ইউনিট ১৬

বৃত্তীয় ফাংশন

ভূমিকা

পূর্ববর্তী ইউনিট সমূহে আপনারা ত্রিকোণমিতির প্রাথমিক ধারণা অর্জন করেছেন। সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করেছেন। বর্তমান ইউনিটে বৃত্তীয় ফাংশন, ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ, ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের পর্যায়, ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র ইত্যাদি সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- *বাস্তব সংখ্যার ত্রিকোণমিতিক ফাংশন সমূহ বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন;*
- *ত্রিকোণমিতিক ফাংশন সমূহের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে পারবেন;*
- *ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের পর্যায় নির্ণয় এবং তা প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন;*
- *sinx, cosx, tanx - ইত্যাদি ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনে দক্ষতা অর্জন করবেন।*

পাঠ ১ বাস্তব সংখ্যার ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

উদ্দেশ্য

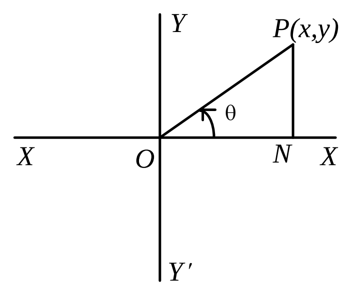
এই পাঠ শেষে আপনি-

- বৃত্তীয় ফাংশন ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

মনে করুন আয়তাকার স্থানাংক পদ্ধতিতে $X'OX$ ও $Y'OY$ যথাক্রমে x অক্ষ ও y অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। যে কোন একটি বাস্তব সংখ্যা θ-এর সমান করে মূল বিন্দুতে শীর্ষ বিন্দু স্থাপন করে θ রেডিয়ান পরিমাণ একটি কোণ অঙ্কন করা হল যার একবাহু আদি রেখা OX-বরাবর এবং অপর বাহু OP। মনে করুন মুল বিন্দু O থেকে একক দূরত্বে P বিন্দুর অবস্থান এবং P বিন্দুর স্থানাংক (x,y)।

তাহলে $x = \cos\theta$ এবং $y = \sin\theta$ - - - - - - - - - (1)



$\cos\theta$ এবং $\sin\theta$- এর মান θ-এর মানের উপর নির্ভরশীল। অনুরূপভাবে $\tan\theta$, $\text{cosec}\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$- এর মানও θ এর মানের উপর নির্ভর করে। $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$, $\text{cosec}\theta$ প্রভৃতি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোকে ত্রিকোণমিতিক ফাংশন বলে।

এখন (1) নং সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়, $x^2+y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ অর্থাৎ, $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণকে সিদ্ধ করে। যখন θ কোণ রেডিয়ানে পরিমাপ করা হয় তখন $\sin\theta$, $\cos\theta$ এবং এগুলোর উপর নির্ভরশীল অন্য চারটি যথা $\text{cosec}\theta$, $\tan\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$ ইত্যাদি ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলোকে বৃত্তীর ফাংশন বলা হয়।

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$, $\text{cosec}\theta$ প্রভৃতি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোকে ত্রিকোণমিতিক ফাংশন বলে। আবার যখন θ কোণ রেডিয়ানে পরিমাপ করা হয় তখন $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\text{cosec}\theta$, $\tan\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$ ইত্যাদি ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলোকে বৃত্তীর ফাংশন বলা হয়।

পাঠ ২ ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে পারবেন।

ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ

বৃত্তীয় ফাংশনের সংজ্ঞা থেকে এটা স্পষ্ট যে $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ ফাংশন দুটির ডোমেন বাস্তব সংখ্যার সেট। যেহেতু $|x|\leq 1$ বা, $-1\leq 1x\leq 1$ এবং $|y|\leq|$ বা, $-1\leq y\leq 1$ অতএব $\sin\theta$ ও $\cos\theta$- এর রেঞ্জ যথাক্রমে $-1\leq\sin\theta\leq 1$ এবং $-1\leq\cos\theta\leq 1$.

