ইউনিট ১৮

বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন

ভূমিকা

পূর্ববর্তী ইউনিটে আপনার বৃত্তীয় ফাংশন কি সেই সম্পর্কে জানতে পেরেছেন। ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন, রেঞ্জ, পর্যায় ইত্যাদি সম্পর্কে অবগত হয়েছেন। বর্তমান ইউনিটে বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন সম্পর্কে অবগত হবেন। বৃত্তীয় ফাংশন ও বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন এর মধ্যে সম্পর্ক কি সেই সম্পর্কে অবগত হবেন।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- *বৃত্তীয় ফাংশনের বিপরীত অন্বয় সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন,*
- *বৃত্তীয় ফাংশনের বিপরীত অন্বয় ও তাদের মুখ্যমান বর্ণনা করতে পারবেন,*
- *বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশানগুলির পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন এবং তা প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন,*
- *বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের অভেদাবলী প্রমাণ ও প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন।*

পাঠ ১ সংজ্ঞা, ধারণা ও কয়েকটি মৌলিক সম্পর্ক

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের ধারণা অর্জন করবেন,
- বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের মখ্যমান সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের মৌলিক সম্পর্ক সম্বন্ধে ধারণা লাভ করবেন।

বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন

$\sin\theta = x$ হলে আমরা বুঝি θ একটি কোণ যার sine-এর মান x। এ সম্পর্কটি কোন কোন সময় বিপরীতক্রমে $\theta = \sin^{-1}x$ আকারে লেখা হয়। সুতরাং $\sin^{-1}x$ প্রতীকটি একটি কোণ নির্দেশ করে যার sine এর মান x। অতএব $\sin\theta = x$ এবং $\theta = \sin^{-1}x$ এই দুটি সম্পর্ক অভিন্ন। যখন একটি সম্পর্ক দেয়া থাকে তখন অপরটি সরাসরি পাওয়া যায়। তবে মনে রাখতে হবে যে, $\sin^{-1}x$ একটি কোণ, কিন্তু $\sin\theta$ দুটি বাহুর অনুপাত বিধায় এটি একটি বিশুদ্ধ সংখ্যা। $\sin^{-1}x$ সংকেতটি সাধারণত "সাইন ইনভারস x" পড়া হয়। কোন কোন সময় এটাকে arc $\sin x$- ও বলা হয়। $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\text{cosec}^{-1}x$ প্রভৃতি সংকেতগুলো $\sin^{-1}x$ এর মত একই অর্থ বহন করে। অর্থাৎ $\cos^{-1}x$ একটি কোণ যার cosine x- এর সমান, $\tan^{-1}x$ একটি কোণ যার tangent x-এর সমান প্রভৃতি। এদেরকে যথাক্রমে "কস ইনভারস x", "ট্যান ইনভারস x" প্রভৃতি পড়া হয়।

আমরা পাই,

$\sin\theta = x$ - - - - - - - - - - - - (i)

তাহলে, $\theta = \sin^{-1}x$ - - - - - - - - - (ii)

(ii) নং সমীকরণ (i) নং সমীকরণের বিপরীত সম্পর্ক নির্দেশ করে। এ জন্য $\sin^{-1}x$- কে বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন বলা হয়। অনুরূপভাবে, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\cot^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\text{cosec}^{-1}x$ প্রভৃতি সবগুলোই বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন।

লক্ষণীয় ঃ $\sin^{-1}x$ এবং $(\sin x)^{-1}$ এই দুটি রাশি এক নয়। $\sin^{-1}x$ একটি কোণ নির্দেশ করে যার sine-এর মান x কিন্তু $(\sin x)^{-1} = \dfrac{1}{\sin x}$ একটি বিশুদ্ধ সংখ্যা।

বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের মুখ্যমান

$\sin\theta = x$ হলে, x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $n\pi + (-1)^n\theta$ রাশি থেকে প্রাপ্ত সবগুলো কোণের সাইন (sine) অনুপাতের মান x হবে, অতএব দেখা যাচ্ছে $\sin^{-1}x$ এর অসংখ্য মান থাকতে পারে এবং এজন্যই $\sin^{-1}x$ একটি বহুমান বিশিষ্ট ফাংশন এবং $\sin^{-1}x$ এর সাধারণ মান $n\pi + (-1)^n\theta$. বা, $n\pi + (-1)^n(\sin^{-1}x)$.

উদাহরণ স্বরূপ,

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ হলে θ এর ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক মান $30°$

সুতরাং $\theta = \sin^{-1}\dfrac{1}{2} = 30° = \dfrac{\pi}{6}$

আবার $\sin\theta = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$ হলে $\theta = n\pi + (-1)^n\dfrac{\pi}{6}$

n এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য θ এর ভিন্ন ভিন্ন মান পাওয়া যাবে। কিন্তু প্রত্যেক ক্ষেত্রেই θ কোণের সাইন অনুপাত $\dfrac{1}{2}$ এর সমান।

θ এর সকল মানের জন্য ক্ষুদ্রতম (ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক) সংখ্যাগত মানকে θ এর মুখ্য মান বলে।

$\therefore\ \theta = \sin^{-1}\frac{1}{2}$ হলে, θ এর মুখ্যমান 30° এবং তার সাধারণ মান $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$

অনুরূপভাবে $\cos\theta = x$ হলে, $\cos^{-1}x$ এর সাধারণ মান $2n\pi\pm\theta$ এবং $\tan\theta = x$ হলে, $\tan^{-1}x$-এর সাধারণ মান $n\pi + \theta$. অতএব বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের ক্ষুদ্রতম সংখ্যা সূচক (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) মানকে তার মুখ্যমান বলে।

যখন কোন বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের জন্য দুইটি ক্ষুদ্রতর মান থাকে (একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক), তখন ধনাত্মক মানকে ঐ ফাংশনের মুখ্যমান বলে।

যেমন, $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\cos(-45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

এখানে $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ এর মুখ্যমান 45°.

বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনগুলির মধ্যে মৌলিক সম্পর্ক

(i) ধরুন, $\sin\theta = x \ \therefore\ \theta = \sin^{-1}x = \sin^{-1}\sin\theta$

অতএব, $\theta = \sin^{-1}\sin\theta$

অনুরূপভাবে, $\theta = \cos^{-1}\cos\theta$

$\theta = \tan^{-1}\tan\theta$ ইত্যাদি।

(ii) যদি $\sin\theta = x$ হয়, তবে, $\theta = \sin^{-1}x$

$\sin\theta = x$ সমীকরণে, θ–এর মান বসিয়ে,

$x = \sin\theta = \sin\sin^{-1}x$

অতএব, $x = \sin\sin^{-1}x$

অনুপভাবে, $x = \cos\cos^{-1}x$

$x = \tan\tan^{-1}x$ ইত্যাদি।

(iii) $\sin\theta = x$ হলে $\theta = \sin^{-1}x$

আবার $\sin\theta = x \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{x} \quad \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} = x \quad \theta = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$

$\therefore\ \sin^{-1}x = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$

আবার, $\operatorname{cosec}\theta = x$ হলে $\theta = \operatorname{cosec}^{-1}x$

এখন, $\operatorname{cosec}\theta = x \quad \frac{1}{\sin\theta} = x \quad \sin\theta = \frac{1}{x} \quad \theta = \sin^{-1}\frac{1}{x}$

$\therefore\ \operatorname{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}\frac{1}{x}$

তাহলে আমরা পাই,

$\sin^{-1}x = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$, $\operatorname{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}\frac{1}{x}$

অনুরূপভাবে, $\cos^{-1}x = \sec^{-1}\frac{1}{x}$, $\sec^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1}{x}$

এবং $\tan^{-1}x = \cot^{-1}\frac{1}{x}$, $\cot^{-1}x = \tan^{-1}\frac{1}{x}$

পাঠ ২ বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের রূপান্তর

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- যে কোন বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনকে অন্য যে কোন বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনে রূপান্তর করতে পারবেন।

বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের রূপান্তর

ধরুন, $\sin^{-1}x=\theta$, তাহলে $\sin\theta = x$

i) $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2} \qquad \therefore\ \theta = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

ii) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \therefore\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

iii) $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{x} \qquad \therefore\ \theta = \operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{1}{x}$

iv) $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \therefore\ \theta = \sec^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

v) $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad \therefore\ \theta = \cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

সুতরাং, $\theta = \sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{1}{x}$

$= \sec^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

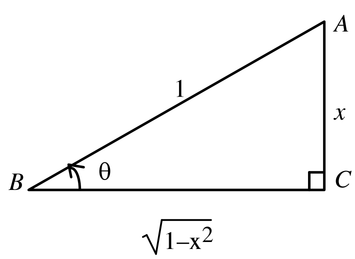
একইভাবে যে কোন বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনকে অন্য যে কোন বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনে পরিবর্তিত করা যায়।

জ্যামিতিক পদ্ধতি ঃ

ধরুন $\sin^{-1}x = \theta$, অতএব, $\sin\theta = x$

মনে করুন, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার C কোণ সমকোণ এবং $\angle ABC = \theta$

যেহেতু, $\sin\theta = x$, অতএব, $AC = x$ এবং $AB = 1$



এবং $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{1-x^2}$

এখন, $\cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}$ $\therefore\ \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$ $\theta = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

$\tan\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\therefore\ \theta = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\mathrm{cosec}\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{x}$ $\therefore\ \theta = \mathrm{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$

$\sec\theta = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\therefore\ \theta = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\cot\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\therefore\ \theta = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

অতএব, $\sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$

$$= \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

পাঠ ৩ কতকগুলি বিশেষ সূত্র ও তাদের প্রমাণ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের কতকগুলি সূত্র সম্পর্কে জানতে পারবেন এবং তাদের প্রমাণ করতে পারবেন।

সূত্র

i) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$

ii) $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\dfrac{x-y}{1+xy}$

iii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}$

প্রমাণ

ধরুন, $\tan^{-1}x = \alpha$ এবং $\tan^{-1}y = \beta$

তাহলে $\tan\alpha = x$ এবং $\tan\beta = y$

(i) এখন $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{x+y}{1-xy}$

$\therefore\ \alpha+\beta = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$

অর্থাৎ, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$

(ii) আবার, $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{x-y}{1+xy}$

$\therefore\ \alpha-\beta = \tan^{-1}\dfrac{x-y}{1+xy}$

অর্থাৎ, $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\dfrac{x-y}{1+xy}$

(iii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z$

$= \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy} + \tan^{-1}z$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{x+y}{1-xy}+z}{1-\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).z}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{x+y+z(1-xy)}{1-xy}}{\frac{1-xy-z(x+y)}{1-xy}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}$$

