ইউনিট ১৭

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ

ভূমিকা

এক বা একাধিক ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমন্বিত সমীকরণই ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ। একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সমাধান করলে অজ্ঞাত কোণের অসংখ্য মান পাওয়া যায় অর্থাৎ কোন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের নির্দিষ্ট মানের জন্য যে কোণটির ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নেয়া হয় তার অনেক মান থাকতে পারে। কোন ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সমাধান করে অজ্ঞাত কোণের সকল মানকে কেবলমাত্র একটি রাশির সাহায্য কিরূপে প্রকাশ করা যায় সেই সম্পর্কে এই ইউনিটে আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- *ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন,*
- $sin\theta = k, cos\theta = k, tan\theta = k$ *সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন,*
- *ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করতে পারবেন,*
- *নির্দিষ্ট ব্যবধিতে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।*

পাঠ ১ সংজ্ঞা ও ধারণা

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সংজ্ঞা জানতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সম্পর্কে বিস্তারিত ধারণা অর্জন করবেন।

এক বা একাধিক ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমন্বিত সমীকরণকে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ বলে। একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাথে সংশ্লিষ্ট অজানা কোণের বা কোণ সমূহের কয়েকটি নির্দিষ্ট মান দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হবে। সুতরাং সে সমস্ত কোণ দ্বারা ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সিদ্ধ হয় তাদের মান নির্ণয় করাই ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

এক বা একাধিক ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমন্বিত সমীকরণকে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ বলে।

কোন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্দিষ্ট থাকলে অনুপাতের সংগে সংশ্লিষ্ট কোণের অসংখ্য মান পাওয়া যায়।

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে θ এর ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক মান $45°$। সম্পুরক কোণের sine সমান বলে $\sin 135° = \sin 45°$। আবার $45°$ ও $135°$ কোণের সাথে যে সমস্ত কোণের পার্থক্য $360°$ অথবা $360°$ কোণের গুণিতক তাদের sine এবং $45°$ কোণের sine সমান অর্থাৎ $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ । সুতরাং এই সমীকরণের সমাধান $\theta = 45°, 135°, 405°, 495°, 765°, -225°, -315°, -675°$, ----- ইত্যাদি।

অন্য কোন ত্রিকোণমিতিক অনুপাত দ্বারা গঠিত সমীকরণ হতে একইভাবে দেখান যায়, সমীকরণের অজানা কোণের জন্য অসংখ্য মান পাওয়া যায়।

এখন ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান, অর্থাৎ অজানা কোণের জন্য প্রাপ্ত সমস্ত মান একটি রাশির সাহায্যে কিভাবে প্রকাশ করা যায় তা আলোচনা করা যাক।

$\sin\theta = 0$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান

যেহেতু, $\sin\theta = 0$;

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে $\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ব্যাসার্ধ ভেক্টর}} = 0.$

সুতরাং, একটি কোণের সাইন অনুপাত শূন্য হলে লম্বের দূরত্ব শূন্য হবে। ইহা তখনই সম্ভব যখন কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রেখাটি ঘুরে এসে আদি অবস্থানের রেখাটির সাথে মিলিত হয়। ঘূর্ণায়মান রেখা আদি অবস্থানের রেখার সাথে পুনরায় মিলিত হবে, যদি তা আদি অবস্থানের রেখার সাথে $0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \pm4\pi$; ইত্যাদি কোণ উৎপন্ন করে এবং তখন কোণগুলির জন্য সাইন অনুপাতের মান শূন্য হবে।

$\therefore\ \theta = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \pm4\pi$; ইত্যাদি।

যদি n এর মান শূন্য, অথবা যে কোন অখণ্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) হয়, তবে $n\pi$ রাশির সাহায্যে উপরে প্রাপ্ত সমস্ত কোণ, অর্থাৎ সমীকরণের সাধারণ সমাধান প্রকাশ করা যায়।

$\therefore \sin\theta = 0$ হলে, $\theta = n\pi$, যখন n এর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)।

$\cos\theta = 0$ সমীকরণের সমাধান

যেহেতু, $\cos\theta = 0$,

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, $\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{ব্যাসার্ধ ভেক্টর}} = 0.$

সুতরাং, একটি কোণের কোসাইন অনুপাত শূন্য হলে ভূমির দূরত্ব শূন্য হবে। ইহা তখনই সম্ভব যখন কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রেখাটি ঘুরে এসে আদি অবস্থানের রেখার উপর লম্ব হয়।

ঘূর্ণায়মান রেখা আদি অবস্থানের রেখার উপর লম্ব হবে, যদি তা আদি অবস্থানের রেখার সাথে $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm 3\frac{\pi}{2}$, $\pm 5\frac{\pi}{2}$ ---- --- ইত্যাদি কোণ উৎপন্ন করে এবং তখন কোণগুলির জন্য কোসাইন অনুপাতের মান শূন্য হয়।

$\therefore\ \theta = \pm\frac{\pi}{2}\ , \pm 3\frac{\pi}{2}\ , \pm 5\frac{\pi}{2}$ --------

যদি k এর মান বিজোড় এবং অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) হয়, তবে $k\,.\,\frac{\pi}{2}$ রাশির সাহায্যে উপরে প্রাপ্ত সমস্ত কোণ, অর্থাৎ সমীকরণের সাধারণ সমাধান প্রকাশ করা যায়।

