফলাফল হতে সহজে দেখানো যায় যে,

$$\operatorname{cosec}(180° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$$

$$\sec(180° + \theta) = -\sec\theta$$

$$\cot(180° + \theta) = \cot\theta$$

$(270° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

পূর্বের নিয়ম অনুসরণ করে জ্যামিতিয় পদ্ধতিতে $(270° - \theta)$ কোণের ত্রিকোনমিতিক অনুপাত নির্ণয় করা যায়। কিন্তু নিম্নের পদ্ধতি অনুসরণ করে আমরা সহজে $(270° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারি।

$$\sin(270° - \theta) = \sin\{180° + (90° - \theta)\} = -\sin(90° - \theta) = -\cos\theta$$

$$\cos(270° - \theta) = \cos\{180° + (90° - \theta)\} = -\cos(90° - \theta) = -\sin\theta$$

$\tan(270° - \theta) = \tan\{180 + (90° - \theta)\} = \tan(90° - \theta) = \cot\theta$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}(270° - \theta) = -\sec\theta$

$\sec(270° - \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

$\cot(270° - \theta) = \tan\theta$

$(270° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

জ্যমিতিক পদ্ধতিতেও $(270° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করা যায়। কিন্তু নিম্নলিখিত উপায়ে $(270° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সহজে নির্ণয় করা যায়।

$\sin(270° + \theta) = \sin\{180° + (90° + \theta)\} = -\sin(90° + \theta) = -\cos\theta$

$\cos(270° + \theta) = \cos\{180° + (90° + \theta)\} = -\cos(90° + \theta) = -(-\sin\theta) = \sin\theta$

$\tan(270° + \theta) = \tan\{180° + (90° + \theta)\} = \tan(90° + \theta) = -\cot\theta$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}(270° + \theta) = -\sec\theta$

$\sec(270° + \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

$\cot(270° + \theta) = -\tan\theta$

$(360° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

জ্যমিতিক পদ্ধতিতেও $(360° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করা যায়। কিন্তু নিম্নলিখিত উপায়ে $(360° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সহজে নির্ণয় করা যায়।

$\sin(360° - \theta) = \sin\{270° + (90° - \theta)\} = -\cos(90° - \theta) = -\sin\theta$

$\cos(360° - \theta) = \cos\{270° + (90° - \theta)\} = \sin(90° - \theta) = \cos\theta$

$\tan(360° - \theta) = \tan\{270° + (90° - \theta)\} = -\cot(90° - \theta) = -\tan\theta$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}(360° - \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

$\sec(360° - \theta) = \sec\theta$

$\cot(360° - \theta) = -\cot\theta$

$(360° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

জ্যমিতিক পদ্ধতিতেও $(360° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করা যায়। কিন্তু নিম্নলিখিত উপায়ে $(360° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সহজে নির্ণয় করা যায়।

$\sin(360° + \theta) = \sin\{270° + (90° + \theta)\} = -\cos(90° + \theta) = -(-\sin\theta) = \sin\theta$

$\cos(360° + \theta) = \cos\{270° + (90° + \theta)\} = \sin(90° + \theta) = \cos\theta$

$\tan(360° + \theta) = \tan\{270° + (90° + \theta)\} = -\cot(90° + \theta) = -(-\tan\theta) = \tan\theta$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}(360° + \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

$\sec(360° + \theta) = \sec\theta$

$\cot(360° + \theta) = \cot\theta$

সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের নিয়ম

যদি θ কোণকে $90°$-এর জোড় গুণিতকের সাথে যোগ অথবা বিয়োগ করা হয় $(180° \pm \theta, 360° \pm \theta$ ইত্যাদি) তবে সেই কোণের ত্রিকাণমিতিক অনুপাতকে θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করলে মূল অনুপাতের কোনরূপ পরিবর্তন হয় না অর্থাৎ sine, cosine, tangent ইত্যাদি sine, cosine, tangent-ই থাকে। কিন্তু তার চিহ্ন ধনাত্মক না ঋণাত্মক হবে তা

নির্ণয় করার জন্য θ কোণকে ধনাত্মক সুক্ষ্মকোণ ধরে মূল কোণটি কোন চৌকোণে অবস্থান করে তা নির্ণয় করে চিহ্নের চৌকণ-নিয়ম অনুযায়ী সহজেই নির্ণয় করা যায়।

যেমন $\sin(540^\circ + \theta) = -\sin\theta$

এখানে কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রেখাটি আদি অবস্থান হতে ঘূর্ণন শুরু করে $(540^\circ + \theta)$ কোণ উৎপন্ন করে তৃতীয় কোয়াড্রেন্টে অবস্থান করে এবং ঐ কোয়াড্রেন্টে tangent ও cotangent ছাড়া অপর অনুপাতগুলির মান ঋণাত্মক। সুতরাং $\sin(540^\circ + \theta) = \sin(6 \infty 90^\circ + \theta) = -\sin\theta$

যদি θ কোণকে 90° এর বিজোড় গুণিতকের সাথে যোগ অথবা বিয়োগ করা হয় $(90^\circ + \theta, 90^\circ - \theta, 270^\circ + \theta, 270^\circ - \theta$ ইত্যাদি) তবে সেই কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করলে মূল অনুপাত পরিবর্তিত হয়ে সহ অনুপাতে পরিণত হয়। অর্থাৎ sine পরিবর্তিত হয়ে cosine, cosine পরিবর্তিত হয়ে sine, tangent পরিবর্তিত হয়ে cotangent, cotangent পরিবর্তিত হয়ে tangent, cosecant পরিবর্তিত হয়ে secant এবং secant পরিবর্তিত হয়ে cosecant হয়। কিন্তু তার চিহ্ন ধনাত্মক না ঋণাত্মক হবে তা নির্ণয় করার জন্য θ কোণকে ধনাত্মক সুক্ষ্মকোণ ধরে মূল কোণটি কোন চৌকোণে অবস্থান করে তা নির্ণয় করে চিহ্নের চৌকণ-নিয়ম অনুযায়ী সহজেই নির্ণয় করা যায়।

যেমন $\sin(450^\circ + \theta) = \cos\theta$

এখানে কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রেখাটি আদি অবস্থান হতে ঘূর্ণন শুরু করে $(450^\circ + \theta)$ কোণ উৎপন্ন করে দ্বিতীয় কোয়াড্রেন্টে অবস্থান করে এবং ঐ কোয়াড্রেন্টে sine অনুপাতের মান ধনাত্মক। সুতরাং $\sin(450^\circ + \theta) = \sin(5 \infty 90^\circ + \theta) = \cos\theta$

উদাহরণ-1 ঃ মান নির্ণয় করুন

i) $\sin 675^\circ$ ii) $\tan(1305^\circ)$ iii) $\sec(-2580^\circ)$

সমাধান ঃ (i) $\sin 675^\circ$

$$= \sin(7 \infty 90^\circ + 45^\circ)$$
$$= -\cos 45^\circ$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(ii) $\tan 1305^\circ$

$$= \tan(12 \infty 90^\circ + 45^\circ)$$
$$= \tan 45^\circ$$
$$= 1$$

(iii) $\sec(-2580^\circ)$

$$= \sec(2580^\circ)$$
$$= \sec(28 \infty 90^\circ + 60^\circ)$$
$$= \sec 60^\circ$$
$$= 2$$

উদাহরণ-2 ঃ মান নির্ণয় করুন $\mathbf{\tan\frac{\pi}{12}\ \tan 5\frac{\pi}{12}\ \tan 7\frac{\pi}{12}\ \tan 11\frac{\pi}{12}}$

সমাধান ঃ $\tan\frac{\pi}{12}\ \tan 5\frac{\pi}{12}\ \tan 7\frac{\square}{12}\ \tan 11\frac{\square}{12}$

$$= \tan\frac{180^\circ}{12}\ \tan 5\frac{180^\circ}{12}\ \tan 7\frac{180^\circ}{12}\ \tan 11\frac{180^\circ}{12}$$

$$= \tan 15^\circ \tan 75^\circ \tan 105^\circ \tan 165^\circ$$

$$= \tan 15^\circ \tan(90^\circ - 15^\circ) \tan(90^\circ + 15^\circ) \tan(180^\circ - 15^\circ)$$

$$= \tan 15^\circ \cot 15^\circ (-\cot 15^\circ)(-\tan 15^\circ)$$

$$= 1$$

উদাহরণ- 3 ঃ **মান নির্ণয় করুন** $\sin^2 17\frac{\pi}{18} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{37\pi}{18} + \cos^2 \frac{3\pi}{8}$

সমাধান ঃ $\sin^2 17\frac{\pi}{18} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{37\pi}{18} + \cos^2 \frac{3\pi}{8}$

$$= \left\{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{18}\right)\right\}^2 + \left\{\sin\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right)\right\}^2 + \left\{\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{18}\right)\right\}^2 + \cos^2\frac{3\pi}{8}$$

$$= \sin^2\frac{\pi}{18} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{18} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$$

$$= \left(\sin^2\frac{\pi}{18} + \cos^2\frac{\pi}{18}\right) + \left(\sin^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= 1+1$$

$$= 2$$

উদাহরণ-4 ঃ **যদি n এর মান শূন্য কিংবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা হয় তবে** $\tan\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$ **এর মান নির্ণয় করুন।**

সমাধান ঃ যখন $n = 0$

$$\tan\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{4}\right\} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

যদি n জোড় সংখ্যা এবং m একটি অখন্ড সংখ্যা হয় তবে $n=2m$

$$\therefore \tan\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{4}\right\} = \tan\left\{\frac{2m\pi}{2} + (-1)^{2m}\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$= \tan\left(m\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

আবার যখন n একটি বিজোড় সংখ্যা এবং m যে কোন অখন্ড সংখ্যা তখন $n=2m+1$ ধরে,

$$\tan\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$= \tan\left\{\frac{(2m+1)\pi}{2} + (-1)^{2m+1}\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$= \tan\left\{m\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$= \tan\left(m\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

সুতরাং n এর মান শূন্য কিংবা যেকোন অখন্ড সংখ্যা হলে আমরা পাই-

$$\tan\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{4}\right\} = \tan\frac{\pi}{4} = 1.$$

উদাহরণ-5 ঃ সমাধান করুন $\tan\theta - \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta + \sqrt{3} = 0$ যখন $0 \le \theta \le 2\pi$.

সমাধান ঃ $\tan\theta - \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan\theta - \sqrt{3}\cos\theta - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.\cos\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan\theta - \sqrt{3}\cos\theta - \tan\theta\cos\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan\theta + \sqrt{3} - \tan\theta\cos\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 0$

বা, $1(\tan\theta + \sqrt{3}) - \cos\theta(\tan\theta + \sqrt{3}) = 0$

বা, $(\tan\theta + \sqrt{3})(1 - \cos\theta) = 0$

হয় $\tan\theta + \sqrt{3} = 0$ না হয় $1 - \cos\theta = 0$

বা, $\tan\theta = -\sqrt{3} = -\tan\frac{\pi}{3}$ বা, $\cos\theta = 1 = \cos 0°$ বা, $\cos 2\pi$

বা, $\tan\theta = \tan(\pi - \frac{\pi}{3})$ বা, $\tan(2\pi - \frac{\pi}{3})$ $\therefore\ \theta = 0°, 2\pi$

বা, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ বা, $\frac{5\pi}{3}$

সুতরাং $\theta = 0°,\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3},\ 2\pi$.

উদাহরণ-6 ঃ সমাধান করুন $2(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta$ যখন $0° < \theta < 360°$

সমাধান ঃ $2(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta$.