দ্রষ্টব্য ঃ বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনগুলো বহুমানবিশিষ্ট ফাংশন বলে ত্রিকোণমিতিক সমস্যা সমাধানে মুখ্যমান ব্যবহার করে সব সময় সঠিক সমাধান পাওয়া যায় না। (i) নং সূত্রে মুখ্যমান ব্যবহার করে সঠিক সমাধান পাওয়া যাবে যদি $xy\le 1$ হয়। অনুরূপভাবে (iii) নং সূত্রে যদি মুখ্যমান ব্যবহার করে সঠিক সমাধান পাওয়া যাবে যদি $yz+zx+xy\le 1$ হয়।

সূত্র

i) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

ii) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

iii) $\operatorname{cosec}^{-1}x+\sec^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

প্রমাণ

(i) ধরুন, $\sin^{-1}x=\theta$ তাহলে $\sin\theta=x$

এখন $\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=x$

অর্থাৎ, $\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x$

অতএব $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

(ii) ধরুন, $\tan^{-1}x=\theta$, তাহলে $\tan\theta=x$

এখন $\tan\theta=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\therefore \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=x$ অর্থাৎ, $\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x$

অতএব $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

(iii) ধরুন, $\operatorname{cosec}^{-1}x=\theta$, তাহলে $\operatorname{cosec}\theta=x$

এখন $\operatorname{cosec}\theta=\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\therefore \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=x$

অর্থাৎ $\sec^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}-\operatorname{cosec}^{-1}x$

অতএব $\operatorname{cosec}^{-1}x+\sec^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

সূত্র

$2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

প্রমাণঃ মনে করুন, $\tan^{-1}x=\theta$,

তাহলে, $\tan\theta=x$.

(i) এখন, $\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2x}{1+x^2}$

$\therefore 2\theta=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

অর্থাৎ $2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

(ii) $\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

$\therefore\ 2\theta=\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

অর্থাৎ $2\tan^{-1}x=\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

(iii) $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2x}{1-x^2}$

$\therefore\ 2\theta=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$

অর্থাৎ $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$

সুতরাং $2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$

সূত্র

i) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right\}$

ii) $\sin^{-1}x-\sin^{-1}y=\sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right\}$

iii) $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}\left\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}$

iv) $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\cos^{-1}\left\{xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}$

প্রমাণ

ধরুন, $\sin^{-1}x=\alpha$ এবং $\sin^{-1}y=\beta$;

তাহলে, $\sin\alpha=x$ এবং $\sin\beta=y$.

(i) এখন, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\sin\alpha.\sqrt{1-\sin^2\beta}+\sin\beta.\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$

$\therefore\ \alpha+\beta=\sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right\}$

অর্থাৎ, $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right\}$

(ii) আবার, $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\beta}-\sin\beta\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$

$=x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}$

$\therefore\ \alpha-\beta=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\}.$

অর্থাৎ, $\sin^{-1}x-\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\}$

আবার মনে করুন, $\cos^{-1}x=\gamma$ এবং $\cos^{-1}y=\delta$;

তাহা হইলে, $\cos\gamma=x$ এবং $\cos\delta=y$.

(iii) এখন, $\cos(\gamma+\delta)=\cos\gamma\cos\delta-\sin\gamma\sin\delta$

$=\cos\gamma\cos\delta-\sqrt{1-\cos^2\gamma}\ .\sqrt{1-\cos^2\delta}$

$=xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$

$\therefore\ \gamma+\delta=\cos^{-1}\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$

অর্থাৎ, $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$

(iv) আবার $\cos(\gamma-\delta) = \cos\gamma\cos\delta + \sin\gamma\sin\delta$

$$= \cos\gamma\cos\delta + \sqrt{1-\cos^2\gamma}\sqrt{1-\cos^2\delta}$$

$$= xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$

$$\therefore\ \gamma-\delta = \cos^{-1}\{xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\ \}$$

অর্থাৎ, $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y = \cos^{-1}\{xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$

সূত্র

i) $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

ii) $2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2-1)$

iii) $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$

iv) $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x-4x^3)$

v) $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3-3x)$

vi) $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$

প্রমাণঃ i) ধরুন $\sin^{-1}x = \alpha$

$\therefore\ \sin\alpha = x \qquad \therefore\ \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$

এখন $\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

বা, $\sin2\alpha = 2x\sqrt{1-x^2}$

$\therefore\ 2\alpha = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

বা, $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

ii) ধরুন $\cos^{-1}x = \alpha$

$\therefore\ \cos\alpha = x$

এখন $\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha-1 = 2x^2-1$

$\therefore\ 2\alpha = \cos^{-1}(2x^2-1)$

$\therefore\ 2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2-1)$

iii) ধরুন $\tan^{-1}x = \alpha$

$\therefore\ \tan\alpha = x$

এখন $\tan2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{2x}{1-x^2}$

$\therefore\ 2\alpha = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$

$\therefore\ 2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$

iv) ধরুন, $\sin^{-1}x = \alpha$

$\therefore\ \sin\alpha = x$

এখন $\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$= 3x - 4x^3$

$\therefore\ 3\alpha = \sin^{-1}(3x-4x^3)$

$\therefore\ 3\sin^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$

v) ধরুন $\cos^{-1}x = \alpha$

$\therefore\ \cos\alpha = x$

এখন $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 4x^3 - 3x$

$\therefore\ 3\alpha = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$

$\therefore\ 3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$

vi) ধরুন $\tan^{-1}x = \alpha$

$\therefore\ \tan\alpha = x$

এবং $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha} = \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$