$\therefore\ \cos\theta = 0$ হলে $\theta = k\,.\,\frac{\pi}{2}$

বা, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

যখন n এর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)।

$\tan\theta=0$ ও $\cot\theta=0$ সমীকরণের সমাধান

যেহেতু, $\tan\theta = 0$

$\therefore\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0$ অর্থাৎ $\sin\theta = 0$ বা $\theta = n\pi$

সুতরাং $\tan\theta=0$ হলে $\theta = n\pi$, যখন n এর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)

আবার, $\cot\theta = 0$

অর্থাৎ, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0$ অর্থাৎ $\cos\theta = 0$

$\therefore\ \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

দ্রষ্টব্যঃ $\text{cosec}\theta$ ও $\sec\theta$ এর মান কখনও 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বা -1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না। ফলে তাদের মান কখনও শূন্য হতে পারে না।

উদাহরণ-1 ঃ সমাধান করুন $\sin3\theta+\sin5\theta+\sin7\theta+\sin9\theta=0$

সমাধানঃ $\sin3\theta+\sin5\theta+\sin7\theta+\sin9\theta=0$

বা, $(\sin9\theta+\sin3\theta) + (\sin7\theta+\sin5\theta) = 0$

বা, $2\sin6\theta\cos3\theta+2\sin6\theta\cos\theta=0$

বা, $2\sin6\theta(\cos3\theta+\cos\theta) = 0$

বা, $2\sin6\theta\ .\ 2\cos2\theta\cos\theta = 0$

বা, $4\sin6\theta\cos2\theta\cos\theta = 0$

$\therefore\ \sin6\theta=0$ বা, $6\theta=n\pi$ বা, $\theta=\frac{n\pi}{6}$

$\cos2\theta=0$ বা, $2\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ বা, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$

এবং $\cos\theta = \theta\ \ \therefore\ \theta = n\pi.$

উদাহরণ-2 ঃ সমাধান করুন, $\tan x+\tan2x+\tan3x = \tan x\tan2x\tan3x$

সমাধানঃ $\tan x + \tan2x + \tan3x = \tan x\tan2x\tan3x.$

বা, $\tan x + \tan2x = -\tan3x + \tan x\tan2x\tan3x$

বা, $\tan x + \tan 2x = -\tan 3x\,(1 - \tan x \tan 2x)$

বা, $\dfrac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x} = -\tan 3x$

বা, $\tan(x + 2x) = -\tan 3x$

বা, $\tan 3x = -\tan 3x$

বা, $2\tan 3x = 0$

বা, $\tan 3x = 0$

$\therefore\ 3x = n\pi$

$\therefore\ x = \dfrac{n\pi}{3}$

যখন n এর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা।

উদাহরণ-3 ঃ সমাধান করুন $\sin 5\theta \cos\theta = \sin 6\theta \cos 2\theta$

সমাধানঃ $\sin 5\theta \cos\theta = \sin 6\theta \cos 2\theta$

বা, $2\sin 5\theta \cos\theta = 2\sin 6\theta \cos 2\theta$

বা, $\sin 6\theta + \sin 4\theta = \sin 8\theta + \sin 4\theta$

বা, $\sin 8\theta - \sin 6\theta = 0$

বা, $2\cos 7\theta \sin\theta = 0$

হয় $\cos 7\theta = 0 \quad \therefore\ 7\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \qquad \therefore\ \theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{14}$

অথবা, $\sin\theta = 0 \quad \therefore\ \theta = n\pi$

অনুশীলনী-১৭.১

সমাধান করুন

1. $\cos 3\theta = \cos 2\theta$
2. $\cos 9x \cos 7x = \cos 5x \cos 3x$
3. $\sin m\theta + \sin n\theta = 0$

পাঠ ২ $\sin\theta=r$, $\cos\theta=r$, $\tan\theta=r$ সমীকরণের সমাধান নির্ণয়

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- $\sin\theta = r$, $\cos\theta = r$, $\tan\theta = r$ সমীকোণের সমাধান নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

সাইন (sine)-এর অনুপাতের একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য প্রাপ্ত সমস্ত কোণকে একটি সাধারণ রাশির সাহায্যে প্রকাশ

ধরুন α একটি ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যার সাইন (sine)- এর মান r (r- এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হবে না)। আবার ধরুন, θ যে কোন একটি কোণ যার sine- এর মানও r অর্থাৎ, $\sin\theta = r$.

অতএব, $\sin\theta = r = \sin\alpha$

অথবা, $\sin\theta = \sin\alpha$

বা, $\sin\theta - \sin\alpha = 0$

বা, $2\cos\dfrac{\theta+\alpha}{2}\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2} = 0$

হয়, $\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2} = 0$

বা, $\dfrac{\theta-\alpha}{2} = m\pi$

বা, $\theta-\alpha = 2m\pi$ বা, $\theta = 2m\pi+\alpha$

বা, $\theta = 2m\pi + (-1)^{2m}\alpha$ - - - - - - - - - - - - - - - - (1)

অথবা, $\cos\dfrac{\theta+\alpha}{2} = 0$ বা, $\dfrac{\theta+\alpha}{2} = (2m+1)\dfrac{\pi}{2}$

বা, $\theta+\alpha = (2m+1)\pi$ বা, $\theta = (2m+1)\pi - \alpha$

বা, $\theta = (2m+1)\pi + (-1)^{2m+1}\alpha$ - - - - - - - - - - - - - - - - - (2)

(1) নং ও (2) নং সমীকরণ একত্রিত করে পাওয়া যায়, $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$

n-এর মান শূন্য অথবা ধনাত্মক ও ঋণাত্মক যে কোন জোড় অথবা বিজোড় পূর্ণ সংখ্যা হতে পারে।