বা, $2\sin\theta\cos\theta + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos\theta - 4\sin\theta = 0$

বা, $2\sin\theta\cos\theta - 4\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta + 2\sqrt{3} = 0$

বা, $2\sin\theta(\cos\theta - 2) - \sqrt{3}(\cos\theta - 2) = 0$

বা, $(\cos\theta - 2)(2\sin\theta - \sqrt{3}) = 0$

হয় $\cos\theta - 2 = 0$

বা, $\cos\theta = 2$

যা সম্ভব নয়

না হয় $2\sin\theta - \sqrt{3} = 0$

বা, $2\sin\theta = \sqrt{3}$

$\therefore\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60°$ বা $\sin 120°$

$\therefore\ \theta = 60°, 120°$

$\therefore\ \theta = 60°, 120°$

অনুশীলনী ১৫.১

1. মান নির্ণয় করুন

   i) $\sin 2370°$ ii) $\cot(-1530°)$
   iii) $\sec 570°$ iv) $\operatorname{cosec} 765°$

2. মান নির্ণয় করুন

   i) $\cos\frac{49\pi}{6}$ ii) $\cos\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{19\pi}{3}\right)$

   iii) $\operatorname{cosec}\frac{16\pi}{3}$ iv) $\tan\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{19\pi}{3}\right)$

3. মান নির্ণয় করুন

   i) $\sin 420°\cos 390° + \cos(-300°)\sin(-330°)$

   ii) $\cos 420°\sin(-300°) - \sin 870°\cos 570°$

   iii) $\tan(-315°)\cot 405° + \sec(-765°)\operatorname{cosec} 495°$

   iv) $\tan\frac{17\pi}{4}\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right) + \sec\left(\frac{-34\pi}{3}\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{25\pi}{6}\right)$

4. প্রমাণ করুন

   i) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)\cos(\pi - \theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

ii) $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \cot(3\pi + \theta) = \text{cosec}(5\pi - \theta) \sec\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) \cos 5\pi.$

5. মান নির্ণয় করুন

i) $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$

ii) $\sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{3\pi}{12} + \sin^2\frac{5\pi}{12} + \sin^2\frac{7\pi}{12} + \sin^2\frac{9\pi}{12} + \sin^2\frac{11\pi}{2}$

6. যদি n একটি অখন্ড সংখ্যা হয় তবে $\sin\left\{n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}$ এর মান নির্ণয় করুন।

7. নিচের সমীকরণগুলো হলে θ এর মান নির্ণয় করুন।

i) $\tan\theta = -\sqrt{3}$ যখন $270° < \theta < 360°$

ii) $\sec\theta = -2$, যখন $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

8. প্রমাণ করুন

$\tan\frac{\pi}{28}\ \tan\frac{3\pi}{28}\ \tan\frac{5\pi}{28}$ - - - - - - - $\tan\frac{13\pi}{28} = 1.$

9. সমাধান করুন যখন $0° < \theta < 360°$

i) $2\sin^2\theta - 5\cos\theta + 1 = 0$

ii) $\cos\theta + \sqrt{3}\ \sin\theta = 2$

iii) $1 - 2\sin\theta - 2\cos\theta + \cot\theta = 0$

iv) $3\tan^2\theta - 4\sqrt{3}\ \sec\theta + 7 = 0$

v) $3(\sec^2\theta + \tan^2\theta) = 5$

kJb 2 যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ সুত্রের প্রমাণ করতে পারবেন,
- $\cos(A-B)$, $\sin(A+B)$, $\sin(A-B)$, $\tan(A+B)$, $\tan(A-B)$ ইত্যাদি সুত্র নির্ণয় করতে পারবেন,
- সুত্রগুলির প্রয়োগ করতে পারবেন।

যৌগিক কোণ (Compound angle)

দুই বা ততোধিক কোণের বীজগণিতীয় যোগফলকে যৌগিক কোণ বলে। যেমন- $A+B$, $A-B$, $A+B+C$ ইত্যাদি যৌগিক কোণ।

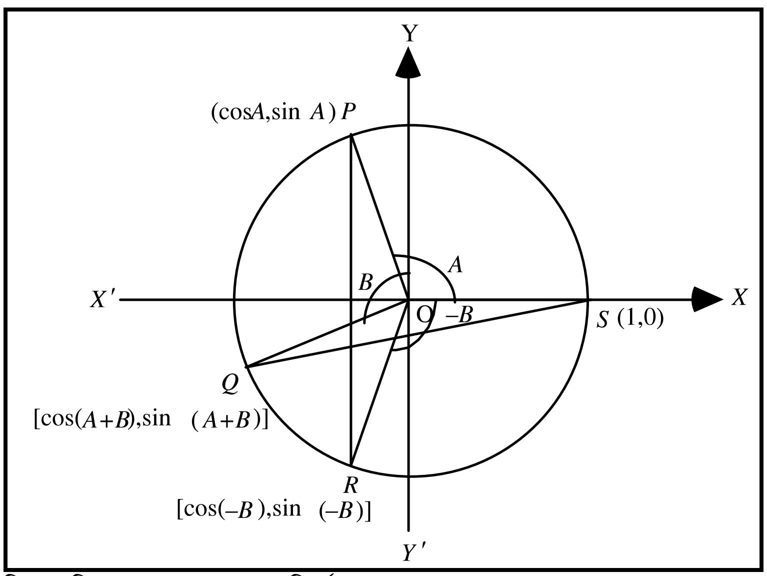
> দুই বা ততোধিক কোণের বীজগণিতীয় যোগফলই যৌগিক কোণ।

সূত্র ঃ প্রমাণ করতে হবে যে,

$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

যখন A ও B কোণদ্বয় ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $(A+B)<90^{\circ}$

প্রমাণ ঃ



চিত্রে ধরুন ঘূর্ণন রশ্মি একটি বৃত্তে A, B, $-B$ কোণ নির্দেশ করছে, $\angle XOP=\angle A$, $\angle POQ=\angle B$ এবং $\angle XOR=-\angle B$ যেখানে P, Q, R, S বিন্দু চারটি বৃত্তের উপর অবস্থিত।

তাহলে P, Q, R, S বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে $(\cos A, \sin A)$, $[\cos(A+B), \sin(A+B)]$,

$[\cos(-B), \sin(-B)]$, $(1, 0)$,

এখন $\triangle POR$ -ও $\triangle QOS$- এ

OP বাহু $= OS$ বাহু, OR বাহু $= OQ$ বাহু

$\angle POR = \angle QOS$ (যেহেতু প্রত্যেক $\angle B+\angle QOR$)

অতএব $PR = QS$

এখন $PR = \sqrt{[\cos A-\cos(-B)]^2+[\sin A-\sin(-B)]^2}$

$PR^২ = (\cos A - \cos B)^2 + (\sin A + \sin B)^2$ [$\because$ cos(–*B*) = cosB এবং sin (–*B*)=–sin*B*]

$= \cos^2 A + \cos^2 B - 2\cos A\cos B + \sin^2 A + \sin^2 B + 2\sin A\sin B$

$= (\cos^2 A + \sin^2 A) + (\cos^2 B + \sin^2 B) - 2(\cos A\cos B - \sin A\sin B)$

$= 1 + 1 - 2(\cos A\cos B - \sin A\sin B)$

$= 2 - 2(\cos A\cos B - \sin A\sin B)$.................. (i)

আবার, $QS = \sqrt{[\cos(A+B)-1]^2 + [\sin(A+B)-O]^2}$

$\therefore QS^2 = [\cos(A+B)-1]^2 + [\sin(A+B)]^2$

$= \cos^2(A+B) + 1 - 2\cos(A+B).1 + \sin^2(A+B)$

$= [\cos^2(A+B) + \sin^2(A+B)] + 1 - 2\cos(A+B)$

$= 1 + 1 - 2\cos(A+B)$

$= 2 - 2\cos(A+B)$ .... (2)

যেহেতু $PR = QS$

অতএব $PR^2 = QS^2$

অতএব (i) ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই-

$2-2(\cos A\cos B - \sin A\sin B) = 2 - 2\cos(A+B)$

or, $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$.....................(3)

অনুসিদ্ধান্ত-১ যে কোন দুটি কোণ *A* ও *B* এর ক্ষেত্রে

$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

(3) নং সমীকরণে *B* এর পরিবর্তে –*B* বসিয়ে পাই-

$\cos[A+(-B)] = \cos A\cos(-B) - \sin A\sin(-B)$

$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

সূত্র ঃ
$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$
$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

অনুসিদ্ধান্ত-২ যে কোন দুটি কোণ *A* ও *B* এর জন্য

$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

আমরা জানি,

$\cos(90^o - A) = \sin A$

এবং $\sin(90^o - A) = \cos A$

$\therefore \sin(A+B) = \cos\{90^o - (A+B)\}$

$= \cos[(90^o - A) - B]$

$= \cos(90^o - A)\cos B + \sin(90^o - A)\sin B$

$= \sin A\cos B + \cos A\sin B$

অনুসিদ্ধান্ত-৩ যে কোন দুইটি কোণ *A, B* এর জন্য

$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ তে *B* এর পরিবর্তে –*B* বসিয়ে পাওয়া যায়

$\sin[A+(-B)] = \sin A\cos(-B) + \cos A\sin(-B)$

$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

সূত্র ঃ
$\sin(A+B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$
$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

উদাহরণ-1 ঃ মান নির্ণয় করুন ঃ $\cos 75^o$, $\sin 15^o$

সমাধান ঃ $\cos 75^o = \cos(45^o + 30^o)$

$= \cos 45^o\cos 30^o - \sin 45^o\sin 30^o$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 75^o = \sin(45^o+30^o)$$

$$= \sin 45^o \cos 30^o + \cos 45^o \sin 30^o$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

উদাহরণ-2 ঃ প্রমাণ করুন

$$\mathbf{\cos 68^o 20' \cos 8^o 20' + \cos 81^o 40' \cos 21^o 40' = \frac{1}{2}}$$

সমাধান ঃ $\cos 68^o 20' \cos 8^o 20' + \cos 81^o 40' \cos 21^o 40'$

$= \cos(90^o - 21^o 40') \cos(8^o 20') + \cos(90^o - 8^o 20') \cos 21^o 40'$

$= \sin 21^o 40' \cos 8^o 20' + \sin 8^o 20' \cos 21^o 40'$

$= \sin(21^o 40' + 8^o 20')$

$= \sin 30^o = \frac{1}{2}$ (k´JKef)

উদাহরণ-3 ঃ প্রমাণ করুন ঃ $\dfrac{\sin(B-C)}{\cos B \cos C} + \dfrac{\sin(C-A)}{\cos C \cos A} + \dfrac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B} = 0$

সমাধান ঃ $\dfrac{\sin(B-C)}{\cos B \cos C} + \dfrac{\sin(C-A)}{\cos C \cos A} + \dfrac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B}$

$$= \frac{\sin B \cos C - \cos B \sin C}{\cos B \cos C} + \frac{\sin C \cos A - \cos C \sin A}{\cos C \cos A} + \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\cos A \cos B}$$

$$= \frac{\sin B \cos C}{\cos B \cos C} - \frac{\cos B \sin C}{\cos B \cos C} + \frac{\sin C \cos A}{\cos C \cos A} - \frac{\cos C \sin A}{\cos C \cos A} + \frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} - \frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}$$

$= \tan B - \tan C + \tan C - \tan A + \tan A - \tan B$

$= 0$

অনুশীলন করুন

1. মান নির্ণয় করুন

   a) $\sin 15^o$ b) $\cos 15^o$ c) $\sin 105^o$ d) $\cos 165^o$

2. A ও B কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি ধনাত্মক ও সুক্ষ্মকোণ হয় এবং যদি $\cos A = \frac{4}{5}$, $\cos B = \frac{3}{5}$ হয় হবে তবে $\sin(A+B)$ এবং $\cos(A+B)$ এর মান নির্ণয় করুন।

3. প্রমাণ করুন

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+A\right) = -\sin A$

b) $\sin(\pi - A) = \sin A$

4. মান নির্ণয় করুন $\sin 28^o32' \sin 88^o32' + \sin 61^o28' \sin 1^o28'$

5. প্রমাণ করুন $\sin(A+45^o) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin A + \cos A)$.

অনুসিদ্ধান্ত ৪ ঃ প্রমাণ করুন $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$.

প্রমাণ ঃ
$$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$
$$= \frac{\sin A\cos B + \cos A\sin B}{\cos A\cos B - \sin A\sin B}$$
$$= \frac{\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B} - \frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B} - \frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}$$
$$= \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{1 - \frac{\sin A}{\cos A}\,\frac{\sin B}{\cos B}}$$
$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$ (Proved)

অনুসিদ্ধান্ত-৫ঃ প্রমাণ করুন $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

উপরের সমীকরণে B এর পরিবর্তে $-B$ বসিয়ে পাই-

$$\tan[A+(-B)] = \frac{\tan A + \tan(-B)}{1 - \tan A\tan(-B)}$$

$$\therefore \tan[A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

উদাহরণ-4 ঃ মান নির্ণয় করুন $\tan 75^o$ ও $\tan 15^o$

$$\tan 75^o = \tan(45^o + 30^o)$$
$$= \frac{\tan 45^o + \tan 30^o}{1 - \tan 45^o \tan 30^o}$$
$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1.\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$\tan 15^o = \tan(45^o - 30^o)$$
$$= \frac{\tan 45^o - \tan 30^o}{1 + \tan 45^o \tan 30^o}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1.\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

উদাহরণ-5 ঃ প্রমাণ করুন $\tan 15^o + \tan 30^o + \tan 15^o \tan 30^o = 1$

সমাধান ঃ $\tan(30^o+15^o) = \dfrac{\tan 30^o+\tan 15^o}{1-\tan 30^o \tan 15^o}$

বা, $\tan 45^o = \dfrac{\tan 30^o+\tan 15^o}{1-\tan 30^o \tan 15^o}$

বা, $1 = \dfrac{\tan 30^o+\tan 15^o}{1-\tan 30^o \tan 15^o}$

বা, $\tan 30^o + \tan 15^o = 1-\tan 30^o \tan 15^o$

বা, $\tan 30^o+\tan 15^o + \tan 30^o \tan 15^o = 1$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ-6 ঃ প্রমাণ করুন $\dfrac{\tan(3\theta-2\phi) + \tan 2\phi}{1-\tan(3\theta-2\phi)\tan 2\phi} = \tan 3\theta$

সমাধান ঃ $\dfrac{\tan(3\theta-2\phi)+\tan 2\phi}{1-\tan(3\theta-2\phi)\tan 2\phi}$

$= \tan [\ (3\theta-2\phi) + 2\phi\ ]$

$= \tan (3\theta-2\phi+2\phi)$

$= \tan 3\theta$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ-7 ঃ প্রমাণ করুন $\cot(A+B) = \dfrac{\cot A \cot B-1}{\cot A+\cot B}$