$\therefore\ 3\alpha = \tan^{-1}\dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$

$\therefore\ 3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$

লক্ষণীয় ঃ বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনগুলো বহুমান বিশিষ্ট ফাংশন। এ কারণে এ অধ্যায়ে প্রতিষ্ঠিত সূত্রগুলো ব্যবহার করে অনেক সময় সকল সংখ্যাবাচক অংকের সমাধান পাওয়া যায় না এবং সূত্রগুলোর পরিবর্তন প্রয়োজন হয়। পরিবর্তনগুলো নিম্নরূপ

(i) যদি $x>0$, $y>0$ এবং $xy>1$ হয় তবে,

$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \pi + \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$

(ii) যদি $x<0$, $y<0$ এবং $xy>1$ হয় তবে,

$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = -\pi + \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$

(iii) যদি $yz + zx + xy>1$ হয় তবে,

$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi + \tan^{-1}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}$

(iv) যদি $x^2+y^2>1$ হয় তবে, $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \pi - \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$

(v) যদি $x<0$, $y<0$ এবং $x^2+y^2>1$ হয়, তবে

$\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = -\pi - \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$

(vi) যদি $x+y<0$ হয়, তবে,

$\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = 2\pi - \cos^{-1}\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$

পাঠ ৪ বিবিধ সমস্যা ও সমাধান

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন সংক্রান্ত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

উদাহরণ-1 ঃ প্রমাণ করুন ঃ $\tan^{-1}\frac{5}{6} - \tan^{-1}\frac{1}{11} = \tan^{-1}\frac{49}{71}$

সমাধান ঃ $\tan^{-1}\frac{5}{6} - \tan^{-1}\frac{1}{11}$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{5}{6}-\frac{1}{11}}{1+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{11}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{55-6}{66}}{\frac{66+5}{66}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{49}{71}$$

উদাহরণ-2 ঃ প্রমাণ করুন ঃ $\tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} + \tan^{-1}\frac{1}{18} = \cot^{-1}3.$

সমাধান ঃ $\tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} + \tan^{-1}\frac{1}{18}$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}} + \tan^{-1}\frac{1}{18}$$

$$= \tan^{-1}\frac{15}{55} + \tan^{-1}\frac{1}{18}$$

$$= \tan^{-1}\frac{3}{11} + \tan^{-1}\frac{1}{18}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{3}{11}+\frac{1}{18}}{1-\frac{3}{11}\cdot\frac{1}{18}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{54+11}{198-3}$$

$$= \tan^{-1}\frac{65}{195}$$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{3}$$

$$= \cot^{-1}3$$

উদাহরণ-3 ঃ প্রমাণ করুন, $4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

সমাধান ঃ $4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$

$$= 2.2\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$= 2\tan^{-1}\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$\boxed{2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}}$$

$$= 2\tan^{-1}\frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$= 2\tan^{-1}\frac{5}{12} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{10}{12}}{\frac{119}{144}} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$= \tan^{-1}\frac{120}{119} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{120\infty 239-119}{199\infty 239}}{\frac{119\infty 239+120}{119\infty 239}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{28680-119}{28441+120}$$

$$= \tan^{-1}\frac{28561}{28561}$$

$$= \tan^{-1} 1$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

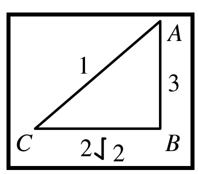
উদাহরণ-4 ঃ প্রমাণ করুন, $\sin^{-1}\frac{1}{3} + \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}} = \tan^{-1}\sqrt{2}$

সমাধান ঃ $\sin^{-1}\frac{1}{3} + \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}} + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

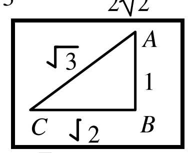
$$= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{3\sqrt{2}}{3} = \tan^{-1}\sqrt{2}$$



$BC = \sqrt{AC^2-AB^2}$
$= \sqrt{3^2-1}$
$= \sqrt{9-1}$
$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\therefore \sin^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$



$AB = \sqrt{AC^2-BC^2}$
$= \sqrt{3-2}$
$= \sqrt{1} = 1$

$\therefore \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$

উদাহরণ-5 ঃ প্রমাণ করুন, $\cos^{-1}\frac{63}{65} + 2\tan^{-1}\frac{1}{5} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

সমাধান ঃ $\cos^{-1}\frac{63}{65} + 2\tan^{-1}\frac{1}{5}$

$$= \tan^{-1}\frac{16}{63} + \tan^{-1}\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}$$

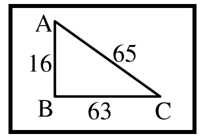
$$= \tan^{-1}\frac{16}{63} + \tan^{-1}\frac{5}{12}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{16}{63}+\frac{5}{12}}{1-\frac{16}{63}\cdot\frac{5}{12}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{192+315}{756-80}$$

$$= \tan^{-1}\frac{507}{675}$$

$$= \tan^{-1}\frac{3}{4}$$



$\therefore\ AB = \sqrt{AC^2-BC^2}$

$= \sqrt{65^2-63^2}$

$= \sqrt{(65+63)(63-63)}$

$= \sqrt{128\infty 2}$

$= \sqrt{256} = 16$

$\therefore\ \cos^{-1}\frac{63}{65} = \tan^{-1}\frac{16}{63}$

উদাহরণ-6 ঃ প্রমাণ করুন, $\cos^{-1}\frac{12}{13} + \sec^{-1}\sqrt{5} - \tan^{-1}\frac{13}{7} = \tan^{-1}\frac{177}{391}$