যদি $\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec}\alpha$ হয় তবে $\sin\theta=\sin\alpha$

$\therefore\ \theta = n\pi + (-1)^n\alpha$, যেখানে n-এর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)।

কোসাইন (cosine)-এর অনুপাতের একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য প্রাপ্ত সমস্ত কোণকে সাধারণ রাশির সাহায্যে প্রকাশ

ধরুন α একটি ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যার কোসাইন (cosine)-এর মান r (r-এর সংখ্যামান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হবে না)। আবার ধরুন θ যে কোন একটি কোণ যার cosine-এর মান r অর্থাৎ $\cos\theta = r$

অতএব, $\cos\theta = r = \cos\alpha$

অর্থাৎ $\cos\theta = \cos\alpha$

বা, $\cos\alpha - \cos\theta = 0$,

বা, $2\sin\dfrac{\theta+\alpha}{2}\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2} = 0$

হয়, $\sin\dfrac{\theta+\alpha}{2} = 0$

অতএব, $\dfrac{\theta+\alpha}{2} = m\pi$

বা, $\theta + \alpha = 2m\pi$

$\therefore \quad \theta = 2m\pi - \alpha$ - - - - - - - - - - - - - (1)

অথবা, $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$

অতএব, $\frac{\theta-\alpha}{2} = m\pi$

বা, $\theta - \alpha = 2m\pi$

$\therefore \theta = 2m\pi + \alpha$ - - - - - - - - - - - - - - - (2)

(1) ও (2) নং সমীকরণ একত্রিত করে পাওয়া যায় $\theta = 2n\pi \pm\alpha$

যেখানে, n–এর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)

$\sec\theta = \sec\alpha$ হলে, $\cos\theta = \cos\alpha$, সুতরাং $\theta = 2n\pi\pm\alpha$

যেখানে n–এর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)।

টেনজেন্ট (Tangent)-এর একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য প্রাপ্ত সমস্ত কোণকে একটি সাধারণ রাশির সাহায্যে প্রকাশ

ধরুন α একটি ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যার ট্যানজেন্ট (tangent)-এর মান r–এর সমান। আবার ধরুন θ যে কোন একটি কোণ যার ট্যানজেন্ট-এর মানও r অর্থাৎ $\tan\theta = r$.

অতএব, $\tan\theta = r = \tan\alpha$

অর্থাৎ $\tan\theta - \tan\alpha = 0$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$

বা, $\frac{\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta\cos\alpha} = 0$

বা, $\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha} = 0$

বা, $\sec\theta \sec\alpha \sin(\theta - \alpha) = 0$

কিন্তু $\sec\theta$ বা, $\sec\alpha$ কখনও শূন্য হতে পারে না।

অতএব, $\sin(\theta-\alpha) =0$ অতএব, $\theta - \alpha = n\pi$ বা, $\theta= n\pi + \alpha$

যেখানে n-এর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা।

যদি $\cot\theta = \cot\alpha$ হয় তবে $\tan\theta = \tan\alpha$ $\quad\therefore \theta = n\pi + \alpha$

যেখানে n-এর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা।

উদাহরণ-1 ঃ সমাধান করুন $\sin^2 2\theta - 3\cos^2\theta =0$

সমাধান ঃ $\sin^2 2\theta-3\cos^2\theta=0$

বা, $(2\sin\theta \cos\theta)^2 - 3\cos^2\theta = 0$

বা, $4\sin^2\theta \cos^2\theta - 3\cos^2\theta = 0$

বা, $\cos^2\theta (4\sin^2\theta - 3) =0$

হয় $\cos^2\theta = 0$

$\therefore \cos\theta = 0$

$\therefore \theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

নাহয় $4\sin^2\theta - 3 = 0$

বা, $4\sin^2\theta = 3$

বা, $\sin^2\theta = \frac{3}{4}$

বা, $\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} = \pm \sin\ \frac{\pi}{3}$

বা, $\sin\theta = \sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore\ \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$

অর্থাৎ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

উদাহরণ-2 ঃ $\mathbf{cosec\theta\ cot\theta = 2\sqrt{3}}$

সমাধান ঃ $\text{cosec}\theta\ \cot\theta = 2\sqrt{3}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 2\sqrt{3}$

বা, $\cos\theta = 2\sqrt{3}\ \sin^2\theta = 2\sqrt{3}\ (1-\cos^2\theta)$

বা, $2\sqrt{3}\ \cos^2\theta + \cos\theta - 2\sqrt{3} = 0$

বা, $(\sqrt{3}\cos\theta + 2)\ (2\cos\theta - \sqrt{3}) = 0$

কিন্তু $\sqrt{3}\ \cos\theta+2$ ◘ 0, কারণ $\cos\theta$ এর সংখ্যাসূচক মান – 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতম হতে পারে না।

$\therefore\ 2\cos\theta - \sqrt{3} = 0.$

$\therefore\ \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

অপ্রাসঙ্গিক মূল ঃ

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান একাধিক পদ্ধতিতে করা যায়। সমাধানের পদ্ধতিগুলো ভিন্ন হলেও প্রকৃতপক্ষে সমাধানগুলো থেকে অভিন্ন কোণসমূহ পাওয়া যায়। কিন্তু কোন কোন ক্ষেত্রে ত্রুটিপূর্ণ পদ্ধতির জন্য সমাধানের সাথে এমন কতকগুলো মূল পাওয়া যায় যেগুলো প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। এই মূলসমূহকে অপ্রাসঙ্গিক মূল বলে।