সমাধান ঃ $\cot(A+B) \quad = \dfrac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}$

$$=\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$$

$$=\frac{\frac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}-\frac{\sin A\sin B}{\sin A\sin B}}{\frac{\sin A\cos B}{\sin A\sin B}+\frac{\cos A\sin B}{\sin A\sin B}}$$

$$=\frac{\frac{\cos A}{\sin A}\cdot\frac{\cos B}{\sin B}-1}{\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos A}{\sin A}}$$

$$=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A} \qquad \text{(Proved)}$$

অনুশীলন করুন

1. মান নির্ণয় করুন

   a) $\tan 105^o$ b) $\cot 165^o$ c) $\tan 165^o$

2. প্রমাণ করুন

   a) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right) . \tan\left(\frac{3\pi}{4}+A\right) = -1$

   b) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) = \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

   c) $\tan 36^o + \tan 9^o + \tan 36^o \tan 9^o = 1.$

   d) $\tan 3A \tan 2A \tan A = \tan 3A - \tan 2A - \tan A$

অনুশীলনী ১৫.২

1. মান নির্ণয় করুন

   a) $\sec 165^o$ b) $\text{cosec } 375^o$ c) $\sin 105^o$

2. মান নির্ণয় করুন

   i) $\cos 17^o 40' \sin 77^o 40' + \cos 107^o 40' \sin 12^o 20'$

   ii) $\frac{\tan 68^o 35' - \cot 66^o 25'}{1+\tan 68^o 35' \cot 66^o 25'}$

3. প্রমাণ করুন

   a) $\sin A \sin(B-C) + \sin B \sin(C-A) + \sin C \sin(A-B) = 0$

   b) $\sin x \sin(x+30^o) + \cos x \sin(x+120^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   c) $\frac{\cot(\alpha+\beta)\cot\alpha+1}{\cot\alpha-\cot(\alpha+\beta)} = \cot\beta$

   d) $\text{cosec }(x-y) = \frac{\sec x \sec y}{\tan x - \tan y}$

   e) $\frac{\cos 8^o+\sin 8^o}{\cos 8^o-\sin 8^o} = \tan 53^o$

   f) $\frac{\sin 75^o+\sin 15^o}{\sin 75^o-\sin 15^o} = \sqrt{3}$

4. যদি $A+B=\frac{\pi}{4}$ হয় তবে দেখান যে $(1+\tan A)(1+\tan B) = 2$
5. যদি $\tan\alpha+\tan\beta = b$, $\cot\alpha+\cot\beta = a$ এবং $\alpha+\beta=\theta$ তবে দেখান যে, $(a-b)\tan\theta = ab$

kJb 3 ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের রূপান্তর (সূত্রের রূপান্তর)

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের গুণফলকে অপর দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের যোগ ও বিয়োগফলে রূপান্তর করতে পারবেন,
- দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের যোগফল বা বিয়োগফলকে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের গুণফলে রূপান্তর করতে পারবেন,
- এতদসংক্রান্ত সমস্যার সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের গুণফলকে অপর দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের যোগফল ও বিয়োগফলে রূপান্তর

পূর্ববর্তী পাঠে প্রমাণিত সূত্র হতে আপনারা জানেন-

$\sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin (A+B)$ - - - - - - - - - (1)

$\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin (A-B)$ - - - - - - - - - (2)

(1) ও (2) নং যোগ করলে পাই,

$$2\sin A \cos B = \sin (A-B) + \sin (A-B)$$

আবার (1) হতে (2) বিয়োগ করলে পাওয়া যায়-

$$2\cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B)$$

আবার, $\cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos (A+B)$ - - - - - - - (3)

এবং $\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos (A-B)$ - - - - - - - -(4)

এখন (3) ও (4) যোগ করলে পাওয়া যায়,

$$2\cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$$

এবং (3) হতে (3) বিয়োগ করলে পাওয়া যায়

$$2\sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B)$$

সুতরাং দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের গুণফলকে অপর দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের যোগফল বা বিয়োগফল রূপে নিম্নলিখিত সূত্রগুলির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়-

$$2\sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B) \text{ - - - - - - (i)}$$
$$2\cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B) \text{ - - - - - - (ii)}$$
$$2\cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B) \text{ - - - - - (iii)}$$
$$2\sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B) \text{ - - - - - - (iv)}$$

সুতরাং (i) ও (ii) নং সূত্র অনুযায়ী একটি sine ও একটি cosine- এর গুণফলকে দুইটি sine এর যোগ ও বিয়োগফলে প্রকাশ করা হয়েছে। (iii) নং সূত্র অনুযায়ী দুইটি cosine এর গুণফলকে দুইটি cosine এর যোগফলে এবং (iv) নং সূত্র অনুযায়ী দুইটি sine এর গুণফলকে দুইটি cosine এর বিয়োগফলে প্রকাশ করা হয়েছে।

দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের যোগফল ও বিয়োগফলে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের গুণফলে রূপান্তর

ধরুন $A+B = C$ এবং $A-B = D$

তাহলে $A = \frac{C+D}{2}$ এবং $B = \frac{C-D}{2}$

তাহলে পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের (i) হতে (ii) নং সূত্রগুলোর A ও B এর স্থলে উপরোক্ত মানগুলো স্থাপন করলে আমরা পাই-

$$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\ \cos\frac{C-D}{2} \text{ - - - - - - - - (v)}$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\ \sin\frac{C-D}{2} \text{ - - - - - - - - (vi)}$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\ \cos\frac{C-D}{2} \text{ - - - - - - - (vii)}$$

$$\cos D - \cos C = 2\sin\frac{C+D}{2}\ \sin\frac{C-D}{2} \text{ - - - - - - - - (viii)}$$

(viii) নং সূত্রকে নিম্নোক্ত ভাবেও প্রকাশ করা যায়-

$$\cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\ \sin\frac{C-D}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C+D}{2}\left(-\sin\frac{C-D}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{C+D}{2}\ \sin\frac{D-C}{2}$$

$$\therefore\ \cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\ \sin\frac{D-C}{2}\ .$$

উদাহরণ-1 ঃ প্রমাণ করুন $\cos 40° + \cos 80° + \cos 160° = 0$

সমাধান ঃ $\cos 40° + \cos 80° + \cos 160°$

$$= \cos 40° + 2\cos\left(\frac{80°+160°}{2}\right)\ \cos\left(\frac{80°-160°}{2}\right)$$

$$= \cos 40° + 2\cos\frac{240°}{2}\ \cos\left(-\frac{80°}{2}\right)$$

$$= \cos 40° + 2\cos 120° \cos 40° \qquad [\because \cos(-\theta) = \cos\theta\ ]$$

$$= \cos 40° + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\ \cos 40°$$

$$= \cos 40° - \cos 40°$$

$$= 0$$

উদাহরণ-2 ঃ প্রমান করুন $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = \frac{3}{16}$

সমাধান ঃ $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\ \sin 20° \sin 40° \sin 80° \qquad \left[\because\ \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\ \sin 20°\ [\ 2\sin 40° \sin 80°\ ]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\ \sin 20°\ [\ \cos(80°-40°) - \cos(80°+40°)\ ]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\ \sin 20°\ [\ \cos 40° - \cos 120°\ ]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\ \sin 20°\left[\ \cos 40° + \frac{1}{2}\right] \quad \left[\because\ \cos 120° = -\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\,[2\sin 20^\circ \cos 40^\circ\,] + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\,[\sin(40^\circ+20^\circ) - \sin(40^\circ-20^\circ)] + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\,[\sin 60^\circ - \sin 20^\circ\,] + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 20^\circ\right] + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{3}{16} - \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ - \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{3}{16}$$

উদাহরণ-3 ঃ প্রমাণ করুন $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15} = 1$

সমাধান ঃ $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}$

$$= 4.2\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\,.\,2\cos\frac{10\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}$$

$$= 4\left[\cos\left(\frac{8\pi}{15}+\frac{2\pi}{15}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{15}-\frac{2\pi}{15}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{14\pi}{15}+\frac{4\pi}{15}\right)+\cos\left(\frac{14\pi}{15}-\frac{4\pi}{15}\right)\right]$$

$$= 4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)\left(\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 4\left(-\frac{1}{2}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)\left(\cos\frac{6\pi}{5}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 4\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{6\pi}{5}+\frac{1}{4}+\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{5}-\frac{1}{2}\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}\right)$$

$$= 4\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{5}-\frac{1}{2}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{6\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\right)\right\}$$

$$= 4\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{5}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{8\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}\right)\right\}$$

$$= 4\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{5}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)\right\}$$

$$= 4\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{5}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{5}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}\right\}$$

$$= 4.\frac{1}{4}$$

$$= 1$$

উদাহরণ-4 ঃ প্রমাণ করুন $\cos 85^\circ + \sin 85^\circ = \sqrt{2}\cos 40^\circ$

সমাধান ঃ $\cos 85^\circ + \sin 85^\circ$

$$= \cos 85^\circ + \sin(90^\circ - 5^\circ)$$

$= \cos 85° + \cos 5°$

$= 2\cos\left(\frac{85°+5°}{2}\right)\cos\left(\frac{85°-5°}{2}\right)$

$= 2\cos 45° \cos 40°$

$= 2.\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 40°$

$= \sqrt{2}\cos 40°$

উদাহরণ-5 ঃ প্রমাণ করুন $\sin 105° + \cos 105° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

সমাধান ঃ $\sin 105° + \cos 105°$

$= \sin 105° + \cos(90°+15°)$

$= \sin 105° - \sin 15°$

$= 2\cos\left(\frac{105°+15°}{2}\right)\sin\left(\frac{105°-15°}{2}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{120°}{2}\right)\sin\left(\frac{90°}{2}\right)$

$= 2\cos 60° \sin 45°$

$= 2.\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

উদাহরণ-6 ঃ প্রমাণ করুন $\frac{\cos A + \cos B}{\cos A - \cos B} = \cot\frac{1}{2}(A+B)\cot\frac{1}{2}(B-A)$

সমাধান ঃ $\frac{\cos A + \cos B}{\cos A - \cos B}$

$= \frac{2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{B-A}{2}\right)}$

$= \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(B-A)}$ $[\because \cos(-\theta) = \cos\theta]$

$= \cot\frac{1}{2}(A+B)\cot\frac{1}{2}(B-A)$

উদাহরণ-7 ঃ প্রমাণ করুন $\sin A - \sin(A-60°) - \sin(A+60°) = 0$

সমাধান ঃ $\sin A - \sin(A-60°) - \sin(A+60°)$

$= \sin A - [\sin(A-60°) + \sin(A+60°)]$

$= \sin A - 2\sin\left(\frac{A-60°+A+60°}{2}\right)\cos\left(\frac{A+60°-A+60°}{2}\right)$

$= \sin A - 2\sin\left(\frac{2A}{2}\right)\cos\left(\frac{120°}{2}\right)$

$= \sin A - 2\sin A \sin 60°$

$= \sin A - 2\sin A \,.\, \frac{1}{2}$

$= \sin A - \sin A$

$= 0$

উদাহরণ- 8 ঃ প্রমাণ করুন $\cos A \sin(30°+A)\sin(30°-A) = \frac{1}{4}\cos 3A$.