সমাধানঃ $\sin^{-1}\frac{12}{13} + \sec^{-1}\sqrt{5} - \tan^{-1}\frac{13}{7}$

$$= \tan^{-1}\frac{5}{12} + \tan^{-1}2 - \tan^{-1}\frac{13}{7}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{5}{12}+2}{1-\frac{5}{12}.2} - \tan^{-1}\frac{13}{7}$$

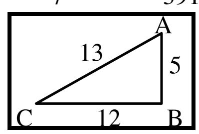
$$= \tan^{-1}\frac{29}{2} - \tan^{-1}\frac{13}{7}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{29}{2}-\frac{13}{7}}{1+\frac{29}{2}\cdot\frac{13}{7}}$$

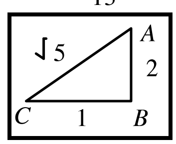
$$= \tan^{-1}\frac{29\infty 7-13\infty 2}{14+29\infty 13}$$

$$= \tan^{-1}\frac{203-26}{14+377}$$

$$= \tan^{-1}\frac{177}{391}$$



$\therefore\ \cos^{-1}\frac{12}{13} = \tan^{-1}\frac{5}{12}$



$\therefore\ \sec^{-1}\sqrt{5} = \tan^{-1}2$

$AB = \sqrt{AC^2-BC^2}$

$= \sqrt{169-144}$

$= \sqrt{25} = 5$

$AB = \sqrt{AC^2-BC^2}$

$= \sqrt{5-1}$

$= \sqrt{4} = 2$

উদাহরণ-7 ঃ প্রমাণ করুন, $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13} - \cot^{-1}2 = \tan^{-1}\frac{28}{29}$

সমাধান ঃ ধরুন, $\cos^{-1}\frac{5}{13} = \theta \quad \therefore \cos\theta = \frac{5}{13}$

$$\therefore\ \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{164}} = \frac{12}{13}$$

এখন, $\tan\frac{1}{2}\theta = \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= \frac{\frac{12}{13}}{1+\frac{5}{13}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\theta = \tan^{-3}\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13} = \tan^{-1}\frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13} - \cot^{-1}2$$

$$= \tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{3} - \tan^{-1}\frac{1}{2}$$

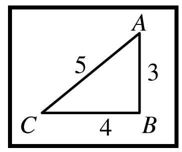
$$= \tan^{-1}\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}} - \tan^{-1}\frac{1}{2}$$

$$= \tan^{-1}\frac{17}{6} - \tan^{-1}\frac{1}{2}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{17}{6}-\frac{1}{2}}{1+\frac{17}{6}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{14}{6}}{\frac{29}{12}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{28}{29}$$



$$\therefore \sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$$

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$$
$$= \sqrt{25-9}$$
$$= \sqrt{16} = 4$$

উদাহরণ-৪ ঃ প্রমাণ করুন, $\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{9} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$

সমাধান ঃ $\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{9}$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{9}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{17}{36}}{\frac{34}{36}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \, . \, 2\tan^{-1}\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$$

উদাহরণ-9 ঃ প্রমাণ করুন $\{\cos(\sin^{-1}x)\}^2 = \{\sin(\cos^{-1}x)\}^2$

সমাধান ঃ বামপক্ষ $= \{\cos(\sin^{-1}x)\}^2$

$$= \{\cos(\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}\,)\}^2$$

$$= (\sqrt{1-x}\,)^2 = 1-x^2$$

ডানপক্ষ $= \{\sin(\cos^{-1}x)\}2$

$$= \{\sin(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\,)\}^2$$

$$= (\sqrt{1-x^2}\,)^2 = 1-x^2$$

$\therefore \{\cos(\sin^{-1}x)\}^2 = \{\sin(\cos^{-1}x)\}^2$

উদাহরণ-10 ঃ প্রমাণ করুন $\tan(2\tan^{-1}x) = 2\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}x^3)$

সমাধান ঃ বামপক্ষ $= \tan(2\tan^{-1}x)$

$$= \tan\left(\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

$$= \frac{2x}{1-x^2}$$

ডানপক্ষ $= 2\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}x^3)$

$$= 2\tan\left\{\tan^{-1}\frac{x+x^3}{1-x.x^3}\right\}$$

$$= 2\tan\left\{\tan^{-1}\frac{x\,(1+x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)}\right\}$$

$$= 2\tan\left(\tan^{-1}\frac{x}{1-x^2}\right)$$

$$= 2.\frac{x}{1-x^2}$$

$$= \frac{2x}{1-x^2}$$

$\therefore \tan(2\tan^{-1}x) = 2\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}x^3)$

উদাহরণ-11 ঃ প্রমাণ করুন, $\tan^{-1}\left(\frac{x\cos\phi}{1-x\sin\phi}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x-\sin\phi}{\cos\phi}\right) = \phi$