অতএব, সাইন ও কোসাইন বৃত্তীয় ফাংশন দুটোর ডোমেন এবং রেঞ্জ যথাক্রমে, R এবং $[-1, 1]$

আবার $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ এবং $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$\cos\theta$ এর মান শূন্য হলে $\tan\theta$ এবং $\sec\theta$- এর কোন সুনির্দিষ্ট মান পাওয়া যায় না।

যখন $\cos\theta=0$ তখন $\theta = \pm (2n-1)\dfrac{\pi}{2}$, (n=1, 2, 3, ...)

অতএব, $\tan\theta$ ও $\sec\theta$ এর ডোমেন $\theta = \pm (2n-1)\dfrac{\pi}{2}$, (n=1, 2, 3, ...) সংখ্যাগুলো ছাড়া অবশিষ্ট বাস্তব সংখ্যার সেট। $\tan\theta$- এর রেঞ্জ যে কোন বাস্তব সংখ্যা কিন্তু $\sec\theta$-এর রেঞ্জ, $-1\ \varepsilon\ \sec\theta\ \varepsilon\ 1$.

অতএব, ট্যানজেন্টের ডোমেন $R- \{\pm(2n-1)\dfrac{\pi}{2} \mid n\in N\}$ এবং রেঞ্জ R

সেকান্টের ডোমেন $R- \{\pm (2n-1)\dfrac{\pi}{2} \mid n\in N\}$ এবং রেঞ্জ $R-(-1, 1)$

আবার $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ এবং $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

$\sin\theta$- এর মান শূন্য হলে $\cot\theta$ এবং $\operatorname{cosec}\theta$- এর কোন নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায় না।

$\sin\theta=0$ হলে $\theta=\pm(n-1)\pi$, (n=1, 2, 3, ...)

অতএব $\cot\theta$ ও $\operatorname{cosec}\theta$ এর ডোমেন $\theta=\pm(n-1)\pi$, (n=1,2,3, ...) সংখ্যাগুলো বাদে বাকী বাস্তব সংখ্যাসমূহের সেট।

$\cot\theta$- এর রেঞ্জ যে কোন বাস্তব সংখ্যা, কিন্তু $\operatorname{cosec}\theta$-এর রেঞ্জ $-1\ \varepsilon\ \operatorname{cosec}\theta\ \varepsilon\ 1$.

অতএব, কোট্যানজেন্টের ডোমেন, $R-\{\pm(n-1)\pi \mid n \in N\}$ এবং রেঞ্জ R

এবং কোসেকেন্টের ডামেন, $R-\{\pm(n-1)\pi \mid n\in N\}$ এবং রেঞ্জ $R-(-1, 1)$

পাঠ ৩ ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের পর্যায়

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- পর্যায়বৃত্ত ফাংশন ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের রূপান্তর নির্ণয় করতে পারবেন।

ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের পর্যায়

কোন ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক সংখ্যা a- এর জন্য যদি $f(x)=f(a+x)$ হয় তবে $f(x)$ কে পর্যায়বৃত্ত (Periodic) ফাংশন বলে যার পর্যায় a.

মনে করুন $\sin x = \sin(2□+x) = \sin(4□+x) = ... = \sin(2n□ + x)$, যেখানে n যে কোন পূর্ণ সংখ্যা।

এখানে দেখা যাচ্ছে x-এর মানের পার্থক্য যদি $2□$ অথবা $2□$- এর পূর্ণ গুণিতক হয়, তবে $\sin x$- এর মানের কোন পরিবর্তন হয় না অর্থাৎ x- এর মানের $2□$ ব্যবধানে $\sin x$- এর মানের পুনরাবৃত্তি ঘটে। 0 অপেক্ষা বড় এবং $2□$ অপেক্ষা ছোট x- এর আর অন্য কোন মানের জন্য $\sin x$- এর মানের পুনরাবৃত্তি ঘটে না। সুতরাং, $\sin x$ একটা পর্যায়বৃত্ত ফাংশন যার পর্যায় $2□$.