সমাধান ঃ $\cos A \sin(30°+A)\sin(30°-A)$

$= \cos A \,.\, \frac{1}{2}\{2\sin(30°+A)\sin(30°-A)\}$

$= \frac{1}{2}\cos A\{\cos(30°+A-30°+A) - \cos(30°+A+30°-A)\}$

$= \frac{1}{2}\cos A(\cos 2A - \cos 60°)$

$= \frac{1}{2}\cos A\left(\cos 2A - \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\cos 2A\cos A - \frac{1}{4}\cos A$

$= \frac{1}{4}(2\cos 2A\cos A) - \frac{1}{2}\cos A$

$= \frac{1}{4}(\cos 3A + \cos A) - \frac{1}{4}\cos A$

$= \frac{1}{4}\cos 3A + \frac{1}{4}\cos A - \frac{1}{4}\cos A$

$= \frac{1}{4}\cos 3A.$

উদাহরণ-9 ঃ প্রমাণ করুন $\cot(A+15°) - \tan(A-15°) = \frac{4\cos 2A}{2\sin 2A + 1}$

সমাধান ঃ ধরুন $\theta = A+15°$ এবং $\phi = A-15°$

$\therefore\ \theta+\phi = 2A$ এবং $\theta-\phi = 30°$

এখন $\cot(A+15°) - \tan(A-15°)$

$= \cot\theta - \tan\phi$

$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\phi}{\cos\phi}$

$= \frac{\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi}{\sin\theta\cos\phi}$

$= \frac{\cos(\theta+\phi)}{\sin\theta\cos\phi}$

$= \frac{2\cos(\theta+\phi)}{2\sin\theta\cos\phi}$

$= \frac{2\cos(\theta+\phi)}{\sin(\theta+\phi) + \sin(\theta-\phi)}$

$= \frac{2\cos 2A}{\sin 2A + \sin 30°}$

$= \frac{2\cos 2A}{\sin 2A + \frac{1}{2}}$

$$= \frac{4\cos 2A}{2\sin 2A+1}$$

উদাহরণ-10 ঃ যদি $n\sin\beta = m\sin(2\alpha+\beta)$ হয় তবে দেখান যে, $\cot(\alpha+\beta) = \frac{n-m}{n+m}\cot\alpha$

সমাধান ঃ $n\sin\beta = m\sin\ (2\alpha+\beta)$

বা, $\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)} = \frac{m}{n}$

বিয়োজন যোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই-

$$\frac{\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta} = \frac{n-m}{n+m}$$

বা, $\frac{2\cos\left(\frac{2\alpha+\beta+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{2\alpha+\beta-\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{2\alpha+\beta+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+\beta-\beta}{2}\right)} = \frac{n-m}{n+m}$

বা, $\frac{\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha} = \frac{n-m}{n+m}$

বা, $\cot(\alpha+\beta)\tan\alpha = \frac{n-m}{n+m}$

বা, $\cot(\alpha+\beta) = \frac{n-m}{n+m}\cdot\frac{1}{\tan\alpha}$

বা, $\cot(\alpha+\beta) = \frac{n-m}{n+m}\ \cot\alpha.$

উদাহরণ-11 ঃ যদি $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$ হয়, তবে দেখান যে, $A+B = \frac{\pi}{2}$

সমাধান ঃ $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$

বা, $\sin A - \sin B = \cos B - \cos A$

বা, $2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

বা, $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$

বা, $\frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)} = 1$

বা, $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\therefore A+B = \frac{\pi}{2}$

উদাহরণ-12 ঃ যদি $\sin x + \sin y = a$ এবং $\cos x + \cos y = b$ হয় তবে দেখান যে,

$$\sin\frac{1}{2}(x-y) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2-b^2}$$

সমাধান ঃ $\sin x + \sin y = a$

বা, $2\sin\frac{1}{2}(x+y)\ \cos\frac{1}{2}(x-y) = a$ - - - - - - - (1)

আবার, $\cos x + \cos y = b$

বা, $2\cos\frac{1}{2}(x+y)\ \cos\frac{1}{2}(x-y) = b$ - - - - - - - (2)

(1) ও (2) নং কে বর্গ ও পরে যোগ করে পাই-

$4\cos^2\frac{1}{2}(x-y)\left\{\sin^2\frac{1}{2}(x+y)+\cos^2\frac{1}{2}(x+y)\right\} = a^2+b^2$

বা, $4\cos^2\frac{1}{2}(x-y)\ .\ 1 = a^2+b^2$

বা, $4\left\{1-\sin^2\frac{1}{2}(x-y)\right\} = a^2+b^2$

বা, $4-4\sin^2\frac{1}{2}(x-y) = a^2+b^2$

বা, $4\sin^2\frac{1}{2}(x-y) = 4-a^2-b^2$

বা, $\sin^2\frac{1}{2}(x-y) = \frac{1}{4}(4-a^2-b^2)$

$\therefore\ \sin\frac{1}{2}(x-y) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2-b^2}$

উদাহরণ-13 ঃ যদি $\alpha+\beta=\theta$ এবং $\cos\alpha = k\cos\beta$ হয় তবে দেখান যে, $\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{1-k}{1+k}\cot\frac{1}{2}\theta$.

সমাধান ঃ $\cos\alpha = k\cos\beta$

বা, $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{1}{k}$

বিয়োজন যোজন প্রক্রিয়ায় পাই-

$\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\beta+\cos\alpha} = \frac{1-k}{1+k}$

বা, $\frac{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\ \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \frac{1-k}{1+k}$

বা, $\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ \tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{1-k}{1+k}$

বা, $\tan\frac{1}{2}\theta\ \tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{1-k}{1+k}$

বা, $\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{1}{\tan\frac{1}{2}\theta}$

বা, $\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{1-k}{1+k}\cot\frac{1}{2}\theta$.

উদাহরণ-14 ঃ যদি $a\cos\alpha+b\sin\alpha = a\cos\beta+b\sin\beta$ হয় তবে দেখান যে,

$$\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

সমাধান ঃ $a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\beta + b\sin\beta$

বা, $b\sin\alpha - b\sin\beta = a\cos\beta - a\cos\alpha$

বা, $b(\sin\alpha-\sin\beta) = a(\cos\beta-\cos\alpha)$

বা, $\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \dfrac{a}{b}$

বা, $\dfrac{2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \dfrac{a}{b}$

বা, $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \dfrac{a}{b}$

বা, $\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \dfrac{a^2}{b^2}$

বা, $\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ [বিয়োজন যোজন করে]

বা, $\cos^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

অনুশীলনী ১৫.৩

প্রমাণ করুন

1. $\sin 50° - \sin 70° + \sin 10° = 0$
2. $\cos 20° + \cos 100° + \cos 140° = 0$
3. $\cos 70° - \cos 10° + \cos 40° = 0$
4. $\cos(60° - x) + \cos(60° + x) - \cos x = 0$
5. $\sin\theta \sin(60° - \theta)\sin(60° + \theta) = \dfrac{1}{4}\sin 3\theta$
6. $\sin(45° + \theta)\sin(45° - \theta) = \dfrac{1}{2}\cos 2\theta$
7. $\cos 10° \cos 50° \cos 70° = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$
8. $\cos 20° \cos 40° \cos 60° \cos 80° = \dfrac{1}{16}$
9. $\tan 20° \tan 40° \tan 80° = \sqrt{3}$
10. $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \tan 3\alpha$
11. $\dfrac{\cos 2A + \cos 5A + \cos A}{\sin 2A + \sin 5A - \sin A} = \cot 2A.$
12. $\dfrac{\sin(A-B) + \sin A + \sin(A+B)}{\sin(C-B) + \sin C + \sin(C+B)} = \dfrac{\sin A}{\sin C}$
13. i) $\sin 18° + \cos 18° = \sqrt{2}\cos 27°$

    ii) $\sin 55° + \cos 55° = \sqrt{2}\cos 10°$

iii) $\sin 75° + \cos 75° = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

14. $\tan 70° = \tan 20° + 2\tan 50°$

15. $\dfrac{\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta}{\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta} = \tan 3\theta$

16. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) - 2\sin\alpha + \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha + \cos(\alpha-\beta)} = \tan\alpha$

17. যদি $\sin\theta + \sin\phi = \sqrt{3}(\cos\phi - \cos\theta)$ হয় তবে দেখান যে, $\cos^2\frac{1}{2}(\theta-\phi) = \frac{3}{4}$

18. যদি $\sin A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sin B = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে,

$\tan\frac{1}{2}(A+B)\ \cot\frac{1}{2}(A-B) = 5+2\sqrt{6}$.

19. দেখান যে, $\sec\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)\ \sec\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right) = 2\sec 2\theta$.

20. দেখান যে, $\tan\left(\dfrac{45°+\theta}{2}\right)\ \tan\left(\dfrac{45°-\theta}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}\cos\theta-1}{\sqrt{2}\cos\theta+1}$

21. যদি $\sin x = m\sin y$ হয় তবে দেখান যে, $\tan\frac{1}{2}(x-y) = \dfrac{m-1}{m+1}\ \tan\frac{1}{2}(x+y)$.

22. যদি $\sin x - \sin y = \dfrac{3}{5}$ এবং $\cos y - \cos x = \dfrac{1}{5}$ হয় তবে দেখান যে, $\cos\frac{1}{2}(x+y) = 3$.

23. যদি $x\cos\alpha + y\sin\alpha = k = x\cos\beta + y\sin\beta$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে,

$$\frac{x}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{y}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{k}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

24. দেখান যে, $2\cos\dfrac{\pi}{13}\ \cos\dfrac{9\pi}{13} + \cos\dfrac{3\pi}{13} + \cos\dfrac{5\pi}{13} = 0$.

25. যদি $\operatorname{cosec} A + \sec A = \operatorname{cosec} B + \sec B$ হয় তবে দেখান যে, $\tan A\ \tan B = \cot\frac{1}{2}(A+B)$

26. যদি $\sin\theta + \sin\phi = a$ এবং $\cos\theta + \cos\phi = b$ হয় তবে দেখান যে,

$\tan\dfrac{\theta-\phi}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$

27. প্রমাণ করুন যে, $\left(\dfrac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}\right)^n + \left(\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}\right)^n = 2\cot^n\dfrac{A-B}{2}$

28. যদি $A+B+C = \pi$ এবং $\sin\left(A+\dfrac{C}{2}\right) = n\sin\dfrac{C}{2}$ হয় তবে দেখান যে,

$\tan\dfrac{A}{2}\ \tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{n-1}{n+1}$

kJb 4 গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- গুণিতক কোণ সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন,
- এতদসংক্রান্ত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

গুণিতক কোণ (Multiple Angle)

কোন কোণকে একটি অখন্ড সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে যে কোণ পাওয়া যায় তাকে মূল কোণের গুণিতক কোণ বলে। যেমন, $2A$, $3A$, $4A$ ইত্যাদি কোণ A কোণের গুণিতক কোণ। এই পাঠে $2A$, $3A$ প্রভৃতি গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোকে মূল কোণ A এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করা হবে।

$2A$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

আপনারা জানেন,

$$\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

প্রথম সূত্রে B এর স্থলে A স্থাপন করে পাই-

$$\sin (A+A) = \sin A \cos A + \cos A \sin A$$

বা, $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$ - - - - - - - (1)

আবার দ্বিতীয় সূত্রে B এর স্থলে A স্থাপন করে পাওয়া যায়-

$$\cos (A+A) = \cos A . \cos A - \sin A \sin A$$

বা, $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ - - - - - - (2)

বা, $\cos 2A = 1 - \sin^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$ - - - - - - (3)

আবার, $\cos 2A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) = \cos^2 A - 1 + \cos^2 A = 2\cos^2 A - 1$ - - - - - (4)

এখন (3) ও (4) এর পক্ষ পরিবর্তন করলে পাওয়া যায়-

$1 - \cos 2A = 2\sin^2 A$ - - - - - - - (5)

এবং $1 + \cos 2A = 2\cos^2 A$ - - - - - - -(6)

(5) কে (6) দ্বারা ভাগ করলে পাওয়া যায়-

$$\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \tan^2 A \text{ - - - - - (7)}$$

আবার আপনারা জানেন

$$\tan (A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

এখন B এর স্থলে A স্থাপন করলে পাওয়া যায়-

$$\tan (A+A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A}$$

বা, $\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$ - - - - - - (8)

আবার, $\cot (A + B) = \dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$ সূত্রে $B = A$ বসিয়ে পাই

$$\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A} \text{ - - - - - - - - - (9)}$$

$3A$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

$$\sin 3A = \sin (2A+A)$$
$$= \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A$$

$= 2\sin A\cos A\cos A + (1 - 2\sin^2 A)\sin A$

$= 2\sin A\cos^2 A + \sin A - 2\sin^3 A$

$= 2\sin A(1 - \sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A$

$= 2\sin A - 2\sin^3 A + \sin A - 2\sin^3 A$

$= 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\therefore \quad \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A.$

$\cos 3A = \cos(A + 2A)$

$= \cos 2A\cos A - \sin 2A\sin A$

$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin A\cos A\sin A$

$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A\sin^2 A$

$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A(1 - \cos^2 A)$

$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A + 2\cos^3 A$

$= 4\cos^3 A - 3\cos A$

$\therefore \quad \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A.$

$\tan 3A = \tan(2A + A)$

$$= \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A\tan A}$$

$$= \frac{\dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}\cdot\tan A}$$

$$= \frac{\dfrac{2\tan A + \tan A - \tan^3 A}{1 - \tan^2 A}}{\dfrac{1 - \tan^2 A - 2\tan^2 A}{1 - \tan^2 A}}$$

$$= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

$\sin 2A$ এবং $\cos 2A$ অনুপাতকে $\tan A$ অনুপাতে প্রকাশ

$\sin 2A = 2\sin A\cos A$

$= \dfrac{2\sin A}{\cos A}\cdot\cos^2 A$

$= 2\tan A\cdot\dfrac{1}{\sec^2 A}$

$= \dfrac{2\tan A}{\sec^2 A}$

$= \dfrac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$

$\therefore \sin 2A = \dfrac{\tan A}{1 + \tan^2 A}$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$= \cos^2 A\left(1 - \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)$

$= \dfrac{1}{\sec^2 A}(1 - \tan^2 A)$

$$= \frac{1 - \tan^2 A}{\sec^2 A}$$

$$= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\therefore \cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

সূত্র $\sin 2A = 2\sin A \cos A$

$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$

$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

$\cot 2A = \dfrac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}$

$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

উদাহরণ-1 ঃ প্রমাণ করুন $\dfrac{1 - \cos 2\theta + \sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta + \sin 2\theta} = \tan\theta.$

সমাধান ঃ $\dfrac{1 - \cos 2\theta + \sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta + \sin 2\theta}$

$$= \frac{2\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin\theta(\sin\theta + \cos\theta)}{2\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta)}$$

$$= \tan\theta.$$

উদাহরণ-2 ঃ প্রমাণ করুন $\sin^2 x \tan^2 x = \dfrac{4\tan^2 x}{1 - \tan^4 x}$

সমাধান ঃ $\sin^2 x \tan^2 x$

$$= \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} \cdot \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$= \frac{4\tan^2 x}{1 - \tan^4 x}$$

উদাহরণ-3 ঃ প্রমাণ করুন $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$

সমাধান ঃ $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$

$$= \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{4\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{4(\cos 60^\circ \cos 10^\circ - \sin 60^\circ \sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ}$$ [$\because \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ এবং $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$]

$$= \frac{4\cos(60^\circ + 10^\circ)}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{4\cos 70°}{\sin 20°}$$

$$= \frac{4\cos(90° - 20°)}{\sin 20°}$$

$$= \frac{4\sin 20°}{\sin 20°}$$

$$= 4$$

উদাহরণ-4 ঃ প্রমাণ করুন $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$.