সমাধান ঃ $\tan^{-1}\left(\frac{x\cos\phi}{1-x\sin\phi}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x-\sin\phi}{\cos\phi}\right)$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{x\cos\phi}{1-x\sin\phi} - \frac{x-\sin\phi}{\cos\phi}}{1 + \frac{x\cos\phi(x-\sin\phi)}{(1-x\sin\phi)\cos\phi}}$$

$$= \tan^{-1} \frac{\dfrac{x\cos^2\phi - x + \sin\phi + x^2\sin\phi - x\sin^2\phi}{(1 - x\sin\phi)\cos\phi}}{\dfrac{\cos\phi - x\sin\phi\cos\phi + x^2\cos\phi - x\cos\phi\sin\phi}{(1 - x\sin\phi)\cos\phi}}$$

$$= \tan^{-1} \frac{-x(1 - \cos^2\phi) + \sin\phi + x^2\sin\phi - x\sin^2\phi}{\cos\phi + x^2\cos\phi - 2x\cos\phi\sin\phi}$$

$$= \tan^{-1} \frac{-x\sin^2\phi + \sin\phi + x^2\sin\phi - x\sin^2\phi}{\cos\phi + x^2\cos\phi - 2x\cos\phi\sin\phi}$$

$$= \tan^{-1} \frac{\sin\phi + x^2\sin\phi - 2x\sin^2\phi}{\cos\phi + x^2\sin\phi - 2x\cos\phi\sin\phi}$$

$$= \tan^{-1} \frac{\sin\phi(1 + x^2 - 2x\sin\phi)}{\cos\phi(1 + x^2 - 2x\sin\phi)}$$

$$= \tan^{-1} \tan\phi$$

$$= \phi$$

উদাহরণ-12 ঃ প্রমাণ করুন $\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x-b}{a-b}} = \cos^{-1}\sqrt{\dfrac{a-x}{a-b}} = tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x-b}{a-x}}$

সমাধান ঃ ধরুন, $\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x-b}{a-b}} = \theta$

$$\therefore \sin\theta = \sqrt{\frac{x-b}{a-b}}$$

এখন $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

$$= \sqrt{1 - \frac{x-b}{a-b}}$$

$$= \sqrt{\frac{a-x}{a-b}}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a-b}}$$

আবার $tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{x-b}{a-b}}}{\sqrt{\dfrac{a-x}{a-b}}} = \sqrt{\dfrac{x-b}{a-x}}$

$$\therefore \theta = tan^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-b}} = \cos^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a-b}} = tan^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}$$

উদাহরণ-13 ঃ প্রমাণ করুন $\tan\left\{\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2} + \dfrac{1}{2}\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right\} = \dfrac{2x}{1-x^2}$

সমাধান ঃ $\tan\left\{\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2} + \dfrac{1}{2}\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right\}$

$$= \tan\left\{\frac{1}{2}.\ 2\tan^{-1}x + \frac{1}{2}.\ 2\tan^{-1}x\right\}$$

$$= \tan\{\tan^{-1}x + \tan^{-1}x\}$$

$$= \tan\{2\tan^{-1}x\}$$

$$= \tan\left\{\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right\}$$

$$= \frac{2x}{1-x^2}$$

উদাহরণ-14 ঃ প্রমাণ করুন $\sec^2(\tan^{-1}2)+\text{cosec}^2(\cot^{-1}3) = 15$

সমাধান ঃ $\sec^2(\tan^{-1}2) + \text{cosec}^2(\cot^{-1}3)$

$= 1+\tan^2 (\tan^{-1}2) + 1+\cot^2(\cot^{-1}3)$

$= 1+\{\tan(\tan^{-1}2)\}^2 + 1+ \{\cot(\cot^{-1}3)\}^2$

$= 1+2^2+1+3^2$

$= 1+ 4+1+9$

$= 15$

উদাহরণ-15 ঃ প্রমাণ করুন $\cot \cos^{-1}\sin \tan^{-1} \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

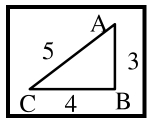
সমাধানঃ $\cot \cos^{-1}\sin \tan^{-1} \frac{3}{4}$

$= \cot \cos^{-1}\sin \sin^{-1} \frac{3}{5}$

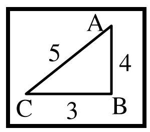
$= \cot \cos^{-1} \frac{3}{5}$

$= \cot \cot^{-1} \frac{3}{4}$

$= \frac{3}{4}$



$\therefore \tan^{-1}\frac{3}{4} = \sin^{-1} \frac{3}{5}$



$\therefore \cos^{-1}\frac{3}{5} = \cot^{-1} \frac{3}{4}$

$AC = \sqrt{AB^2+BC^2}$

$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$AB = \sqrt{AC^2-BC^2}$

$= \sqrt{25-9}$

$= \sqrt{16} = 4$

উদাহরণ-16 ঃ যদি $\tan(\theta-\alpha) \tan(\theta-\beta) = \tan^2\theta$ হয় তবে প্রমাণ করুন $\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

সমাধান ঃ $\tan(\theta-\alpha) \tan(\theta-\beta) = \tan^2\theta$

বা, $\frac{\sin(\theta-\alpha) \sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha) \cos(\theta-\beta)} = \tan^2\theta$

বা, $\frac{\cos(\theta-\alpha) \cos(\theta-\beta)-\sin(\theta-\alpha) \sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha) \cos(\theta-\beta)+\sin(\theta-\alpha) \sin(\theta-\beta)} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ [যোজন-বিয়োজন জন্য]