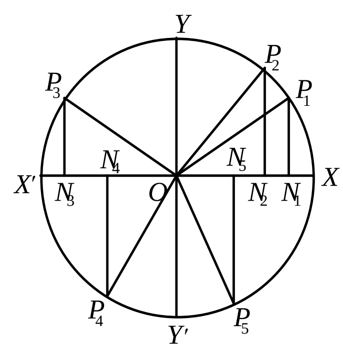
একইভাবে দেখান যায় যে, $\cos x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ ফাংশনগুলো পর্যায়বৃত্ত ফাংশন এবং ফাংশনগুলোর পর্যায় $2□$;

আবার, $\tan x = \tan(□+x) = \tan(2□+x) = ... = \tan(n□+x)$ এবং $\cot x = \cot(□+x) = \cot(2□+x) = ... = \cot(n□+x)$. অতএব, $\tan x$ এবং $\cot x$ পর্যায়বৃত্ত ফাংশন এবং এদের পর্যায় $□$; সুতরাং দেখা যাচ্ছে ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলো পর্যায়বৃত্ত ফাংশন।

> $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ ফাংশনগুলো পর্যায়বৃত্ত ফাংশন এবং ফাংশনগুলোর পর্যায় $2□$; আবার, $\tan x$ এবং $\cot x$ পর্যায়বৃত্ত ফাংশন এবং এদের পর্যায় $□$

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের পরিবর্তন

কোন কোণের পরিবর্তনের সাথে সাথে ঐ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মানের পরিবর্তন হয়। O কেন্দ্র এবং a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করুন। বৃত্তের XOX' ও YOY' ব্যাস দুটি পরস্পর লম্ব। এখন যদি একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান OX থেকে O বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে ঘুরতে থাকে তাহলে রশ্মিটি OY অবস্থানে আসলে $\angle XOY = 90°$, OX' অবস্থানে আসলে $\angle XOX' = 180°$, OY' অবস্থানে আসলে $\angle XOY' = 270°$ এবং আদি অবস্থান OX অবস্থানে ফিরে আসলে 360° কোণ উৎপন্ন হবে।



মনে করুন বৃত্তের পরিধির উপর ১ম চতুর্ভাগে P_1, P_2 এবং দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগে যথাক্রমে P_3, P_4 ও P_5 যে কোন বিন্দু। P_1N_1, P_2N_2, P_3N_3, P_4N_4 ও P_5N_5 যথাক্রমে P_1, P_2, P_3, P_4 ও P_5 বিন্দু হতে $X'OX$ অক্ষের উপর লম্ব।

XOP_1 কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করার সময় এটা লক্ষণীয় যে, XOP_1 কোণের বিভিন্ন মানের জন্য অতিভুজ OP_1- এর দৈর্ঘ্য সর্বদাই ব্যাসার্ধ a- এর সমান।

(i) সাইন (sine)- এর পরিবর্তন

$\angle N_1OP_1(=\theta)$ শূন্য হলে, সাইন শূন্য হয়। এখন N_1OP_1 এবং N_2OP_2 সমকোণী ত্রিভুজ দুটি তুলনা করলে দেখা যায় যে যখন কোণটির মান $0°$ থেকে $90°$ বৃদ্ধি পায় তখন অতিভুজের দৈর্ঘ্য বৃত্তের ব্যাসার্ধ a- এর সমান থাকে কিন্তু বিপরীত বাহু P_1N_1 ধনাত্মক হয় এবং এর দৈর্ঘ্য ক্রমশ বৃদ্ধি পেতে থাকে। অতএব, কোণের মান $90°$ না হওয়া পর্যন্ত $\sin\theta = \frac{P_1N_1}{OP_1}$ বৃদ্ধি পেতে থাকে। যখন $\theta = 90°$ হয় তখন P_1N_1 এবং OP_1 দুটি রেখাই OY রেখার সাথে মিলে যায় এবং কোণটির সাইন-এর মান 1 হয়।

কোণটি $90°$ থেকে $180°$ বৃদ্ধি পেলে অতিভুজ OP_3- এর মান সর্বদাই a থাকে এবং P_3N_3 ধনাত্মক হলেও ক্রমশ হ্রাস পেতে পেতে শূন্য হলে কোণটির সাইন-এর মান পুনরায় শূন্য হয়। সুতরাং কোণটি $90°$ থেকে বেড়ে $180°$ হলে এর সাইন-এর মান 1 থেকে কমে পুনরায় শূন্য হয়।