সমাধান ঃ $\cos 5\theta$

$= \cos(4\theta + \theta)$

$= \cos 4\theta \cos\theta - \sin 4\theta . \sin\theta$

$= (2\cos^2 2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin 2\theta \cos 2\theta \sin\theta$

$= \left\{2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1\right\} \cos\theta - 2.2\sin\theta\cos\theta\,(2\cos^2\theta - 1)\sin\theta$

$= \{2(4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1) - 1\}\cos\theta - 4\cos\theta\,(2\cos^2\theta - 1)\sin^2\theta$

$= (8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 2 - 1)\cos\theta - (8\cos^3\theta - 4\cos\theta)(1 - \cos^2\theta)$

$= (8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1)\cos\theta - (8\cos^3\theta - 4\cos\theta - 8\cos^5\theta + 4\cos^3\theta)$

$= 8\cos^5\theta - 8\cos^3\theta + \cos\theta - 8\cos^3\theta + 4\cos\theta + 8\cos^5\theta - 4\cos^3\theta$

$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

উদাহরণ-5 ঃ প্রমাণ করুন $\dfrac{\sin 3A}{\sin 3A - \sin A} = 2\cos A + 1$

সমাধান ঃ $\dfrac{\sin 3A}{\sin 2A - \sin A}$

$$= \frac{3\sin A - 4\sin^3 A}{2\sin A\cos A - \sin A}$$

$$= \frac{\sin A(3 - 4\sin^2 A)}{\sin A(2\cos A - 1)}$$

$$= \frac{3 - 4(1 - \cos^2 A)}{2\cos A - 1}$$

$$= \frac{3 - 4 + 4\cos^2 A}{2\cos A - 1}$$

$$= \frac{4\cos^2 A - 1}{2\cos A - 1}$$

$$= \frac{(2\cos A - 1)(2\cos A + 1)}{2\cos A - 1}$$

$$= 2\cos A + 1.$$

উদাহরণ-6 ঃ যদি $\tan\theta = \frac{1}{2}$ হয় দেখান যে, $10\sin 2\theta - 6\tan 2\theta + 5\cos 2\theta = 3$

সমাধান ঃ $10\sin 2\theta - 6\tan 2\theta + 5\cos 2\theta$

$$= 10.\frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} - 6.\frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} + 5.\frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$$

$$= 10.\frac{2\infty\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} - 6.\frac{2\infty\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} + 5\,\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}$$

$$= 10\infty\frac{4}{5} - 6\infty\frac{4}{3} + 5\infty\frac{3}{5}$$

$$= 8 - 8 + 3$$

$$= 3$$

উদাহরণ-7 ঃ প্রমাণ করুন $\cos^3 A \cos 3A + \sin^3 A \sin 3A = \cos^3 2A$

সমাধান ঃ $\cos^3 A \cos 3A + \sin^3 A \sin 3A$

$$= \frac{1}{4}(\cos 3A + 3\cos A)\cos 3A + \frac{1}{4}(3\sin A - \sin 3A)\sin 3A$$

$$= \frac{1}{4}(\cos^2 3A - \sin^2 3A) + \frac{3}{4}(\cos 3A \cos A - \sin 3A \sin A)$$

$$= \frac{1}{4}\cos 6A + \frac{3}{4}\cos(3A - A)$$

$$= \frac{1}{4}\cos 6A + \frac{3}{4}\cos 2A$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 6A + 3\cos 2A)$$

$$= \cos^3 2A$$

[দ্রষ্টব্য ঃ যেহেতু $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A \quad \therefore \quad \cos^3 A = \frac{\cos 3A + 3\cos A}{4}$

এবং $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A \quad \therefore \quad \sin^3 A = \frac{3\sin A - \sin 3A}{4}$

এবং $\cos^3 2A = \frac{\cos 3.2A + 3\cos 2A}{4} = \frac{1}{4}(\cos 6A + 3\cos 2A)$]

উদাহরণ-8 ঃ প্রমাণ করুন $\frac{\sin\alpha - \sqrt{1+\sin 2\alpha}}{\cos\alpha - \sqrt{1+\sin 2\alpha}} = \cot\alpha$, α ধনাত্মক ও সূক্ষ্মকোণ এবং বর্গমূলের চিহ্ন ধনাত্মক।

সমাধান ঃ $\frac{\sin\alpha - \sqrt{1+\sin 2\alpha}}{\cos\alpha - \sqrt{1+\sin 2\alpha}}$

$$= \frac{\sin\alpha - \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}}{\cos\alpha - \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}}$$

$$= \frac{\sin\alpha - \sqrt{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}}{\cos\alpha - \sqrt{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}}$$

$$= \frac{\sin\alpha - \sin\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha - \cos\alpha}$$

$$= \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}$$

$$= \cot\alpha$$

উদাহরণ-9 ঃ প্রমাণ করুন $\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta} = \tan(\alpha+\beta)$

সমাধান ঃ $\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta}$

$$= \frac{2\sin^2\alpha - 2\sin^2\beta}{2\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin\beta\cos\beta}$$

$$= \frac{(1-\cos 2\alpha) - (1-\cos 2\beta)}{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}$$

$$= \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}(2\alpha+2\beta)\sin\frac{1}{2}(2\alpha-2\beta)}{2\cos\frac{1}{2}(2\alpha+2\beta)\sin\frac{1}{2}(2\alpha-2\beta)}$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \tan(\alpha+\beta)$$

উদাহরণ-10 ঃ প্রমাণ করুন $\frac{\sin 8\theta}{\cos 4\theta} \cdot \frac{1-\cos 4\theta}{1-\cos 8\theta} = \tan 2\theta.$

সমাধান ঃ $\frac{\sin 8\theta}{\cos 4\theta} \cdot \frac{1-\cos 4\theta}{1-\cos 8\theta}$

$$= \frac{2\sin 4\theta\cos 4\theta}{\cos 4\theta} \cdot \frac{2\sin^2 2\theta}{2\sin^2 4\theta}$$

$$= \frac{2\sin^2 2\theta}{\sin 4\theta}$$

$$= \frac{2\sin^2 2\theta}{2\sin 2\theta\cos 2\theta}$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta.$$

উদাহরণ-11 ঃ প্রমাণ করুন $\cos^3 x + \cos^3(60° - x) + \cos^3(60° + x) = \frac{1}{4}(6\cos x - \cos 3x)$

সমাধান ঃ $\cos^3 x + \cos^3(60° - x) + \cos^3(60° + x)$

$$= \frac{1}{4}[4\cos^3 x + 4\cos^3(60° - x) + 4\cos^3(60° + x)]$$

$$= \frac{1}{4}[3\cos x + \cos 3x + 3\cos(60° - x) + \cos 3(60° - x) + 3\cos(60° + x) + \cos 3(60° + x)]$$

$$= \frac{1}{4}[3\cos x + \cos 3x + 3\{\cos(60° + x) + \cos(60° - x)\} + \cos(180° - 3x) + \cos(180° + 3x)]$$

$$= \frac{1}{4}\left[3\cos x + \cos 3x + 3.2\cos\left(\frac{60° + x + 60° x}{2}\right)\cos\left(\frac{60° + x - 60° + x}{2}\right) - \cos 3x - \cos 3x\right]$$

$$= \frac{1}{4}[3\cos x + \cos 3x + 6\cos x\cos 60° - \cos 3x - \cos 3x]$$

$$= \frac{1}{4}\left[3\cos x + \cos 3x + 6\cos x.\frac{1}{2} - \cos 3x - \cos 3x\right]$$

$$= \frac{1}{4}[6\cos x - \cos 3x]$$

উদাহরণ-12 ঃ যদি α ও β ধনাত্মক ও সূক্ষ্মকোণ এবং $\cos 2\alpha = \frac{3\cos 2\beta - 1}{3 - \cos 2\beta}$ হয় তবে দেখান যে,

$\tan \alpha = \sqrt{2}\ \tan \beta.$

সমাধান ঃ $\tan \theta = \sqrt{\tan^2\alpha}$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{3\cos 2\beta - 1}{3 - \cos 2\beta}}{1 + \frac{3\cos 2\beta - 1}{3 - \cos 2\beta}}}$$

$$= \sqrt{\frac{3 - \cos 2\beta - 3\cos 2\beta + 1}{3 - \cos 2\beta + 3\cos 2\beta - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{4 - 4\cos 2\beta}{2 + 2\cos 2\beta}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(1 - \cos 2\beta)}{1 + \cos 2\beta}}$$

$$= \sqrt{2\tan^2\beta} = \sqrt{2}\ \tan\beta.$$

উদাহরণ-13 ঃ যদি $\tan^2\theta = 1 + 2\tan^2\phi$ হয়, তবে দেখান যে, $\cos 2\phi = 1 + 2\cos 2\theta$.

সমাধান ঃ $\tan^2\theta = 1 + 2\tan^2\phi$

$\therefore\ \tan^2\phi = \frac{1}{2}\ (\tan^2\theta - 1)$

এখন $\cos 2\phi\theta = \frac{1 - \tan^2\phi}{1 + \tan^2\phi}$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2}(\tan^2\theta - 1)}{1 + \frac{1}{2}(\tan^2\theta - 1)}$$

$$= \frac{2 - \tan^2\theta + 1}{2 + \tan^2\theta - 1}$$

$$= \frac{(1 + \tan^2\phi) + 2(1 - \tan^2\theta)}{1 + \tan^2\theta}$$

$$= 1 + 2\,\frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$$

$$= 1 + 2\cos 2\theta$$

উদাহরণ-14 ঃ যদি $\tan\alpha = 2\tan\beta$ হয় তবে দেখান যে, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{3\sin 2\alpha}{1 + 3\cos 2\alpha}$

সমাধান ঃ $\tan\alpha = 2\tan\beta$

$\therefore\ \tan\beta = \frac{1}{2}\ \tan\alpha.$

এখন $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$$= \frac{\tan\alpha + \frac{1}{2}\tan\alpha}{1 - \tan\alpha.\frac{1}{2}\tan\alpha}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\tan\alpha}{1 - \frac{1}{2}\tan^2\alpha}$$

$$= \frac{3\tan\alpha}{2 - \tan^2\alpha}$$

$$= \frac{3\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{2 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$= \frac{3.2\sin\alpha\cos\alpha}{4\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{3\sin2\alpha}{4 - 4\sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{3\sin2\alpha}{4 - 6\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{3\sin2\alpha}{1 + 3(1 - 2\sin^2\alpha)}$$

$$= \frac{3\sin2\alpha}{1 + 3\cos2\alpha}$$

উদাহরণ-15 ঃ যদি $\cos A + \cos B + \cos C = 0$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 12 \cos A \cos B \cos C$

সমাধান ঃ $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C$

$= 4\cos^3 A - 3\cos A + 4\cos^3 B - 3\cos B + 4\cos^3 C - 3\cos C$

$= 4(\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C) - 3(\cos A + \cos B + \cos C)$

$= 4(\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C)$

$= 4(\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C - 3\cos A\cos B\cos C) + 12\cos A\cos B\cos C$

$= 4\{(\cos A + \cos B + \cos C)(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - \cos A\cos B - \cos B\cos C - \cos C\cos A)\} + 12\cos A\cos B\cos C$

$= 12\cos A\cos B\cos C$

অনুশীলনী ১৫.৪

প্রমাণ করুন

1. $\dfrac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \tan \theta.$

2. $\tan A + \cot A = 2\operatorname{cosec} A.$

3. $\cot A - \tan A = 2\cot 2A.$

4. $\dfrac{2\sec 2\theta}{1 + \sec 2\theta} = \sec^2 \theta.$

5. $\cos nA \cos (n + 2)A - \cos^2(n + 1)A + \sin^2 A = 0$

6. $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta$

7. $\tan \theta (1 + \sec 2\theta) = \tan 2\theta$

8. $\dfrac{\sin A + \cos A}{\cos A - \sin A} + \dfrac{\sin A - \cos A}{\cos A + \sin A} = 2 \tan 2A.$

9. $\sin 2x \tan 2x = \dfrac{4\tan^2 x}{1 - \tan^4 x}$

10. $\dfrac{\cos^3\theta + \sin^3\theta}{\cos \theta + \sin\theta} = 1 - \dfrac{1}{2} \sin 2\theta.$