বা, $\frac{\cos\{(\theta-\alpha)+(\theta-\beta)\}}{\cos\{(\theta-\alpha)-(\theta-\beta)\}} = \cos2\theta$

বা, $\frac{\cos\{2\theta-(\alpha+\beta)\}}{\cos(\beta-\alpha)} = \cos2\theta$

বা, $\cos\{2\theta-(\alpha+\beta)\} = \cos2\theta \cos(\beta-\alpha)$

বা, $\cos2\theta \cos(\alpha+\beta) + \sin2\theta \sin(\alpha+\beta) = \cos2\theta \cos(\beta-\alpha)$

বা, $\sin2\theta \sin(\alpha+\beta) = \cos2\theta \cos(\beta-\alpha) - \cos2\theta \cos (\alpha+\beta)$

বা, $\sin2\theta \sin(\alpha+\beta) = \cos2\theta \{\cos(\beta-\alpha) - \cos(\alpha+\beta)\}$

বা, $\sin2\theta \sin(\alpha+\beta) = \cos2\theta.2\sin\alpha \sin\beta$

বা, $\frac{\sin2\theta}{\cos2\theta} = \frac{2\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

বা, $\tan2\theta = \frac{2\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

বা, $2\theta = \tan^{-1}\dfrac{2\sin\alpha\,\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

$\therefore\ \theta = \dfrac{1}{2}\ \tan^{-1}\dfrac{2\sin\alpha\,\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

উদাহরণ-17 ঃ যদি $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$ তবে প্রমাণ করুন $x^2+y^2+z^2+2xyz = 1$

সমাধানঃ $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z = \pi$

বা, $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y = \pi-\cos^{-1}z$

বা, $\cos^{-1}\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\} = \pi-\cos^{-1}z$

বা, $xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = \cos(\pi-\cos^{-1}z)$

বা, $xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = -\cos\cos^{-1}z$

বা, $xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = -z$

বা, $xy+z = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$

বা, $(xy+z)^2 = (1-x^2)(1-y^2)$

বা, $x^2y^2+2xyz+z^2 = 1-x^2-y^2+x^2y^2$

বা, $x^2+y^2+z^2+2xyz = 1$

উদাহরণ-18 ঃ যদি $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z = \dfrac{\pi}{2}$ হয় তবে, প্রমাণ করুন $yz+zx+xy=1.$

সমাধানঃ $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z = \dfrac{\pi}{2}$

বা, $\tan^{-1}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy} = \dfrac{\pi}{2}$

বা, $\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy} = \tan\dfrac{\pi}{2} = \square$

$\therefore\ 1-yz-zx-xy = 0$

$\therefore\ yz+zx+xy = 1$

উদাহরণ-19 ঃ যদি $\sin(\pi\cos\alpha) = \cos(\pi\sin\alpha)$ হয় তবে দেখান যে, $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{4}+\cos^{-1}\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

সমাধানঃ $\sin(\pi\cos\alpha) = \cos(\pi\sin\alpha)$

বা, $\sin(\pi\cos\alpha) = \sin(\dfrac{\pi}{2}\pm\pi\sin\alpha)$

বা, $\pi\cos\alpha = \dfrac{\pi}{2}\pm\pi\sin\alpha$

বা, $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}\pm\sin\alpha$

বা, $\cos\alpha\pm\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

বা, $\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\alpha\pm\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

বা, $\cos(\alpha \pm \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

বা, $\alpha \pm \frac{\pi}{4} = \cos^{-1} \frac{1}{2\sqrt{2}}$

বা, $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \cos^{-1} \frac{1}{2\sqrt{2}}$

উদাহরণ-20 ঃ সমাধান করুন ঃ $\tan^{-1} \frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$

সমাধানঃ $\tan^{-1} \frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$

বা, $\tan^{-1} \dfrac{\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2}}{1 - \frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x+1}{x+2}} = \frac{\pi}{4}$

বা, $\tan^{-1} \frac{(x-1)(x+2)+(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)-(x-1)(x+1)} = \frac{\pi}{4}$

বা, $\tan^{-1} \frac{x^2+x-2+x^2-x-2}{(x^2-4)-(x^2-1)} = \frac{\pi}{4}$

বা, $\tan^{-1} \frac{2x^2-4}{-3} = \tan^{-1} 1$

বা, $\frac{2x^2-4}{-3} = 1$

বা, $2x^2-4 = -3$

বা, $2x^2 = 1$

বা, $x^2 = \frac{1}{2}$

$\therefore \ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

উদাহরণ-21 ঃ সমাধান করুন $\tan^{-1}(x-2)+\tan^{-1}(x+2) = \tan^{-1} \frac{1}{2}$

সমাধান ঃ $\tan^{-1}(x-2) + \tan^{-1} (x+2) = \tan^{-1} \frac{1}{2}$

বা, $\tan^{-1} \frac{x-2+x+2}{1-(x-2)(x+2)} = \tan^{-1} \frac{1}{2}$

বা, $\frac{2x}{1-(x^2-4)} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{2x}{1-x^2+4} = \frac{1}{2}$

বা, $1 - x^2+4 = 4x$

বা, $x^2+4x-5 = 0$

বা, $(x+5)(x-1) = 0$

$\therefore\ x=-5, 1$

কিন্তু $x=-5$ প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। $\therefore\ x=1.$