উদাহরণ-3 ঃ সমাধান করুন $\mathbf{\cos\theta+\sin\theta = \sqrt{2}}$

সমাধান ঃ

প্রথম পদ্ধতিঃ $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$

উভয় পক্ষকে $\cos\theta$ ও $\sin\theta$ এর সহগের বর্গের যোগফলের বর্গমূল অর্থাৎ $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায়-

$\frac{1}{\sqrt{2}}\ \cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\ \sin\theta = 1$

বা, $\cos\frac{\pi}{4}\ \cos\theta + \sin\frac{\pi}{4}\ \sin\theta = 1$

বা, $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 1 = \cos o$

$\therefore\ \theta - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm 0.$

$\therefore\ \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

উভয় পক্ষকে $\cos\theta$ ও $\sin\theta$ এর সহগের বর্গের যোগফলের বর্গমূল দ্বারা ভাগকরে,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ \cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\ \sin\theta = 1.$$

বা, $\sin\frac{\pi}{4}\ \cos\theta + \cos\frac{\pi}{4}\ \sin\theta = 1$

বা, $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$

$\therefore \frac{\pi}{4} + \theta = m\pi + (-1)^{m}\ \frac{\pi}{2}$

ধরুন m জোড় সংখ্যা এবং $m = 2n$

$\therefore\ \frac{\pi}{4} + \theta = 2n\pi + (-1)^{2n}\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$

m বিজোড় হলে ধরুন $m = 2n + 1$

$\therefore\ \frac{\pi}{4} + \theta = (2n+1)\pi + (-1)^{2n+1}\frac{\pi}{2}$

$= 2n\pi + \pi - \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \theta = 2n\pi + \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$

অর্থাৎ $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$, যখন n এর মান শূন্য অথবা n একটি অখন্ড সংখ্যা।

তৃতীয় পদ্ধতি

$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta = \sqrt{2} - \cos\theta$

বা, $\sin^2\theta = (\sqrt{2} - \cos\theta)^2$

বা, $\sin^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\ \cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $1 - \cos^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\ \cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\ \cos\theta + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\ \cos\theta - 1 = 0$

$\therefore\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

কিন্তু $\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{4}$ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না,

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$

লক্ষণীয় ঃ তৃতীয় পদ্ধতিতে সমাধান করলে শুদ্ধ সমাধান $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ ছাড়াও আরও একটি অপ্রাসঙ্গিক মূল $2n\pi - \frac{\pi}{4}$ পাওয়া যায়, যা সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না। সমীকরণটিকে বর্গ করার ফলে এই সমস্যার সৃষ্টি হয়েছে। উভয় পক্ষকে বর্গ করার ফলে নির্দিষ্ট সমীকরণের $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}$ সমীকরণটি অন্তর্ভুক্ত হয় এবং প্রকৃত পক্ষে $2n\pi - \frac{\pi}{4}$ মূলটি উক্ত সমীকরণটির সমাধান।

অপ্রাসঙ্গিক মূল যেন না আসে সে জন্য $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ সমীকরণটির সমাধান পরবর্তী উদাহরণে দেখান হল।

উদাহরণ-4 ঃ সমাধান করুন $a\cos\theta + b\sin\theta = c$, যখন a, b, c ধ্রুবক।

সমাধানঃ ধরুন $a = r\cos\alpha$ এবং $b = r\sin\alpha$, যেখানে α একটি ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ এবং r ধনাত্মক।

$\therefore r = \sqrt{a^2+b^2}$. $\cos a = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ এবং $\sin a = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

এখন প্রদত্ত সমীকরণে a ও b এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$r\cos\alpha\cos\theta + r\sin\alpha\sin\theta = c$

বা, $r(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta) = c$

বা, $r\cos(\theta-\alpha) = c$

$\therefore \cos(\theta-\alpha) = \frac{c}{r} = \cos\beta$

যেখানে β একটি ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যার cosine অনুপাত $\frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ অর্থাৎ $\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

অতএব, $\theta - \alpha = 2n\pi \pm \beta$

$\therefore \theta = 2n\pi \pm \beta + \alpha$

উদাহরণ-5 ঃ সমাধান করুন $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2\sin 2\theta}$

সমাধানঃ $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2\sin 2\theta}$

বা, $(\sqrt{\sin\theta})^2 + (\sqrt{\cos\theta})^2 = \sqrt{2.2\sin\theta\cos\theta}$

বা, $(\sqrt{\sin\theta})^2 + (\sqrt{\cos\theta})^2 - 2\sqrt{\sin\theta}\sqrt{\cos\theta} = 0$

বা, $(\sqrt{\sin\theta} - \sqrt{\cos\theta})^2 = 1$

বা, $\sqrt{\sin\theta} - \sqrt{\cos\theta} = 0$

বা, $\sqrt{\sin\theta} = \sqrt{\cos\theta}$

বা, $\sin\theta = \cos\theta$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1$

বা, $\tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = k\pi + \frac{\pi}{4}$

কিন্তু k এর মান বিজোড় হলে সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না,

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান $\theta = k\pi + \frac{\pi}{4}$ যখন k এর মান শুন্য অথবা k জোড় সংখ্যা।