তৃতীয় চতুর্ভাগে θ কোণটি যখন $180°$ থেকে $270°$ বৃদ্ধি হয় তখন P_4N_4 ঋণাত্মক হয় কিন্তু এর মান শূন্য থেকে বৃদ্ধি পেয়ে OY' হয়; তখনও অতিভুজের দৈর্ঘ্য a থাকে। অতএব, এ চতুর্ভাগে কোণের মান বৃদ্ধি পাওয়ার সাথে সাথে সাইন -এর মান শূন্য থেকে কমে -1 হয়। চতুর্থ চতুর্ভাগে θ কোণটি যখন $270°$ হতে বৃদ্ধি পেয়ে $360°$ হয় তখন P_5N_5 ঋণাত্মক হয় এবং এর মান OY' থেকে কমে শূন্য হয় এবং কোণগুলোর সাইন এর মান -1 থেকে বৃদ্ধি পেয়ে শূন্য হয়।

অতএব,

θ কোণ শূন্য থেকে বৃদ্ধি পেয়ে $90°$ হলে $\sin\theta$ অনুপাত 0 থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 1 হয়।

θ কোণ $90°$ থেকে বৃদ্ধি পেয়ে $180°$ হলে, $\sin\theta$- এর মান 1 থেকে কমে শূন্য হয়।

θ কোণ $180°$ থেকে বৃদ্ধি পেয়ে $270°$ হলে $\sin\theta$ এর মান 0 থেকে কমে -1 হয়।

θ কোণ $270°$ থেকে বৃদ্ধি পেয়ে $360°$ হলে $\sin\theta$ এর মান -1 থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 0 হয়।

(ii) কোসাইন (cosine) এর পরিবর্তন

প্রথম চতুর্ভাগে $\angle XOP_1$ এর পরিমাণ $0°$ থেকে ক্রমশ বৃদ্ধি পেয়ে $90°$ হলে ON_1- এর মান OX থেকে কমে শূন্য হয়। উল্লেখ্য যে, এ সময়ে ON_1 এর মান সব সময়ই ধনাত্মক হয়। দ্বিতীয় চতুর্ভাগে θ কোণ $90°$ থেকে বৃদ্ধি পেয়ে $180°$ হলে ON_3 এর দৈর্ঘ্য শূন্য থেকে বৃদ্ধি পেয়ে OX' হয়; কিন্তু এ সময়ে ON_3 এর মান সব সময়ই ঋণাত্মক হয়। তৃতীয় চতুর্ভাগে ON_4 ঋণাত্মক হয় কিন্তু এর মান OX' থেকে কমে শূন্য হয়। চতুর্থ চতুর্থভাগে ON_5 ধনাত্মক কিন্তু এর মান শূন্য থেকে বৃদ্ধি পেয়ে OX হয়। উল্লেখ্য যে, অতিভুজের মান সব সময়ই a থাকে।

অতএব,

θ কোণ শূন্য থেকে বৃদ্ধি পেয়ে $90°$ হলে $\cos\theta$ অনুপাত 1 থেকে কমে শূন্য হয়।

θ কোণ $90°$ থেকে বৃদ্ধি পেয়ে $180°$ হলে $\cos\theta$ এর মান 0 থেকে কমে -1 হয়।

θ কোণ $180°$ থেকে বৃদ্ধি পেয়ে $270°$ হলে $\cos\theta$ এর মান -1 থেকে বৃদ্ধি পেয়ে শূন্য হয়।

θ কোণ $270°$ থেকে বৃদ্ধি পেয়ে $360°$ হলে $\cos\theta$ এর মান 0 থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 1 হয়।

(iii) ট্যানজেন্ট (Tangent)- এর পরিবর্তন

প্রথম চতুর্ভাগে θ যখন $0°$ থেকে বৃদ্ধি পেয়ে $90°$ হয় তখন P_1N_1 শূন্য থেকে বৃদ্ধি পেয়ে OY হয় এবং একই সময়ে ON_1 কমে OX থেকে 0 হয়; P_1N_1 এবং ON_1 এ চতুর্ভাগে ধনাত্মক। অতএব $\tan\theta = \frac{P_1N_1}{ON_1}$,

