ইউনিট ১৯

ত্রিভুজের গুণাবলী

ভূমিকা

একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ আছে। ABC ত্রিভুজের $\angle BAC$, $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ কোণগুলোকে যথাক্রমে $\angle A$, $\angle B$ ও $\angle C$ এবং $\angle A$, $\angle B$ ও $\angle C$ কোণের বিপরীত বাহুগুলিকে যথাক্রমে a, b ও c দ্বারা নির্দেশ করা হয়। ত্রিভুজের এই ছয়টি উপাদান অনপেক্ষ নয়। ত্রিভুজের কোণ ও বাহুগুলো পরস্পর পরস্পরের সাথে সম্পর্কযুক্ত। এই ইউনিটে আমরা ত্রিভুজের উপাদানগুলি যে সমস্ত সূত্র দ্বারা সম্পর্কিত সেই সম্পর্কে আলোচনা করবো।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- *ত্রিভুজের সাইন সূত্র প্রমাণ ও প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন,*
- *ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র প্রমাণ ও প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন,*
- *ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন,*
- *ত্রিভুজের যে কোন কোণের অনুপাতকে তার বাহুর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবেন,*
- *ত্রিভুজের গুণাবলী সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের দক্ষতা অর্জন করবেন।*

পাঠ পূর্ব আলোচনা

ত্রিভুজের সাথে সম্পর্কিত কয়েকটি বৃত্তের সংজ্ঞা

পরিবৃত্ত এবং তার ব্যাসার্ধঃ ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত বৃত্তকে ঐ ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্ত বা পরিবৃত্ত (Cirscumscribed circle) বলে। ঐ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধকে যথাক্রমে পরিকেন্দ্র (circum-centre) ও পরিব্যাসার্ধ (Circum-radius) বলে। সাধারণ পরিব্যাসার্ধকে r দ্বারা সূচিত করা হয়। ত্রিভুজের বাহুগুলোর লম্ব সমদ্বিখন্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দুই পরিকেন্দ্র।

অন্তঃবৃত্ত এবং তার ব্যাসার্ধ ঃ যে বৃত্ত ত্রিভুজের তিনটি বাহুকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে তাকে ঐ ত্রিভুজের অন্তর্লিখিত বৃত্ত বা অন্তঃবৃত্ত (Inscribed Circle) বলে। ঐ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধকে যথাক্রমে অন্তঃকেন্দ্র (In-centre) ও অন্তঃব্যাসার্ধ (In-radius) বলে। অন্তঃ ব্যাসার্ধকে সাধারণত r দ্বারা সূচিত করা হয়। ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণের দ্বিখন্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দুই অন্তঃকেন্দ্র।

বহিঃবৃত্ত এবং তার ব্যাসার্ধঃ ত্রিভুজের এক বাহুকে অন্তঃস্থভাবে এবং অপর বাহুদ্বয়কে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে এমন যে তিনটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায় তাদেরকে নির্দিষ্ট ত্রিভুজের বহিঃবৃত্ত (Ex-circle) বলে। তাদের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে বহিঃকেন্দ্র (Ex-centre) ও বহিঃব্যাসার্ধ (Ex-radius)। বৃত্তসমূহের ব্যাসার্ধকে r_1, r_2 ও r_3 দ্বারা সূচিত করা হয়।

পাঠ ১ ত্রিভুজের সাইন সূত্র

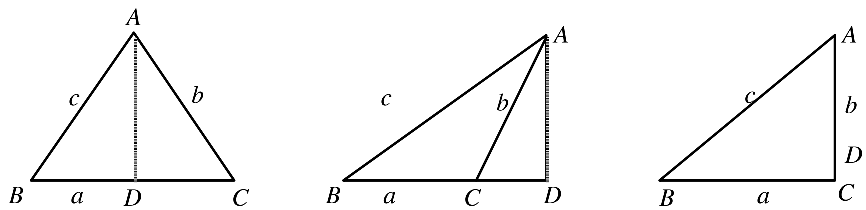
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিভুজের সাইন সূত্র সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- সমস্যা সমাধানে সূত্রটি প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

যে কোন ত্রিভুজ ABC হলে প্রমাণ করতে হবে, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

অর্থাৎ যে কোন ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য তার বিপরীত কোণের সাইন (sine) এর অনুপাতের সমানুপাতিক।



১ম চিত্র ২য় চিত্র ৩য় চিত্র

চিত্র ১৯.১

মনে করুন, ABC একটি ত্রিভুজ।

A বিন্দু থেকে BC এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করুন। ২য় চিত্রে, AD লম্বটি BC এর বর্ধিতাংশের উপর এবং ৩য় চিত্রে, AD লম্বটি AC বাহুর সাথে মিলে যাবে।

১ম চিত্রে C কোণটি সূক্ষ্মকোণ, ২য় চিত্রে স্থূল কোণ এবং ৩য় চিত্রে সমকোণ।

এখন, ΔABC-এ, $AD = AB \sin \angle ABD = c \sin B.$

আবার, ΔACD এ

$AD = AC \sin \angle ACD = b \sin C$ [১ম চিত্রানুযায়ী]