$\therefore \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$

উদাহরণ-6 ঃ সমাধান করুন $\sin^2 2\theta - \sin^2\theta = \frac{1}{3}\sin 3\theta$

সমাধান ঃ $\sin^2 2\theta - \sin^2\theta = \frac{1}{3}\sin 3\theta$

বা, $(2\sin\theta\cos\theta)^2 - \sin^2\theta = \frac{1}{3}(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$

বা, $4\sin^2\theta\cos^2\theta - \sin^2\theta = \sin\theta - \frac{4}{3}\sin^3\theta$

বা, $4\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta) - \sin^2\theta - \sin\theta + \frac{4}{3}\sin^3\theta = 0$

বা, $4\sin^2\theta - 4\sin^4\theta - \sin^2\theta - \sin\theta + \frac{4}{3}\sin^3\theta = 0$

বা, $3\sin^2\theta - 4\sin^4\theta - \sin\theta + \frac{4}{3}\sin^3\theta = 0$

বা, $3\sin^2\theta\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta\right) - \sin\theta\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta\right) = 0$

বা, $(3\sin^2\theta - \sin\theta)(1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta) = 0$

বা, $\sin\theta(3\sin\theta - 1)\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta\right) = 0$

যখন $\sin\theta = 0$ তখন $\theta = n\pi$

যখন $3\sin\theta - 1 = 0$

বা, $3\sin\theta = 1$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{3} = \sin\alpha$, যেখানে $\sin\alpha = \frac{1}{3}$

$\therefore \quad \theta = n\pi + (-1)^n \alpha$

আবার, যখন $1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta = 0$

বা, $\frac{4}{3}\sin^2\theta = 1$

বা, $\sin^2\theta = \frac{3}{4}$

$\therefore \quad \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \quad \theta = n\pi + (-1)^n\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

উদাহরণ-7 ঃ সমাধান করুন, $\mathbf{cosec\theta + sec\theta = 2\sqrt{2}}$

সমাধান ঃ $\quad \operatorname{cosec}\theta + \sec\theta = 2\sqrt{2}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = 2\sqrt{2}$

বা, $\cos\theta + \sin\theta = 2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

বা, $\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta + \cos\frac{\pi}{4}\sin\theta = \sin 2\theta$

বা, $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \sin 2\theta$

$\therefore \quad \frac{\pi}{4} + \theta = k\pi + (-1)^k 2\theta$

যখন k জোড়, ধরুন $k = 2m$

$\therefore \quad \frac{\pi}{4} + \theta = 2m\pi + (-1)^{2m}.2\theta = 2m\pi + 2\theta$

$\therefore \quad \theta = -2m\pi + \frac{\pi}{4} = 2n\pi + \frac{\pi}{4} = (8n+1)\frac{\pi}{4}$

যখন k বিজোড়, ধরুন $k = 2m+1$

$\therefore\ \theta + \frac{\pi}{4} = (2m+1)\pi - 2\theta$

বা, $3\theta = 2m\pi + \pi - \frac{\pi}{4}$

$= 2m\pi + \frac{3\pi}{4} = (8m + 3)\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \theta = (8m + 3)\frac{\pi}{12}$

উদাহরণ-8 ঃ সমাধান করুন $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

সমাধান ঃ $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

বা, $(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0$

বা, $2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 0$

বা, $\sin 2x\,(2\cos x + 1) = 0$

হয় $\sin 2x = 0$ $\quad \therefore\ 2x = n\pi$

$\therefore\ x = \frac{n\pi}{2}$

নাহয় $2\cos x + 1 = 0$

বা, $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore\ x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

উদাহরণ-9 ঃ সমাধান করুন $\sin 7\theta - \sqrt{3}\ \cos 4\theta = \sin\theta$

সমাধান ঃ $\sin 7\theta - \sqrt{3}\ \cos 4\theta = \sin\theta$

বা, $\sin 7\theta - \sin\theta - \sqrt{3}\ \cos 4\theta = 0$

বা, $2\cos\left(\frac{7\theta + \theta}{2}\right)\ \sin\left(\frac{7\theta - \theta}{2}\right) - \sqrt{3}\ \cos 4\theta = 0$

বা, $2\cos 4\theta \sin 3\theta - \sqrt{3}\ \cos 4\theta = 0$

বা, $\cos 4\theta\,(2\sin 3\theta - \sqrt{3}\,) = 0$

হয় $\cos 4\theta = 0$

$\therefore\ 4\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \theta = (2n + 1)\frac{\pi}{8}$

অথবা, $2\sin 3\theta - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ \sin 3\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ 3\theta = \mathrm{n}\pi + (-1)^{\mathrm{n}}\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ \theta = \frac{\mathrm{n}\pi}{3} + (-1)^{\mathrm{n}}\frac{\pi}{9}$

$\therefore\ \theta = \{3\mathrm{n}+(-1)^{\mathrm{n}}\}\frac{\pi}{9}$

উদাহরণ-10 ঃ সমাধান করুন $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta$

সমাধান ঃ $\sin\theta + \sin2\theta + \sin3\theta = 1 + \cos\theta + \cos2\theta$

বা, $\sin\theta + \sin3\theta + \sin2\theta = \cos\theta + 1 + \cos2\theta$

বা, $2\sin2\theta \cos\theta + \sin2\theta = \cos\theta + 2\cos^2\theta$

বা, $2.2\sin\theta \cos\theta \cos\theta + 2\sin\theta \cos\theta - \cos\theta - 2\cos^2\theta = 0$

বা, $4\sin\theta \cos^2\theta + 2\sin\theta \cos\theta - \cos\theta - 2\cos^2\theta = 0$