অতএব $\frac{P_1N_1}{ON_1}$ শূন্য থেকে বৃদ্ধি পেয়ে $\frac{OY}{0}$ ∅ □ হয়।

দ্বিতীয় চতুর্ভাগে P_3N_3 কমে OY থেকে শূন্য হয় কিন্তু ON_3 বৃদ্ধি পেয়ে শূন্য থেকে OX' হয়। দ্বিতীয় চতুর্ভাগে P_3N_3 ধনাত্মক ও ON_3 ঋণাত্মক। অতএব $\tan\theta = \frac{P_3N_3}{ON_3}$ ঋণাত্মক এবং এর সংখ্যা মান □ থেকে কমে শূন্য হয়।

প্রকৃতপক্ষে θ এর মান 90° হলে tanθ- এর কোন মান পাওয়া যায় না। যখন θ- এর মান 90° অপেক্ষা অত্র কম তখন tanθ∅□। আবার θ–এর মান 90° অপেক্ষা অত্র বেশি হলে tanθ∅ – □। অর্থাৎ θ– এর মান 90° অতিক্রম করার সময় tanθ–এর মান হঠাৎ করেই +□ থেকে পরিবর্তিত হয়ে – □ হয়।

তৃতীয় চতুর্ভাগে P_4N_4 এবং ON_4 দুটিই ঋণাত্মক। P_4N_4- এর দৈর্ঘ্য শূন্য থেকে বৃদ্ধি পেয়ে OY' এবং ON_4- এর দৈর্ঘ্য OX' থেকে কমে শূন্য হয়। অতএব, $\tan\theta = \frac{P_4N_4}{ON_4}$ ধনাত্মক এবং এর মান শূন্য থেকে বৃদ্ধি পেয়ে □ হয়।

চতুর্থ চতুর্ভাগে P_5N_5 ঋণাত্মক এবং এর দৈর্ঘ্য OY' থেকে কমে শূন্য হয়। ON_5 ধনাত্মক এবং এর মান শূন্য থেকে বৃদ্ধি পেয়ে OX হয়। অতএব, $\tan\theta = \frac{P_5N_5}{ON_5}$ ঋণাত্মক এবং এর মান □ থেকে কমে শূন্য হয় অর্থাৎ –□ থেকে বেড়ে 0 হয়। θ– এর মান 270° হলে, tanθ– এর কোন মান পাওয়া যায় না এবং θ এর মান 270° অতিক্রম করার সময় tanθ এর হঠাৎ করে +□ থেকে – □ এ পরিবর্তিত হয়।

অতএব,

θ শূন্য থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 90° হলে tanθ– এর মান 0 থেকে বৃদ্ধি পেয়ে □ হয়।

θ– এর মান 90° অতিক্রম করার সময় tanθ– এর মান +□ থেকে – □ হয়।

θ– এর মান 90° থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 180° হলে tanθ– এর মান – □ থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 0 হয়।

θ– এর মান 180° থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 270° হলে tanθ–এর মান 0 থেকে বৃদ্ধি পেয়ে □ হয়।

θ– এর মান 270° অতিক্রম করার সময় tanθ–এর মান +□ থেকে – □ হয়।

θ– এর মান 270° থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 360° হলে tanθ-এর মান – □ থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 0 হয়।

(iv) কোট্যানজেন্ট (Cotangent)-এর পরিবর্তন

θ– এর বিভিন্ন মানের জন্য cotθ– এর পরিবর্তন $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ থেকে নির্ণয় করা যায়।

θ– শূন্য হতে বৃদ্ধি পেয়ে 90° হলে cotθ–এর মান □ থেকে কমে শূন্য হয়।

θ– এর মান 90° থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 180° হলে cotθ– এর মান 0 থেকে কমে – □ হয়।

θ– এর মান 180° অতিক্রম করার সময় cotθ– এর মান – □ থেকে □ হয়।

θ– এর মান 180° থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 270° হলে cotθ– এর মান □ থেকে কমে 0 হয়।

θ– এর মান 270° থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 360° হলে cotθ–এর মান 0 থেকে কমে – □ হয়।