11. $\dfrac{\tan^2(\theta + \frac{\pi}{4}) - 1}{\tan^2(\theta - \frac{\pi}{4}) + 1} = \sin 2\theta$

12. $\sin 5\theta = 10 \sin^5\theta - 20 \sin^3\theta + 5 \sin\theta$

13. $\dfrac{3 \sin x - \sin 3x}{3 \cos x + \cos 3x} = \tan^3 x$

14. $\cos^6\theta - \sin^6\theta = \cos 2\theta \left(1 - \dfrac{1}{4} \sin^2 2\theta\right)$

15. $\cos^6 \theta + \sin^6 \theta = \dfrac{1}{4} (1 + 3\cos^2 2\theta)$

16. $\tan 2A = (\sec 2A + 1) \sqrt{\sec^2 A - 1}$

17. i) $\sin 8\theta = 8 \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta \cos 4\theta.$

    ii) $\sin^3 2\theta = 2^5 \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta \cos 2^2 \theta \cos 2^3 \theta \cos 2^4 \theta.$

18. i) $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ যখন $i = \sqrt{-1}$

    ii) $(\cos \theta - i \sin\theta)^3 = \cos 3\theta - i \sin 3\theta$ যখন $i = \sqrt{-1}$

19. $\tan 3\theta - \tan 2\theta - \tan \theta = \tan 3\theta \tan 2\theta \tan \theta$

20. $\cos (120° - A) + \cos A + \cos (120° + A) = 0.$

21. $\dfrac{\cos (45° + A)}{\cos (45° - A)} = \sec 2A - \tan 2A.$

22. $\tan (45° + A) + \tan (45° - A) = 2 \sec 2A.$

23. $\tan A \tan (60° + A) \tan (120° + A) = -\tan 3A$

24. $\cos^2 (A - 120°) + \cos^2 A + \cos^2 (A + 120°) = \dfrac{3}{2}$

25. $\sin^3 x + \sin^3(120° + x) + \sin^3(240° + x) = -\frac{3}{4}\sin 3x.$

26. $\sec x = \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4x}}}$

27. i) $\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta$

ii) $\cos^2(\alpha-\beta) - \sin^2(\alpha+\beta) = \cos 2\alpha \cos 2\beta$

28. $\tan\theta + 2\tan 2\theta + 4\tan 4\theta + 8\tan 8\theta = \cot\theta.$

29. যদি $2\tan\alpha = 3\tan\beta$ হয় তবে দেখান যে $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\sin 2\beta}{5-\cos 2\beta}$

30. যদি $\cos\theta = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{1}{\alpha})$ হয় তবে দেখান যে,

i) $\cos 2\theta = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2})$

ii) $\cos 4\theta = \frac{1}{2}(\alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4})$

31. যদি $\dfrac{\tan(\alpha+\beta-\gamma)}{\tan(\alpha-\beta+\gamma)} = \dfrac{\tan\gamma}{\tan\beta}$ হয়, তবে দেখান যে, হয় $\sin(\beta-\gamma) = 0$

অথবা, $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0$

32. যদি $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ হয় তবে দেখান যে,

i) $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} = \dfrac{2\cos\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$

ii) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}} - \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}} = \dfrac{2\sin^2\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$

33. যদি $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ হয় তবে দেখান যে, $\sin 4\alpha = \dfrac{4ab(b^2-a^2)}{(b^2+a^2)^2}$

kJb 5 উপ-গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- উপ-গুণিতক কোণ সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- উপ-গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন,
- এতদসংক্রান্ত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

উপ-গুণিতক কোণ

$\frac{A}{2}, \frac{A}{3}, \frac{A}{4}$ ইত্যাদি কোণকে A কোণের উপ-গুণিতক কোণ বলে। এই পাঠে $\frac{A}{2}, \frac{A}{3}$ প্রভৃতি উপ-গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে মূল কোণ A এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করা হবে।

θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে $\frac{\theta}{2}$ এবং $\frac{\theta}{3}$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ

আমরা জানি,

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$

$1 + \cos 2A = 2\cos^2 A$

$1 - \cos 2A = 2\sin^2 A$

$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

$\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$

$\cos 2A = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

উপরের সূত্রগুলোতে A এর পরিবর্তে $\frac{\theta}{2}$ বসালে পাওয়া যায়-

$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$\tan\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}$

$\sin\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}$

$\cos\theta = \dfrac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}$

আবার, $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

উপরের সূত্র তিনটিতে A এর পরিবর্তে $\frac{\theta}{3}$ বসালে পাওয়া যায়

$\sin\theta = 3\sin\frac{\theta}{3} - 4\sin^3\frac{\theta}{3}$

$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$

$$\tan\theta = \frac{3\tan\frac{\theta}{3} - \tan^3\frac{\theta}{3}}{1 - 3\tan^2\frac{\theta}{3}}$$

$\sin\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ এবং $\tan\frac{\theta}{2}$ অনুপাতসমূহকে $\cos\theta$ অনুপাতে প্রকাশ

আমরা জানি,

$2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$ - - - - - - - - - - - - - - - (1)

এবং $2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta$ - - - - - - - - - - - - - - - (2)

(1) ও (2) নং থেকে পাই,

$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\theta)}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\theta)}$

$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$

চিহ্নের দ্ব্যর্থকতার ব্যাখ্যা

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের কোন নির্দিষ্ট মানের জন্য কোণের একাধিক মান পাওয়া যায়। ফলে, $\frac{\theta}{2}$ এর একাধিক মান হতে পারে এবং $\frac{\theta}{2}$ কোণটি চারটি চতুর্ভাগের যে কোনটিতে অবস্থিত হতে পারে। $\sin\frac{\theta}{2}$ এবং $\cos\frac{\theta}{2}$ এর চিহ্ন ধনাত্মক না ঋণাত্মক হবে তা চতুর্ভাগগুলোতে $\frac{\theta}{2}$ এর অবস্থানের উপর নির্ভর করে। অতএব, θ কোণের মান দেয়া থাকলে, $\frac{\theta}{2}$ কোন্ চতুর্ভাগে অবস্থান করবে তা নির্ণয় করা যাবে এবং তখন $\sin\frac{\theta}{2}$ এবং $\cos\frac{\theta}{2}$ এর সঠিক চিহ্ন নির্ণয় করা সম্ভব হবে। নিচের উদাহরণ থেকে বিষয়টি পরিষ্কার বুঝা যাবে।

উদাহরণ-1 ঃ $\sin 22\frac{1}{2}^\circ$ ও $\cos 22\frac{1}{2}^\circ$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে $\frac{\theta}{2} = 22\frac{1}{2}^\circ$;

$22\frac{1}{2}^\circ$ কোণের জন্য সাইন (sine) এবং কোসাইন (cosine) উভয়ই ধনাত্মক।

অতএব, $\sin 22\frac{1°}{2} = +\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 45°)}$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

আবার $\cos 22\frac{1°}{2} = +\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 45°)}$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$\sin\frac{\theta}{2}$ ও $\cos\frac{\theta}{2}$ অনুপাতসমূহকে $\sin\theta$ অনুপাতের প্রকাশ

আমরা জানি, $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ এবং $\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} = 1$

তাহলে, $1+\sin\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$

এবং $1-\sin\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$

অতএব, $\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{1+\sin\theta}$ ----------- (1)

$\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{1-\sin\theta}$ ----------- (2)

(1) ও (2) যোগ করে পাওয়া যায়-

$\therefore \quad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\theta} \pm\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\theta}$

এবং (1) হতে (2) বিয়োগ করে পাওয়া যায়-

$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\theta} \pm\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\theta}$

চিহ্নের দ্ব্যার্থকতার ব্যাখ্যা ঃ

$\sin\theta$– এর কোন নির্দিষ্ট মানের জন্য θ কোণের একাধিক মান হতে পারে। অতএব, $\frac{\theta}{2}$ চতুর্ভাগগুলোর যে কোনটিতে অবস্থিত হতে পারে। θ– এর মান জানা থাকলে $\sin\frac{\theta}{2}$ ও $\cos\frac{\theta}{2}$ এর মান নির্ণয় করে $\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}$ এবং $\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}$ এর সঠিক চিহ্ন নির্ণয় করা যাবে।

অথবা, $\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{2}\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$

এবং $\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{2}\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$\theta-$ এর মান জানা থাকলে, উপরের অভেদ দুটিতে $\theta-$ এর মান স্থাপন করে $\cos\frac{\theta}{2}$ এবং $\sin\frac{\theta}{2}$ অনুপাত দুটির সঠিক চিহ্নসহ মান নির্ণয় করা সহজ হয়।

উদাহরণ-2 ঃ sin15° ও cos15° এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\cos15° + \sin15° = +\sqrt{1+\sin30°} = \sqrt{1+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$\cos15° - \sin15° = +\sqrt{1-\sin30°} = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ যোগ করে পাই $\cos15° = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

এবং বিয়োগ করে পাই, $\sin15° = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

উদাহরণ-3 ঃ sin75° এবং cos75° এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\cos75° + \sin75° = +\sqrt{1+\sin150°} = \sqrt{1+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

[$\because \cos75° + \sin75° = \sqrt{2}\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+75°\right)$ = ধনাত্মক]

$\cos75° - \sin75° = -\sqrt{1-\sin150°} = -\sqrt{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

[$\because \cos75° - \sin75° = \sqrt{2}\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-75°\right)$ = ঋণাত্মক]

এখন যোগ ও বিয়োগ করলে যথাক্রমে পাওয়া যায়-

$$\cos75° = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin75° = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$\tan\frac{\theta}{2}$ অনুপাতের মান $\tan\theta$ অনুপাতে প্রকাশ

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

অর্থাৎ, $\tan\theta\tan^2\frac{\theta}{2} + 2\tan\frac{\theta}{2} - \tan\theta = 0$

$\therefore \tan\frac{\theta}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+4\tan^2\theta}}{2\tan\theta}$ = **Error!**

$\tan\frac{\theta}{2}$ – এর মান ধনাত্মক না ঋণাত্মক হবে তা $\theta-$ এর মানের উপর নির্ভর করবে এবং θ দেয়া হলে সঠিক চিহ্নসহ $\tan\frac{\theta}{2}$ এর মান নির্ণয় করা যাবে।

18° ও 36° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করুন, $\theta = 18°$, তাহলে, $5\theta = 90°$ $\quad\therefore 2\theta = 90° - 3\theta$

সুতরাং, $\sin 2\theta = \sin(90° - 3\theta)$,

বা, $\sin 2\theta = \cos 3\theta$

বা, $2 \sin\theta \cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

যেহেতু $\cos\theta$ অর্থাৎ $\cos 18°$– এর মান শূন্য নয়, অতএব, উভয় পক্ষকে $\cos\theta$ দ্বারা ভাগ করে,

$2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3$

বা, $2\sin\theta = 4(1 - \sin^2\theta) - 3$

বা, $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

$\therefore \quad \sin\theta = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \dfrac{\pm\sqrt{5}-1}{4}$

যেহেতু θ অর্থাৎ, $18°$ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ অতএব, $\sin\theta$ এর মান ধনাত্মক।

$\therefore \quad \sin 18° = \dfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$

$\cos 18° = \sqrt{1 - \sin^2 18°} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{16}(\sqrt{5}-1)^2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

$\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18° = 1 - 2.\dfrac{1}{16}(\sqrt{5} - 1)^2 = \dfrac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$

$\sin 36° = \sqrt{1 - \cos^2 36°} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{16}(\sqrt{5}+1)^2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

দ্রষ্টব্য ঃ যেহেতু $54°$ এবং $72°$ কোণগুলো যথাক্রমে $36°$ এবং $18°$ কোণগুলোর পরিপূরক, অতএব $54°$ ও $72°$ কোণ দুটির ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সহজেই নির্ণয় করা যায়।

যেমন $\sin 54° = \sin(90° - 36°) = \cos 36° = \dfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$ ।

$\cos 72° = \cos(90° - 18°) = \sin 18° = \dfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$

$3°$ এবং এর গুণিতক কোণগুলোর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

$\sin 3° = \sin(18° - 15°) = \sin 18° \cos 15° - \cos 18° \sin 15°$

$= \dfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right) - \dfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$

$= \dfrac{1}{16}(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - \dfrac{1}{8}\sqrt{5 + \sqrt{5}}\ (\sqrt{3} - 1)$

অনুরূপভাবে,

$\cos 3° = \dfrac{1}{8}(\sqrt{3} + 1)\sqrt{5 + \sqrt{5}} + \dfrac{1}{16}(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{5} - 1)$

$3°$, $15°$, $30°$, $36°$ এবং $45°$ কোণগুলোর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান থেকে $3°$– এর গুণিতক কোণগুলোর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নিণয় করা যায়। [উদাহরণস্বরূপ, $6°=36°-30°$, $9°=45°-36°$·, $12°=30°-18°$, $21°=36°-15°$ ইত্যাদি] $45°$ এর চেয়ে বড় $3°$– এর গুণিতক কোণগুলোর জন্য "পরিপূরক কোণের sin এবং cosine সমান" এ সূত্রটি প্রয়োগ করা যায়।

উদাহরণ-4 ঃ প্রমাণ করুন $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

সমাধান ঃ $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$

$= (\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta) + (\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta)$

$= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

$= 1 + 1 - 2\cos(\alpha - \beta)$

$= 2\{1 - \cos(\alpha - \beta)\}$

$$= 2.2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

উদাহরণ-5 ঃ প্রমাণ করুন $\frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha-\cos\alpha} = \cot\frac{\alpha}{2}$

সমাধান ঃ $\frac{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}{1 + \sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha + \sin\alpha}{1-\cos\alpha + \sin\alpha}$

$$= \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \cot\frac{\alpha}{2}$$

উদাহরণ-6 ঃ প্রমাণ করুন $\tan\frac{\theta}{2} + \cot\frac{\theta}{2} = 2\operatorname{cosec}\theta$.