বা, $2\cos\theta \sin\theta - \cos\theta + 4\cos^2\theta \sin\theta - 2\cos^2\theta = 0$

বা, $\cos\theta (2\sin\theta - 1) + 2\cos^2\theta (2\sin\theta - 1) = 0$

বা, $(2\cos^2\theta + \cos\theta) (2\sin\theta - 1) = 0$

যখন $\cos\theta (2\cos\theta + 1) (2\sin\theta - 1) = 0$

যখন, $\cos\theta = 0$

$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

যখন, $2\sin\theta - 1 = 0$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$

যখন $2\cos\theta + 1 = 0$

$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

অনুশীলনী-১৭.২

সমাধান করুন

1. $5\sin^2x + \cos^2x = 4$
2. $\tan\theta - \cot\theta = \operatorname{cosec}\theta$
3. $\sec^2\theta + \tan^2\theta = 3\tan\theta$
4. $\tan^3 - \sec^2\theta = 4\tan^2\theta - 5\tan\theta$
5. $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \tan\theta = 2$
6. $\sin x + \sqrt{3}\ \cos x = \sqrt{2}$
7. $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{3}$
8. $\sin5\theta + \sin3\theta = \sin4\theta$
9. $\sqrt{2}\cos3\theta - \cos\theta = \cos5\theta$
10. $\tan\theta + \tan2\theta + \tan3\theta = 0$
11. $\cot2x = \cos x + \sin x$

পাঠ ৩ কয়েকটি বিশেষ দৃষ্টান্ত

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বিশেষ কয়েকটি ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করতে পারবেন।

sine অথবা cosine অনুপাতের মান 1 বা –1 এর সমান হলে, সেই সমীকরণ সমাধান করে অজানা কোণের জন্য যে মানসমূহ পাওয়া যায় তাদেরকে একটি আলাদা ধরনের রাশির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। নিম্নে এই ধরনের চারটি দৃষ্টান্তের আলোচনা করা হল।

(i) মনে করুন, $\sin\theta = 1$,

তাহলে, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \theta = n\pi + (-1)^m.\frac{\pi}{3}$, যখন m এর মান শূন্য, অথবা একটি অখন্ড সংখ্যা।

যদি m এর মান জোড় হয়, অর্থাৎ $m = 2n$ (n একটি অখন্ড সংখ্যা) হয়, তাহলে

$\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

যদি m এর মান বিজোড় হয়, অর্থাৎ $m = 2n+1$ (n একটি অখন্ড সংখ্যা) হয়, তাহলে,

$\theta = (2n+1)\pi - \frac{\pi}{2} = 2n\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2n\pi + \frac{\pi}{2} = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

সুতরাং $\sin\theta = 1$ হলে $\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$, যখন n এর মান শূন্য, অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা।

(ii) মনে কর, $\sin\theta = -1$

তাহলে, $\sin\theta = -\sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ \theta = m\pi + (-1)^m.\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, যখন m এর মান শূন্য, অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা।

যদি m এর মান জোড় হয়. অর্থাৎ $m = 2n$ (n একটি অখন্ড সংখ্যা) হয়, তাহলে,

$\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{2} = (4n-1)\frac{\pi}{2}$

যদি m এর মান বিজোড় হয়, অর্থাৎ $m = 2n-1$ (n একটি অখন্ড সংখ্যা) হয়, তাহলে

$\theta = (2n-1)\pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$= 2n\pi - \pi + \frac{\pi}{2} = 2n\pi - \frac{\pi}{2} = (4n-1)\frac{\pi}{2}$.

সুতরাং, $\sin\theta = -1$ হলে, $\theta = (4n-1)\frac{\pi}{2}$ যখন n এর মান শূন্য, অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা।

অনুরূপভাবে সহজেই দেখানো যায়,

(iii) যদি $\cos\theta = 1$ হয়, তবে $\theta = 2n\pi$;

(iv) যদি $\cos\theta = -1$ হয়, তবে $\theta = (2n+1)\pi$.

উদাহরণ-1 ঃ সমাধান করুন $\sin\theta - 2 = \cos 2\theta$

সমাধান ঃ $\sin\theta - 2 = \cos 2\theta$

বা, $\sin\theta - 2 = 1 - 2\sin^2\theta$

বা, $2\sin^2\theta + \sin\theta - 3 = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 2\sin\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$

বা, $2\sin\theta(\sin\theta - 1) + 3(\sin\theta - 1) = 0$

বা, $(\sin\theta - 1)(2\sin\theta + 3) = 0$

কিন্তু $2\sin\theta + 3 \neq 0$, কারণ $\sin\theta$ এর সংখ্যামূলক মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না।

$\therefore \sin\theta - 1 = 0$

বা, $\sin\theta = 1$

$\therefore \theta = (4n + 1)\dfrac{\pi}{2}$

উদাহরণ- 2 ঃ সমাধান করুন $\cos\theta + \sin\theta + \sqrt{2} = 0$

সমাধান ঃ $\cos\theta + \sin\theta + \sqrt{2} = 0$

বা, $\cos\theta + \sin\theta = -\sqrt{2}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = -1$

বা, $\cos\theta\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\theta\sin\dfrac{\pi}{4} = -1$