θ– এর মান 360° অতিক্রম করার সময় cotθ– এর মান – □ থেকে পরিবর্তিত হয়ে +□ হয়।

(v) সেকেন্টের (Secent) এর পরিবর্তন

θ– এর বিভিন্ন মানের জন্য secθ– এর পরিবর্তন $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ থেকে নির্ণয় করা যায়।

0° থেকে 90° এর জন্য secθ– এর মান 1 থেকে □ পর্যন্ত হয়। এখানে secθ– এর মান + □ থেকে
- □ এ পরিবর্তিত হয়।

90° থেকে 180° এর জন্য secθ– এর মান –□ থেকে বৃদ্ধি পেয়ে –1 হয়।

180° থেকে 270° এর জন্য secθ–এর মান –1 থেকে কমে –□ হয়। এখানে আবার secθ–এর মান –□ থেকে +□- তে পরিণত হয়।

270° থেকে 360° এর জন্য secθ– এর মান □ থেকে কমে 1 হয়।

(vi) কোসেকেন্টের (Cosecant)- এর পরিবর্তন

θ– এর বিভিন্ন মানের জন্য cosecθ–এর পরিবর্তন $\text{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ থেকে নির্ণয় করা যায়।

0° থেকে 90° এর জন্য cosecθ– এর মান □ থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 1 হয়।

90° থেকে 180° এর জন্য cosecθ– এর মান 1 থেকে বৃদ্ধি পেয়ে □ হয়।

এখানে cosecθ– এর মান +□ থেকে – □ এ পরিবর্তিত হয়।

180° থেকে 270° এর জন্য cosecθ এর মান – □ থেকে বৃদ্ধি পেয়ে –1 হয়।

270° থেকে 360° এর জন্য cosecθ–এর মান –1 থেকে কমে – □ হয়।

এখানে θ এর মান 360° অতিক্রম করার সময় cosecθ–এর মান – □ থেকে +□ এ পরিবর্তিত হয়।

ত্রিকোণমিতিক ফাংশনসমূহ পর্যায়বৃত্ত ফাংশন। sinθ, cosθ, cosecθ এবং secθ– এর পর্যায় 2□। সুতরাং প্রতি 360° পর পর sinθ, cosθ, cosecθ এবং secθ– এর মানের পরিবর্তন একইরূপ হবে। tanθ এবং cotθ–এর পর্যায় □। সুতরাং প্রতি 180° পরপর tanθ এবং cotθ এর মানের পুনরাবৃত্তি হবে।

পাঠ ৪ ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনে দক্ষতা অর্জন করবেন।

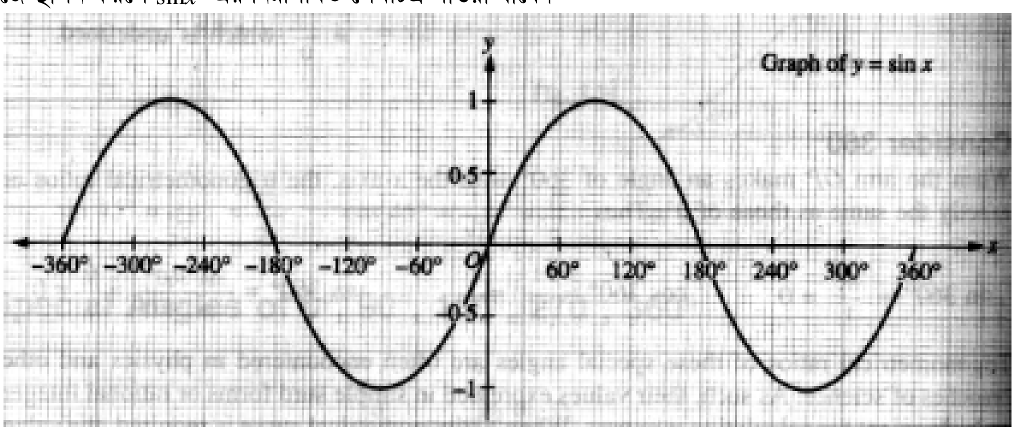
ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র