অনুশীলনী-১৮.১

প্রমান করুন ঃ

1. i) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$

   ii) $\tan^{-1}\frac{1}{3}-\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{3}{11}$

   iii) $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$

   iv) $\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

   v) $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}+\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}=\frac{\pi}{2}$

   vi) $\tan^{-1}a-\tan^{-1}c=\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}$

   vii) $\tan^{-1}\sqrt{\frac{xr}{yz}}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{yr}{zx}}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{zr}{xy}}=\pi$ যেখানে $r=x+y+z$

2. i) $\tan^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{27}{11}$

   ii) $\sec^{-1}\frac{13}{5}-\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2}=\tan^{-1}\frac{2}{29}$

   iii) $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}2$

   iv) $\tan^{-1}\frac{2}{3}=\frac{\pi}{2}-\sec^{-1}\frac{\sqrt{13}}{2}$

3. i) $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}=\sin^{-1}\frac{77}{85}$

   ii) $\sin^{-1}\frac{5}{13}+\cot^{-1}\frac{17}{7}=\frac{\pi}{4}$

   iii) $\sin^{-1}\frac{3}{\sqrt{73}}+\cos^{-1}\frac{11}{\sqrt{146}}+\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{5\pi}{12}$

   iv) $\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}-\cos^{-1}\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$

4. i) $4\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{17}}-\tan^{-1}\frac{79}{401}=\frac{\pi}{4}$

   ii) $\cos^{-1}\frac{41}{49}=2\sin^{-1}\frac{2}{7}$

   iii) $3\tan^{-1}\frac{1}{4}=\tan^{-1}\frac{47}{52}$

5. i) $4(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + \cot^{-1}3) = \pi$

   ii) $4(\cot^{-1}3 + \operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5}) = \pi$

6. i) $\sin(2\sin^{-1}x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

   ii) $\sin(3\sin^{-1}x) = 3x-4x^3$

   iii) $2\sin^{-1}x = \sin(2x\sqrt{1-x^2})$

7. $\cos(2\tan^{-1}\frac{1}{7}) = \sin(4\tan^{-1}\frac{1}{3})$

8. $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan 2\theta) + \tan^{-1}(\cot\theta) + \tan^{-1}(\cot^3\theta) = 0$

9. i) $\tan^{-1}x = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1+x^2}{2x}$

   ii) $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}$

10. i) $\cot\cos^{-1}\sin\tan^{-1}x = x$

    ii) $\cos\tan^{-1}\sin\cot^{-1}x = \sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}$

    iii) $\sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$

    iv) $\cos\tan^{-1}\cot\sin^{-1}x = x$

11. $2\tan^{-1}[\tan\frac{\alpha}{2}\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})] = \tan^{-1}\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha}$

12. $\sin^2(\cos^{-1}\frac{1}{3}) - \cos^2(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{9}$

13. $\tan\{\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\} = \frac{2x}{1-x^2}$

14. i) $2\tan^{-1}\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\} = \cos^{-1}\frac{b+a\cos\theta}{a+b\cos\theta}$

    ii) $2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\tan\frac{\theta}{2}\right) = \sin^{-1}\frac{2\sqrt{ab}\sin\theta}{(b+a)+(b-a)\cos\theta}$

15. $\tan^{-1}\{(\sqrt{2}+1)\tan\alpha\} - \tan^{-1}\{(\sqrt{2}-1)\tan\alpha\} = \tan^{-1}(\sin 2\alpha)$

16. $2\tan^{-1}(\operatorname{cosec}\tan^{-1}x - \tan\cot^{-1}x) = \tan^{-1}x$

17. যদি $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে দেখান যে,

    i) $x^2+y^2 = 1$

    ii) $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1.$

18. যদি $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে দেখান যে,

    i) $x^2+y^2=1$

    ii) $xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} = 0.$

19. যদি $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$ হয়, তবে দেখান যে, $x+y+z = xyz.$

20. যদি $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z = \pi$ হয় তবে দেখান যে,
    $x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz$

21. i) যদি $\sin(\pi\cos\theta) = \cos(\pi\sin\theta)$ হয়, তবে দেখান যে, $\theta = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$

ii) যদি $\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b}=\theta$ হয়, তবে দেখান যে, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy\cos\theta}{ab}+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\theta$

22. যদি $A+B+C=\pi$, $\tan^{-1}2=A$ এবং $\tan^{-1}3=B$ হয় তবে দেখান যে, $C=\frac{\pi}{4}$

23. সমাধান করুন ঃ

i) $\tan^{-1}\frac{x-1}{x+1}+\tan^{-1}\frac{2x-1}{2x+1}=\tan^{-1}\frac{23}{36}$

ii) $2\cot^{-1}2+\cos^{-1}\frac{3}{5}=\operatorname{cosec}^{-1}x$

iii) $\tan^{-1}x+2\cot^{-1}x=\frac{2\pi}{3}$

iv) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}2x=\frac{\pi}{3}$

v) $\sec^{-1}\frac{x}{a}-\sec^{-1}\frac{x}{b}=\sec^{-1}b-\sec^{-1}a$

vi) $\tan(\cos^{-1}x)=\sin(\tan^{-1}2)$

vii) $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}+\cot^{-1}\frac{1-x^2}{2x}=\frac{\pi}{3}$

উত্তরমালা

অনুশীলনী-১৮.১

23. i) $\frac{4}{3}$ ii) $\frac{25}{24}$

iii) $\sqrt{3}$ iv) $\frac{1}{14}\sqrt{21}$

v) ab vi) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

vii) $2-\sqrt{3}$