বা, $\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

$\therefore \theta - \dfrac{\pi}{4} = (2n + 1)\pi$

$\therefore \theta = (2n + 1)\pi + \dfrac{\pi}{4}$

বা, $\theta = 2n\pi + \pi + \dfrac{\pi}{4} = 2n\pi + \dfrac{5\pi}{4}$

$\therefore \theta = (8n + 5)\dfrac{\pi}{4}$

অনুশীলনী-১৭.৩

1. $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta = 2$
2. $\sin 2x \tan x + 1 = \sin 2x + \tan x$
3. $\tan\theta + \cot\theta = 2$

পাঠ ৪ নির্দিষ্ট ব্যবধিতে সমাধান নির্ণয়

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- নির্দিষ্ট ব্যবধিতে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করতে পারবেন।

পূর্ববর্তী পাঠগুলোতে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান অর্থাৎ অজানা কোণের জন্য প্রাপ্ত সমস্ত মান একটি রাশির সাহায্যে প্রকাশ করা হয়েছিল। বর্তমানে পাঠে আমরা নির্দিষ্ট ব্যবধিতে ত্রিকোণমিতি সমীকরণের সমাধান অর্থাৎ নির্দিষ্ট ব্যবধির মধ্যে প্রাপ্ত কোণের মানসমূহ নির্ণয় করবো।

উদাহরণ-1 ঃ সমাধান করুন $2\sin x \sin 3x = 1$ যখন $0<x<2\pi$.

সমাধান ঃ $2\sin x \sin 3x = 1$

বা, $\cos(3x - x) - \cos(3x + x) = 1$

বা, $\cos 2x - \cos 4x = 1$

বা, $\cos 2x - (1 + \cos 4x) = 0$

বা, $\cos 2x - 2\cos^2 2x = 0$

বা, $\cos 2x\,(1 - 2\cos 2x) = 0$

এখন $\cos 2x = 0$ হলে

$2x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ x = (2n + 1)\frac{\pi}{4}$

যখন $1 - 2\cos 2x = 0$

বা, $\cos 2x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ 2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\therefore\ x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

যখন $n = 0$ তখন $x = \frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{6}$

যখন $n = 1$ তখন $x = 3\frac{\pi}{4},\ \pi \pm \frac{\pi}{6}$ অর্থাৎ $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

যখন $n = 2$ তখন $x = \frac{5\pi}{4}, 2\pi \pm \frac{\pi}{6}$ অর্থাৎ $x = \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$

যখন $n = 3$ তখন $x = \frac{7\pi}{4}, 3\pi \pm \frac{\pi}{6}$ অর্থাৎ $x = \frac{7\pi}{4}, \frac{17\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}$

কিন্তু $0<x<2\pi$

$\therefore\ x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

উদাহরণ-2 ঃ সমাধান করুন $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta = 0$ যখন $0<\theta<\pi$

সমাধান ঃ $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta = 0$

বা, $(\cos 7\theta + \cos\theta) + (\cos 5\theta + \cos 3\theta) = 0$

বা, $2\cos4\theta \cos3\theta + 2\cos4\theta \cos\theta = 0$

বা, $2\cos4\theta(\cos3\theta + \cos\theta) = 0$

বা, $2\cos4\theta. 2\cos2\theta \cos\theta = 0$

বা, $4\cos4\theta \cos2\theta \cos\theta = 0$

$\cos4\theta = 0 \quad 4\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \quad \theta = (2n + 1)\frac{\pi}{8}$

$\cos2\theta = 0 \quad 2\theta =(2n + 1)\frac{\pi}{2} \quad \theta = (2n + 1)\frac{\pi}{4}$

এবং $\cos\theta = 0 \quad \theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

যেখানে $n = 0, 1, 2, 3,$ - - - - - - - - - -

যখন $n = 0,$ তখন $\theta = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

যখন $n = 1$ তখন $\theta = \frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$

যখন $n = 2$ তখন $\theta = \frac{5\pi}{8}, \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}$

যখন $n = 3$ তখন $\theta = \frac{7\pi}{8}, \frac{7\pi}{4}, \frac{7\pi}{2}$

কিন্তু $0<\theta<\pi$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$, এবং $\frac{\pi}{2}$

উদাহরণ-3 ঃ সমাধান করুন $1+\sqrt{3}\tan^2\theta = (1+\sqrt{3})\tan\theta$ যখন $0<\theta<360°$

সমাধানঃ $1 + \sqrt{3}\tan^2\theta = (1 + \sqrt{3})\tan\theta$

বা, $1 + \sqrt{3}\tan^2\theta = \tan\theta + \sqrt{3}\tan\theta$

বা, $1 - \tan\theta + \sqrt{3}\tan^2\theta - \sqrt{3}\tan\theta = 0$

বা, $(1 - \tan\theta)(1 - \sqrt{3}\tan\theta) = 0$

যখন $1 - \tan\theta = 0$

$\therefore \tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$

আবার যখন, $1 - \sqrt{3}\tan\theta = 0$

$\therefore \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = n\pi + \frac{\pi}{6}$

যেখানে $n = 0, 1, 2, 3,$ - - - - - - - - - - - - -

যখন $n = 0$ তখন $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$

" $n = 1$ " $\theta = \pi + \frac{\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{6}$ অর্থাৎ $\theta = \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}$

" $n = 2$ " $\theta = 2\pi + \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{6}$ অর্থাৎ $\theta = \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{6}$

কিন্তু $0°<\theta<2\pi$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

উদাহরণ-4 ঃ সমাধান করুন $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ যখন $-\pi<x<\pi$