বীজগণিতীয় ফাংশনের মত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনেরও লেখচিত্র অঙ্কন করা যায় এবং লেখচিত্র অঙ্কনের প্রক্রিয়াও একই। এখানে $X'OX$ ও $Y'OY$ অক্ষরেখা নেয়া হয়। x- অক্ষ বরাবর একটি নির্দিষ্ট স্কেলে কোণগুলোকে প্রকাশ করা হয়। ধনাত্মক কোণসমূহ OX বরাবর এবং ঋণাত্মক কোণ OX' বরাবর নেয়া হয়। ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মানগুলো একটি নির্দিষ্ট স্কেলে y- অক্ষ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ধনাত্মক মানগুলো OY এবং ঋণাত্মক মানগুলো OY' বরাবর নেয়া হয়। এভাবে প্রতিটি কোণ এবং এদের সংশ্লিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অনুপাত থেকে আমরা ছক কাগজে এক একটি বিন্দু পাই। বিন্দুগুলো যোগ করলে প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র পাওয়া যায়।

sin*x*- এর লেখচিত্র

মনে করুন $y=\sin x$

সাইন সারণী থেকে x- এর বিভিন্ন মানের জন্য y- এর অর্থাৎ, $\sin x$- এর সংশ্লিষ্ট মানগুলো নির্ণয় করুন। মানগুলোকে ছক কাগজে স্থাপন করলে $\sin x$ -এর নিম্নলিখিত লেখচিত্র পাওয়া যাবে।



সাইন লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য ঃ

(i) লেখচিত্র অবিচ্ছিন্ন এবং আকৃতি ঢেউ-এর মত।

(ii) $\sin x$- এর সর্বোচ্চ মান 1 এবং সর্বনিম্ন মান -1

(iii) x- এর মান $\frac{\pi}{2}$ এর বিজোড় গুণিতক হলে $\sin x$ এর সর্বোচ্চ অথবা সর্বনিম্ন মান পাওয়া যাবে।

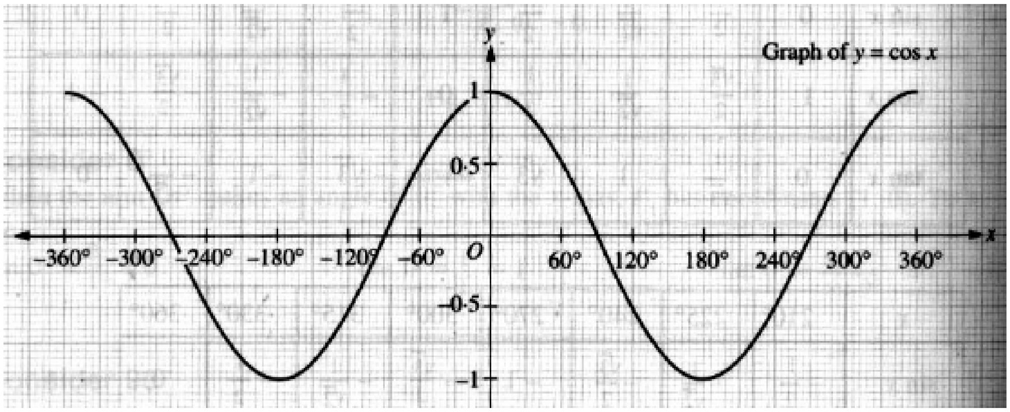
(iv) মূলবিন্দু এবং সে সমস্ত বিন্দুতে x-এর মান $\frac{\pi}{2}$ এর জোড় গুণিতক সেখানে $\sin x$- এর মান শূন্য হবে।

(v) যেহেতু $\sin(2n\pi+x) = \sin x$, সুতরাং, 0° থেকে 360° এর মধ্যে অঙ্কিত লেখচিত্র ডানে এবং বামে পর্যায়ক্রমে পাওয়া যাবে।

cos$x$-এর লেখচিত্র

মনে করুন $y = \cos x$

কোসাইন সারণী থেকে x এর বিভিন্ন মানের জন্য y এর অর্থাৎ cos$x$-এর সংশ্লিষ্ট মানগুলো নির্ণয় করুন। মানগুলো ছক কাগজে স্থাপন করলে cos$x$ -এর নিম্নলিখিত লেখচিত্র পাওয়া যাবে।