সমাধান ঃ $\tan\frac{\theta}{2} + \cot\frac{\theta}{2}$

$$= \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} + \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{2}{2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sin\theta} = 2\operatorname{cosec}\theta.$$

উদাহরণ-7 ঃ প্রমাণ করুন $\cos^4\frac{1}{2}A + \sin^4\frac{1}{2}A = \frac{1}{4}(3 + \cos 2A)$

সমাধান ঃ $\cos^4\frac{1}{2}A + \sin^4\frac{1}{2}A$

$$= \left(\cos^2\frac{1}{2}A + \sin^2\frac{1}{2}A\right)^2 - 2\sin^2\frac{1}{2}A\cos^2\frac{1}{2}A$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin 2A$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\,.\,2\sin 2A.$$

$$= 1 - \frac{1}{4}(1-\cos 2A)$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2A$$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 2A$

$= \frac{1}{4}(3 + \cos 2A)$

উদাহরণ-8 ঃ প্রমাণ করুন $\mathbf{\sin x = 2^5 \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2^2} \cos\frac{x}{2^3} \cos\frac{x}{2^4} \cos\frac{x}{2^5} \sin\frac{x}{2^5}}$

সমাধান ঃ $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$= 2.2\sin\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2} \,.\, \cos\frac{x}{2}$

$= 2^2.\, 2\sin\frac{x}{2^3}\cos\frac{x}{2^3} \,.\, \cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2}$

$= 2^3.2\sin\frac{x}{2^4}\cos\frac{x}{2^4}\cos\frac{x}{2^3}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2}$

$= 2^4.\, 2\sin\frac{x}{2^5}\cos\frac{x}{2^5}\cos\frac{x}{2^4}\cos\frac{x}{2^3}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2}$

$= 2^5\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cos\frac{x}{2^4}\cos\frac{x}{2^5}\sin\frac{x}{2^5}$

উদাহরণ-9 ঃ প্রমাণ করুন $2\sin\frac{\square}{16} = 2\sin 11°45' = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

সমাধান ঃ আমরা জানি, $2\cos^2\frac{1}{2}A = 1+\cos A$

$\therefore\ 2\cos^2 22°30' = 1+\cos 45°$

$= 1+\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

অর্থাৎ $\cos^2 22°30' = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\therefore\ \cos 22°30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

সুতরাং $2\sin^2 11°15' = 1-\cos 22°30'$

$= 1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$= \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

বা, $4\sin^2 11°15' = 2-\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$\therefore\ 2\sin 11°15' = 2\sin\frac{\square}{16} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

উদাহরণ-10 ঃ প্রমাণ করুন $\mathbf{\tan 6° \tan 42° \tan 66° \tan 78° = 1}$

সমাধান ঃ $\tan 6° \tan 42° \tan 66° \tan 78°$

$= \frac{\sin 6°}{\cos 6°} \cdot \frac{\sin 42°}{\cos 42°} \cdot \frac{\sin 66°}{\cos 66°} \cdot \frac{\sin 78°}{\cos 78°}$

$= \frac{2\sin 6° \sin 66°\ 2\sin 42° \sin 78°}{2\cos 6° \cos 66°\ 2\cos 42° \cos 78°}$

$= \frac{(\cos 60° - \cos 72°)(\cos 36° - \cos 120°)}{(\cos 60° + \cos 72°)(\cos 36° + \cos 120°)}$

$$= \frac{\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\right\}\left\{\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) + \frac{1}{2}\right\}}{\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\right\}\left\{\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) - \frac{1}{2}\right\}}$$

$$= \frac{(3-\sqrt{5})\,(3+\sqrt{5})}{(\sqrt{5}+1)\,(\sqrt{5}-1)}$$

$$= \frac{9-5}{5-1}$$

$$= \frac{4}{4} = 1.$$

উদাহরণ-11 ঃ যদি $\sin\alpha+\sin\beta = a$ এবং $\cos\alpha+\cos\beta = b$ হয়, তবে দেখান যে, $\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$

সমাধান ঃ $\sin\alpha + \sin\beta = a$

বা, $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 = a^2$

আবার, $\cos\alpha + \cos\beta = b$

$\therefore$ $(\cos\alpha+\cos\beta)^2 = b^2$

$\therefore$ $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha+\cos\beta)^2 = a^2+b^2$

বা, $(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\sin^2\beta + \cos^2\beta) + 2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta) = a^2+b^2$

বা, $1+1+2\cos(\alpha-\beta) = a^2+b^2$

বা, $2\{(1+\cos(\alpha-\beta)\} = a^2+b^2$

বা, $2.2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = a^2+b^2$

বা, $\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{a^2+b^2}{4}$

বা, $\sec^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{4}{a^2+b^2}$

বা, $1+\tan^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{4}{a^2+b^2}$

বা, $\tan^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{4}{a^2+b^2} - 1$

বা, $\tan^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}$

$\therefore$ $\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$

উদাহরণ-12 ঃ যদি $x = \sin\frac{\pi}{18}$ হয় তবে দেখান যে, $8x^4+4x^3-6x^2-2x+\frac{1}{2} = 0$

সমাধান ঃ $\sin 3 \cdot \frac{\pi}{18} = 3\sin\frac{\pi}{18} - 4\sin^3\frac{\pi}{18}$

বা, $\sin\frac{\pi}{6} = 3\sin\frac{\pi}{18} - 4\sin^3\frac{\pi}{18}$

বা, $\frac{1}{2} = 3x - 4x^3$

বা, $4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$

এখন $8x^4+4x^3-6x^2-2x+\frac{1}{2}$

$= 2x(4x^3 - 3x+\frac{1}{2}) + (4x^3-3x+\frac{1}{2})$

$= 2x \infty 0 + 0$

$= 0$

উদাহরণ-13 ঃ যদি $\sin\theta = \dfrac{a-b}{a+b}$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $\tan\left(\dfrac{1}{4}\square - \dfrac{1}{2}\theta\right) = \pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

সমাধান ঃ $\sin\theta = \dfrac{a-b}{a+b}$

$\therefore \dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} = \dfrac{a+b-a+b}{a+b+a-b}$ [যোজন- বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{\cos^2\frac{1}{2}\theta + \sin^2\frac{1}{2}\theta - 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos2\frac{1}{2}\theta + \sin^2\frac{1}{2}\theta + 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta} = \dfrac{2b}{2a}$

বা, $\dfrac{\left(\cos\frac{1}{2}\theta - \sin\frac{1}{2}\theta\right)^2}{\left(\cos\frac{1}{2}\theta + \sin\frac{1}{2}\theta\right)^2} = \dfrac{b}{a}$

বা, $\dfrac{\cos^2\frac{1}{2}\theta\left(1-\tan\frac{1}{2}\theta\right)^2}{\cos^2\frac{1}{2}\theta\left(1+\tan\frac{1}{2}\theta\right)^2} = \dfrac{b}{a}$

বা, $\left\{\dfrac{\tan\frac{\square}{4} - \tan\frac{1}{2}\theta}{1+\tan\frac{\square}{4}\tan\frac{1}{2}\theta}\right\}^2 = \dfrac{b}{a}$

বা, $\tan^2\left(\dfrac{\square}{4} - \dfrac{1}{2}\theta\right) = \dfrac{b}{a}$

$\therefore \tan\left(\dfrac{1}{4}\square - \dfrac{1}{2}\theta\right) = \pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

উদাহরণ-11 ঃ যদি $a\sin\theta + b\sin\phi = c$ এবং $a\cos\theta + b\cos\phi = c$ হয় তবে দেখান যে,

$\cos\dfrac{1}{2}(\theta-\phi) = \pm\sqrt{\dfrac{2c^2-(a-b)^2}{4ab}}$

সমাধান ঃ $a\sin\theta + b\sin\phi = c$

$\therefore a^2\sin^2\theta + b^2\sin^2\phi + 2ab\sin\theta\sin\phi = c^2$ - - - - - - - - (1)

$a\cos\theta + b\cos\phi = c$

$\therefore a^2\cos^2\theta + b^2\cos^2\phi + 2ab\cos\theta\cos\phi = c^2$ - - - - - - - - - - - (2)

(1) ও (2) যোগ করে

$a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta) + b^2(\sin^2\phi+\cos^2\phi) + 2ab(\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi) = 2c^2$

বা, $a^2+b^2+2ab\cos(\theta-\phi) = 2c^2$

বা, $2ab\cos(\theta-\phi) = 2c^2-a^2-b^2$

$\therefore \cos(\theta-\phi) = \dfrac{2c^2-a^2-b^2}{2ab}$

এখন $\cos^2\dfrac{1}{2}(\theta-\phi) = \dfrac{1}{2}\{1+\cos(\theta-\phi)\}$

$= \dfrac{1}{2}\left\{1+\dfrac{2c^2-a^2-b^2}{2ab}\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{2ab+2c^2-a^2-b^2}{2ab}\right\}$$

$$= \frac{2c^2-(a^2-2ab+b^2)}{4ab}$$

$$= \frac{2c^2-(a-b)^2}{4ab}$$

$$\therefore \quad \cos\frac{1}{2}(\theta-\phi) = \pm\sqrt{\frac{2c^2-(a-b)^2}{4ab}}$$

অনুশীলনী ১৫.৫

প্রমাণ করুন

1. i) $\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1+\sin\theta$

   ii) $\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1-\sin\theta$

   iii) $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$

   iv) $\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$

2. $\frac{2\cos\theta-\cos 2\theta-1}{2\cos\theta+\cos 2\theta+1} = \tan^2\frac{\theta}{2}$

3. i) $\dfrac{1-\tan\frac{1}{2}A}{1+\tan\frac{1}{2}A} = \frac{\cos A}{1+\sin A}$

   ii) $\dfrac{1+\tan\frac{1}{2}A}{1-\tan\frac{1}{2}A} = \frac{1+\sin A}{\cos A}$

4. $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

5. $\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}-\sqrt{1+\sin\theta}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{1+\sin\theta}} = \cot\frac{\theta}{2}$

6. $\frac{1+\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \tan\frac{\alpha}{2}\ \tan\frac{\beta}{2}$

7. $\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$

8. i) $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2 = 4\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

   ii) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2 = 4\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

   iii) $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2 = 4\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

9. i) $\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}+60^\circ\right)+\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-60^\circ\right) = \frac{3}{2}$

ii) $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

10. i) $2\cos\frac{\pi}{16} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

ii) $\cos 7\frac{1}{2}^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

iii) $\sin 67\frac{1}{2}^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

11. i) $\tan 7\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$

ii) $\tan 82\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2$

12. যদি $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\phi}{2}$ হয় তবে দেখান যে, $\cos\phi = \frac{\cos\theta - e}{1 - e\cos\theta}$

13. যদি $\sin\alpha + \sin\beta = a$ এবং $\cos\alpha + \cos\beta = b$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $\cos(\alpha+\beta) = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$

14. যদি $\sin\alpha - \sin\beta = a$ এবং $\cos\alpha + \cos\beta = b$ হয় তবে, দেখান যে $\cos(\alpha - \beta) = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$

15. যদি $a\sin\theta + b\sin\phi = c$ এবং $a\cos\theta + b\cos\phi = c$ হয়, তবে দেখান যে,

$\sin\frac{1}{2}(\theta-\phi) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b)^2 - 2c^2}{ab}}$

16. যদি $\tan\frac{1}{2}\theta = \tan^3\frac{1}{2}\phi$ এবং $\tan\phi = 2\tan\alpha$ হয় তবে দেখান যে, $\theta+\phi = 2\alpha$.