সমাধান ঃ $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$

বা, $2\sin^2 x - 2 + \sin^2 2x = 0$

বা, $-2(1 - \sin^2 x) + (2\sin x \cos x)^2 = 0$

বা, $-2\cos^2 x + 4\sin^2 x \cos^2 x = 0$

বা, $-2\cos^2 x\,(1 - 2\sin^2 x) = 0$

বা, $-2\cos^2 x.\,\cos 2x = 0$

হয় $\cos^2 x = 0$

বা, $\cos x = 0$

$\therefore\ x = (2n + 1)\dfrac{\pi}{2}$

আবার, $\cos 2x = 0$

$\therefore\ 2x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\ x = (2n+1)\dfrac{\pi}{4}$

যখন $n = 0$	তখন $x = \dfrac{\pi}{2}$,	$\dfrac{\pi}{4}$
" $n = 1$	" $x = \dfrac{3\pi}{2}$,	$\dfrac{3\pi}{4}$
" $n = -1$	" $x = -\dfrac{\pi}{2}$,	$-\dfrac{\pi}{4}$
" $n = 2$	" $x = \dfrac{5\pi}{2}$,	$\dfrac{5\pi}{4}$
" $n = -2$	" $x = -\dfrac{3\pi}{2}$,	$-\dfrac{3\pi}{4}$

কিন্তু $-\pi < x<\pi$

$\therefore\ x = \pm\dfrac{\pi}{4},\quad \pm\dfrac{\pi}{2},\quad \pm\dfrac{3\pi}{4}$

উদাহরণ-5 ঃ সমাধান করুন $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2$, যখন $-2\pi<\theta<2\pi$

সমাধান ঃ $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2$

বা, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \dfrac{1}{2}\cos\theta = 1$

বা, $\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6} - \cos\theta\sin\dfrac{\pi}{6} = 1$

বা, $\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$

$\therefore\ \theta - \dfrac{\pi}{6} = (4n+1)\dfrac{\pi}{2}$

বা, $\theta = (4n + 1)\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}$

$= 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}$

$= 2n\pi + \dfrac{4\pi}{6}$

$= 2n\pi + \dfrac{2\pi}{3}$

$= (6n+2)\dfrac{\pi}{3}$

যখন $n = 0$ তখন $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

" $n = 1$ " $\theta = \dfrac{8\pi}{3}$

" $n = -1$ " $\theta = -\dfrac{4\pi}{3}$

কিন্তু $-2\pi < \theta < 2$□

$\therefore \quad \theta = -\dfrac{4\pi}{3} \,.\; \dfrac{2\pi}{3}$

অনুশীলনী-১৭.৪

সমাধান করুন

1. $4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5$ যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$
2. $4\sin\theta\cos\theta = 1 - 2\sin\theta + 2\cos\theta$ যখন $0° < \theta < 180°$
3. $\cos 7\theta = \cos 3\theta + \sin 5\theta$ যখন $-90° < \theta < 90°$
4. $\cot\theta + \tan\theta = 2\sec\theta$ যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$
5. $4\cos x \cos 2x \cos 3x = 1$ যখন $0 < x < \pi$
6. $4\cot 2\theta = \cos t^2\theta - \tan^2\theta$ যখন $0° < \theta < 360°$
7. $\sec^2\dfrac{x}{2} = 2\sqrt{2}\,\tan\dfrac{x}{2}$ যখন $0 < x < 2\pi$
8. $\sin\theta - 2 = \cos\theta$ যখন $-2\pi\ \pi\ \theta\ \pi\ 2\pi$

উত্তরমালা

অনুশীলনী-১৭.১

1. $\dfrac{2}{5}n\pi,\ 2n\pi$ 2. $\dfrac{n\pi}{4}, \dfrac{n\pi}{12}$ 3. $\dfrac{2k\pi}{m+n}, \dfrac{(2k+1)\pi}{m-n}$

অনুশীলনী-১৭.২

1. $n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$ 2. $2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$ 3. $n\pi + \dfrac{\pi}{4}, n\pi + \alpha$ যখন $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$

4. $n\pi + \dfrac{\pi}{4}$, $n\pi + \alpha$ যখন $\tan\alpha = 2 + \sqrt{3}$ এবং $n\pi + \beta$ যখন $\tan\beta = 2 - \sqrt{3}$

5. $2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$ 6. $2n\pi + \dfrac{5\pi}{12}, 2n\pi - \dfrac{\pi}{12}$ 7. $2n\pi + \dfrac{\pi}{3}$ 8. $\dfrac{n\pi}{4}, 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$ 9. $(2n+1)\dfrac{\pi}{6}, n\pi \pm \dfrac{\pi}{8}$

10. $\dfrac{\pi}{3}$, $n\pi \pm \alpha$ যখন $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 11. $n\pi - \dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{n\pi}{2} + (-1)^n\dfrac{\alpha}{2}$, যখন $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

অনুশীলনী-১৭.৩

1. $2n\pi - \dfrac{\pi}{6}$ 2. $(4n+1)\dfrac{\pi}{4}$, $n\pi + \dfrac{\pi}{4}$

অনুশীলনী-১৭.৪

1. $\pm\dfrac{\pi}{3}$, $\pm\dfrac{5\pi}{3}$ 2. $30°, 120°, 150°$

3. $-75°, -72°, -36°, -15°, 0°, 36°, 72°$ 4. $-\dfrac{11\pi}{6}$, $-\dfrac{7\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$

5. $\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{5\pi}{8}, \dfrac{7\pi}{8}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}$ 6. $45°, 135°, 180°, 225°, 315°$

7. $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$ 8. $-\dfrac{3}{2}\pi$, $\dfrac{1}{2}\pi$.