কোসাইন লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য ঃ

(i) কোসাইন লেখচিত্র অবিচ্ছিন্ন এবং আকৃতি ঢেউ-এর মত

(ii) কোসাইন লেখচিত্র সাইন লেখচিত্রের অনুরূপ হবে যদি এটা 90° ডানে অথবা 90° বামে সাজানো হয়। এর কারণ $\sin(90°+x)=\cos x$, বা, $\sin x = \cos(x–90°)$

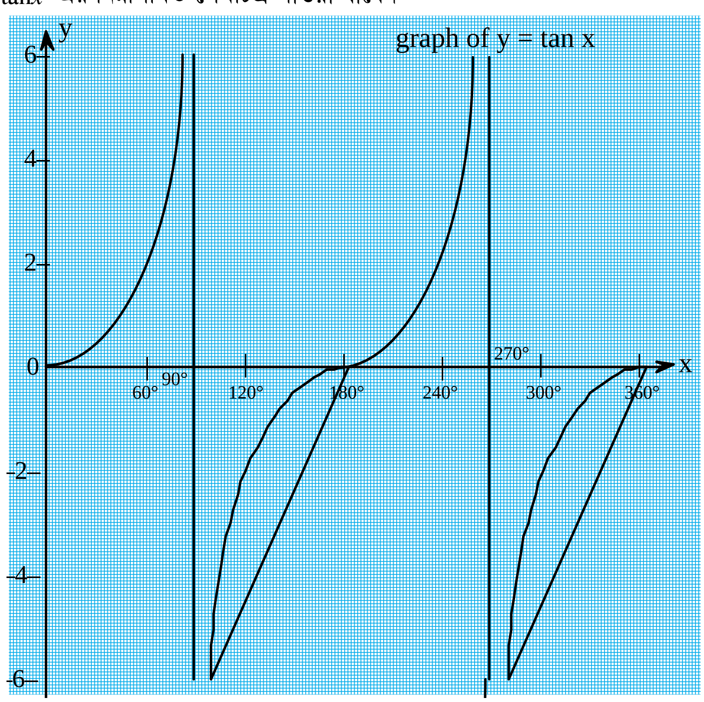
(iii) কোসাইন-এর সর্বোচ্চ মান 1 এবং সর্বনিম্ন মান -1.

(iv) x-এর স্থলে $-x$ বসালে $y = \cos x$-এর মান অপরিবর্তিত থাকে। এজন্য লেখচিত্রটি y- অক্ষের সাপেক্ষে সাদৃশ্যপূর্ণ হবে।

tan$x$- এর লেখচিত্র

মনে করুন $y = \tan x$

ট্যানজেন্ট সারণী থেকে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য y-এর অর্থাৎ tanx এর সংশ্লিষ্ট মানগুলো নির্ণয় করুন। মানগুলো ছক কাগজে স্থাপন করলে tan$x$ এর নিম্নলিখিত লেখচিত্র পাওয়া যাবে।



ট্যানজেন্ট লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য ঃ

(i) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন নয়। এটা ভিন্ন ভিন্ন শাখার সমষ্টি। x- এর মান যখন $\frac{\pi}{2}$ এর বিজোড় গুণিতক হয় তখন এটা বিচ্ছিন্ন হয়ে যায়।

(ii) যেহেতু $\tan(n\pi+x) = \tan x$, লেখচিত্রটির প্রতিটি শাখা $-\frac{\pi}{2}$ এবং $\frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে অঙ্কিত শাখাটির অনুরূপ।

(ii) $\frac{\pi}{2}$ এর বিজোড় গুণিতকের জন্য প্রাপ্ত y- অক্ষের সমান্তরাল ও এর বিপরীত পাশের রেখা দুটিকে লেখটি কখনই ছেদ করে না কিন্তু ক্রমশই তাদের নিকটবর্তী হতে থাকে।

অনুশীলনী-১৬.১

1. $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ ফাংশনগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করে তাদের বৈশিষ্ট্য বর্ণনা করুন।

2. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করুন যখন $0° < x < 360°$

   (i) $y = 2\sin x$ (ii) $y = \sin 2x$ (iii) $y = \frac{3}{2}\cos 2x$

   (iv) $y = \tan 2x$ (v) $y = \sin x + \cos x$.