17. $x = \tan\frac{\pi}{12}$ হলে দেখান যে, $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$

ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী সম্পর্কিত সমস্যার সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী (Trigonometrical Identities)

তিন বা ততোধিক কোণ পরস্পর সম্পর্কযুক্ত হলে ঐ কোণসমূহের বা তাদের গুণিতক বা উপগুণিতক কোণে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মধ্যে যে সম্পর্ক তার সাহয্যে ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী প্রতিষ্ঠা করা যায়। যখন তিনটি কোণের সমষ্টি $180°$ বা $90°$ হয়, তখনই জটিল অভেদাবলীর মধ্যে অতিপ্রয়োজনীয় অভেদাবলী নির্ণয় করা সহজতর হয়। তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হলে, সম্পুরক বা পরিপূরক কোণের ধর্ম ব্যবহার করতে হয়।

যদি $A + B + C = \pi$ হয় তবে $B + C = \pi - A.$

$$\therefore \sin(B + C) = \sin(\pi - A) = \sin A$$

$$\cos(B + C) = \cos(\pi - A) = -\cos A$$

$$\tan(B + C) = \tan(\pi - A) = -\tan A$$

অনুরূপভাবে $\sin(C + A) = \sin B, \sin(A + B) = \sin C$

$$\cos(C + A) = -\cos B, \cos(A + B) = -\cos C$$

$$\tan(C + A) = -\tan A, \tan(A + B) = -\tan C$$

আবার, $A + B + C = \pi$ হলে $\frac{1}{2}(B + C) = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$

$$\therefore \sin\frac{B + C}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

$$\cos\left(\frac{B + C}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}$$

এবং $\tan\left(\frac{B + C}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cot\frac{A}{2}$

এই পাঠে যে সমস্ত অভেদাবলীর সত্যতা প্রমাণে একই ধরণের প্রক্রিয়া ব্যবহৃত হয়েছে তাদের একইভাবে সন্নিবেশ করে কয়েকটি ভাগে বিভক্ত করে তাদের উদাহরণ ও সমস্যা দেয়া হল।

প্রথম ভাগ

উদাহরণ-1 ঃ $A+B+C=\pi$ হলে প্রমাণ করুন $\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1$

সমাধানঃ $A + B + C = \pi \quad \therefore A + B = \pi - C$

$$\therefore \cot(A + B) = \cot(\pi - C)$$

বা, $\dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = -\cot C$

বা, $\cot A \cot B - 1 = -\cot A \cot C - \cot B \cot C$

বা, $\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1.$

উদাহরণ-2 ঃ $A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ করুন $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

সমাধান ঃ $A + B + C = \pi \quad \therefore B + C = \pi - A$

$$\therefore \tan(B + C) = \tan(\pi - A) = -\tan A$$

বা, $\dfrac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} = -\tan A$

বা, $\tan B + \tan C = -\tan A + \tan A \tan B \tan C$

$\therefore \quad \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

অনুশীলনী করুন

$A + B + C =$□ হলে প্রামণ করুন

1. $\tan 3A + \tan 3B + \tan 3C = \tan 3A \; \tan 3B \; \tan 3C$
2. $\tan\dfrac{B}{2} \tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{C}{2} \tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{A}{2} \tan\dfrac{B}{2} = 1$
3. $\cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2} = \cot\dfrac{A}{2} \cot\dfrac{B}{2} \cot\dfrac{C}{2}$

দ্বিতীয় ভাগ

উদাহরণ-1 ঃ $A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ করুন $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4\cos A \sin B \cos C$

সমাধান ঃ $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C$

$= (\sin 2A - \sin 2B) + \sin 2C$

$= 2\cos(A + B)\cos(A - B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\cos(\pi - C)\sin(A - B) + 2\sin C\cos C \quad [\because A + B + C = \pi, \because A + B = \pi - C]$

$= -2\cos C \sin(A - B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\cos C[\sin C - \sin(A - B)]$

$= 2\cos C[\sin\{\pi - (A + B) - \sin(A - B)] \quad [\because A + B + C = \pi, \because C = \pi - (A + B)]$

$= 2\cos[\sin(A + B) - \sin(A - B)]$

$= 2\cos C\left[2\cos\left(\dfrac{A + B + A - B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A + B - A + B}{2}\right)\right]$

$= 2\cos C.2\cos A\sin B$

$= 4\cos A\sin B\cos C$

উদাহরণ-2 ঃ $A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ করুন $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4\cos A\cos B\cos C - 1$

সমাধান ঃ $(\cos 2A + \cos 2B) + \cos 2C$

$= 2\cos(A + B)\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1$

$= 2\cos(\pi - C)\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1 \quad [\because A + B + C = \pi, \because A + B = \pi - C]$

$= -2\cos C\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1$

$= -2\cos C[\cos(A - B) - \cos C] - 1$

$= -2\cos C[\cos(A - B) - \cos\{\pi - (A + B)\}] - 1 \quad [\because A + B + C = \pi, \because C = \pi - (A + B)]$

$= -2\cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)] - 1$

$= -2\cos C\left[2\cos\left(\dfrac{A - B + A + B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A + B - A + B}{2}\right)\right] - 1$

$= -2\cos C 2\cos A\cos B - 1$

$= -4\cos A\cos B\cos C - 1$

উদাহরণ-3 ঃ $A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ করুন $\cos A - \cos B + \cos C + 1 = 4\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

সমাধানঃ $A + B + C = \pi \quad \therefore \dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2} = \dfrac{\pi}{2} \qquad \therefore \dfrac{A}{2} + \dfrac{C}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{B}{2}$

এখন $\cos A - \cos B + \cos C + 1$

$= (\cos A + \cos C) + (1 - \cos B)$

$= 2\cos\left(\dfrac{A + C}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A - C}{2}\right) + 2\sin^2\dfrac{B}{2}$

$= 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A + C}{2}\right) + 2\sin^2\dfrac{B}{2}$

$$= 2\sin\frac{B}{2}\ \cos\left(\frac{A-C}{2}\right)\ +\ 2\sin^2\frac{B}{2}$$
$$= 2\sin\frac{B}{2}\left[\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)\ +\ \sin\frac{B}{2}\right]$$
$$= 2\sin\frac{B}{2}\left[\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) + \sin\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{A+C}{2}\right)\right\}\right] \quad \left[\because \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+C}{2}\right]$$
$$= 2\sin\frac{B}{2}\left[\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)\ +\ \cos\left(\frac{A+C}{2}\right)\right]$$
$$= 2\sin\frac{B}{2}\left[2\cos\left(\frac{\frac{A}{2} - \frac{C}{2} + \frac{A}{2} + \frac{C}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{A}{2} - \frac{C}{2} - \frac{A}{2} - \frac{C}{2}}{2}\right)\right]$$
$$= 2\sin\frac{B}{2}\ .\ 2\cos\frac{A}{2}\ \cos\frac{C}{2}$$
$$= 4\cos\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \cos\frac{C}{2}$$

অনুশীলন করুন

$A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ করুন

1. $\sin A + \sin B - \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \cos\frac{C}{2}$
2. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$
3. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\ \cos\frac{B}{2}\ \cos\frac{C}{2}$
4. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2}$
5. $\cos 4A\ +\ \cos 4B\ +\ \cos 4C = 4\cos 2A\cos 2B\cos 2C\ -\ 1$

তৃতীয় ভাগ

উদাহরণ-1 ঃ $A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ করুন $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2\sin A \sin B \sin C$

সমাধান ঃ $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C$

$$= \frac{1}{2}(2\cos^2 A + 2\cos^2 B) - \cos^2 C$$
$$= \frac{1}{2}[1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B] - \cos^2 C$$
$$= \frac{1}{2}[2 + \cos 2A + \cos 2B] - \cos^2 C$$
$$= 1 + \frac{1}{2}[\cos 2A + \cos 2B] - \cos^2 C$$
$$= 1 + \frac{1}{2}[2\cos(A + B)\cos(A - B)] - \cos^2 C$$
$$= 1 + \cos(\pi - C)\cos(A - B) - \cos^2 C \qquad [\because A + B + C = \pi, \because A + B = \pi - C]$$
$$= 1 - \cos C \cos(A - B) - \cos^2 C$$
$$= 1 - \cos C[\cos(A - B) + \cos C]$$
$$= 1 - \cos C[\cos(A - B) + \cos\{\pi - (A + B)\}]$$
$$= 1 - \cos C[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$
$$= 1 - \cos C\left[2\sin\left(\frac{A - B + A + B}{2}\right)\sin\left(\frac{A + B - A + B}{2}\right)\right]$$
$$= 1 - \cos C \, 2\sin A \sin B$$
$$= 1 - 2\sin A \sin B \cos C$$

উদাহরণ-2 ঃ $A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ করুন $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$

সমাধানঃ $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

$$= \frac{1}{2}(2\cos^2 A + 2\cos^2 B) + \cos^2 C$$
$$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B) + \cos^2 C$$
$$= \frac{1}{2}(2 + \cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C$$
$$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C$$
$$= 1 + \frac{1}{2}[2\cos(A + B)\cos(A - B)] + \cos^2 C$$
$$= 1 + \cos(\pi - C)\cos(A - B) + \cos^2 C \quad [\because A + B + C = \pi, \because A + B = \pi - C]$$
$$= 1 - \cos C\cos(A - B) + \cos^2 C$$
$$= 1 - \cos C[\cos(A - B) - \cos C]$$
$$= 1 - \cos C[\cos(A - B) - \cos\{\pi - (A + B)\}] \quad [\because A + B + C = \pi, \because C = \pi - (A + B)]$$
$$= 1 - \cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$
$$= 1 - \cos C\left[2\cos\left(\frac{A + B + A - B}{2}\right)\cos\left(\frac{A + B - A + B}{2}\right)\right]$$
$$= 1 - \cos C . 2\cos A\cos B$$
$$= 1 - 2\cos A\cos B\cos C$$
$$\therefore \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 B + 2\cos A\cos B\cos C = 1$$

উদাহরণ-3 ঃ $A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ করুন $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2\cos A\cos B\cos C = 2$

সমাধান ঃ $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$

$$= \frac{1}{2}[2\sin^2 A + 2\sin^2 B] + \sin^2 C$$

$= \frac{1}{2}\ [1 - \cos 2A + 1 - \cos 2B]\ +\ 1 - \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}\ [2 - (\cos 2A + \cos 2B)\ + 1\ - \cos^2 C$

$= 1 - \frac{1}{2} (\cos 2A + \cos 2B)\ \ + 1\ - \cos^2 C$

$= 2 - \frac{1}{2}\ [2\cos(A + B)\cos(A - B)]\ - \cos^2 C$

$= 2 - \cos(\pi - C)\cos(A - B)\ - \cos^2 C$ $[\because A + B + C = \pi,\ \because A + B = \pi - C\ ]$

$= 2 + \cos C\cos(A - B)\ - \cos^2 C$

$= 2 + \cos C\ [\cos(A - B)\ - \cos C\ ]$

$= 2 + \cos C\ [\ \cos(A - B)\ - \cos\{\pi - (A + B)\}]$

$= 2 + \cos C\ [\ \cos(A - B)\ +\ \cos(A + B)]$

$= 2 + \cos C . 2\cos A\cos B$

$= 2 + 2\cos A\cos B\cos C$

$\therefore\ \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2\cos A\cos B\cos C = 2$

অনুশীলন করুন

***A + B + C*=π হলে প্রমাণ করুন**

1. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin A\sin B\sin C = 1$
2. $\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin A\cos B\sin C$
3. $\sin^2\frac{A}{2}\ +\ \sin^2\frac{B}{2}\ + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2}$
4. $\cos^2\frac{A}{2}\ + \cos^2\frac{B}{2}\ + \cos^2\frac{C}{2}\ = 2 + 2\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2}$
5. $\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C = 1\ + 2\cos 2A\cos 2B\cos 2C.$

অনুশীলনী ১৫.৬

***A + B + C*=π হলে প্রমাণ করুন**

1. $\frac{\sin B + \sin C - \sin A}{\sin B + \sin C + \sin A} = \tan\frac{B}{2}\ \tan\frac{C}{2}$
2. $\frac{\cot B + \cot C}{\tan B + \tan C} + \frac{\cot C + \cot A}{\tan C + \tan A} + \frac{\cot A + \cot B}{\tan A + \tan B} = 1$
3. $\frac{\tan B + \tan C}{\tan A} . \frac{\tan C + \tan A}{\tan B} . \frac{\tan A + \tan B}{\tan C} = \sec A\ \sec B\ \sec C$
4. $\frac{\tan A + \tan B + \tan C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} = \frac{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{2\cos A\cos B\cos C}$
5. $\frac{1 + \cos A - \cos B + \cos C}{1 + \cos A + \cos B - \cos C} = \tan\frac{B}{2}\ \cot\frac{C}{2}$
6. $(\cot B + \cot C)\ (\cot C + \cot A)\ (\cot A + \cot B) = \operatorname{cosec} A\operatorname{cosec} B\operatorname{cosec} C.$
7. $\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 8\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2}$
8. $\sin(B + C - A)\ +\ \sin(C + A - B)\ +\ \sin(A + B - C) = 4\sin A\sin B\sin C$

$A + B + C = \frac{\pi}{2}$ প্রমাণ করুন

9. $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cot B \cot C$

10. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1 - 2\sin A \sin B \sin C$

11. $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 2\cos A \cos B \sin C$

12. $\alpha+\beta+\gamma = 2\pi$ হলে প্রমাণ করুন $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

উত্তরমালা

অনুশীলনী-১৫.১

1. i) $-\frac{1}{2}$ ii) 0
   iii) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ iv) $\sqrt{2}$

2. i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
   iii) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ iv) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. i) 1 ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
   iii) 3 iv) $-(\frac{\sqrt{2}}{2} + 4)$

5. i) 2 ii) 3

6. $\frac{1}{2}$

7. i) $300°$ ii) $\frac{2\pi}{3}$

9. i) $60°, 300°$ ii) $60°$
   iii) $30°, 135°, 150°, 315°$ iv) $30°, 330°$
   v) $30°, 150°, 210°, 330°$