বা, $= AC \sin (\pi - C)$ [২য় চিত্রানুযায়ী]

$= b \sin C.$

$\therefore\ b \sin C = c \sin B$, অর্থাৎ, $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

৩য় চিত্রে, C কোণটি সমকোণ বলে আমরা পাই, $\dfrac{b}{c} = \sin B$, অর্থাৎ, $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{1} = \dfrac{c}{\sin 90^\circ} = \dfrac{c}{\sin C}$

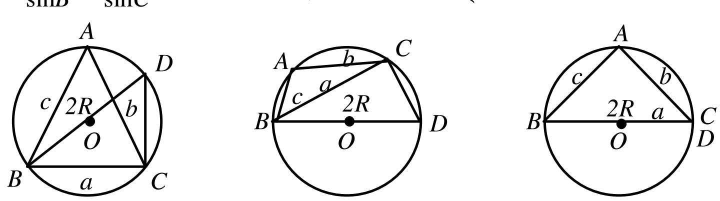
সুতরাং যে কোন ধরনের ত্রিভুজ নেওয়া হোক না কেন আমরা প্রত্যেক ক্ষেত্রেই পাই, $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$;

অনুরূপভাবে, B বিন্দু হতে CA বাহুর উপর লম্ব অঙ্কন করে পাওয়া যায়, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$.

অতএব, ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী, বা, স্থূলকোণী, বা, সমকোণী যা হোক না কেন প্রত্যেক ক্ষেত্রে পাওয়া যায়,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

বিকল্প প্রমাণ ঃ $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$, যখন ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তের ব্যাসার্ধের পরিমাণ R হয়।



১ম চিত্রে ২য় চিত্রে ৩য় চিত্রে

চিত্র ১৯.২

মনে করুন, ABC ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ R,

১ম এবং ২য় চিত্রে B,O যোগ করে এমনভাবে বর্ধিত করুন যেন তা বৃত্তের পরিধিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। D,C যোগ করুন। ৩য় চিত্রে, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, সুতরাং এক্ষেত্রে BD রেখা BC রেখার সাথে মিলে যাবে।

এখন ১ম এবং ২য় চিত্র হতে পাওয়া যায়,

$BD = 2R$ এবং $\angle BCD = 90°$

সুতরাং, ΔBCD হতে

$$\sin \angle BDC = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R} \text{ ……………… (i)}$$

যেহেতু ১ম চিত্রানুযায়ী $\angle BDC = \angle A$ এবং ২য় চিত্রানুযায়ী $\angle BDC = \pi - A$; অতএব উভয় ক্ষেত্রে $\sin \angle BDC = \sin A$.

সুতরাং, (i) নং হতে পাওয়া যায়, $\sin A = \dfrac{a}{2R}$,

বা, $\dfrac{a}{\sin A} = 2R.$

এখন ৩য় চিত্রানুযায়ী $BD = a$,

অর্থাৎ, $2R = a \quad \dfrac{a}{1} = 2R,$

$$\frac{a}{\sin 90°} = 2R, \qquad \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

সুতরাং প্রত্যেক ক্ষেত্রেই আমরা পাই, $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে,

$\dfrac{b}{\sin B} = 2R,$ এবং $\dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

অতএব, আমরা পাই, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

উদাহরণ-1 ঃ ABC ত্রিভুজ হতে প্রমাণ করুন $\sin\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{a-b}{c} \cos\dfrac{C}{2}$

সমাধানঃ
$$\frac{a-b}{c} = \frac{2R\sin A - 2R\sin B}{2R\sin C}$$
$$= \frac{2R(\sin A - \sin B)}{2R\sin C}$$
$$= \frac{\sin A - \sin B}{\sin C}$$
$$= \frac{2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$
$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} \qquad [\ \Delta ABC\text{-এ } A+B+C=\pi\ ]$$
$$= \frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$
$$= \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$
$$\therefore \sin\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{c}\cos\frac{C}{2}$$

উদাহরণ-2 ঃ যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করুন

$$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0$$

সমাধানঃ $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}$

$=\frac{4R^2\sin^2 A\ \sin(B-C)}{\sin A}$

$= 4R^2 \sin A\ \sin(B-C)$

$= 4R^2 \sin\{\pi-(B+C)\}\sin(B-C)$ [$\because \Delta ABC$-এ $A+B+C=\pi$]

$= 4R^2 \sin(B+C)\sin(B-C)$

$= 4R^2 (\sin^2 B-\sin^2 C)$

অনুরূপভাবে $= \frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B} = 4R^2(\sin^2 C-\sin^2 A)$

এবং $\frac{C^2\sin(A-B)}{\sin C} = 4R^2(\sin^2 A-\sin^2 B)$

এখন $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}$

$= 4R^2(\sin^2 B-\sin^2 C) + 4R^2(\sin^2 C-\sin^2 A) + 4R^2(\sin^2 A-\sin^2 B)$

$= 4R^2(\sin^2 B-\sin^2 C+\sin^2 C-\sin^2 A+\sin^2 A-\sin^2 B)$

$= 4R^2 \infty 0$

$= 0$

উদাহরণ-3 ঃ যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করুন $\cos(B-C)+\cos A=\frac{bc}{2R^2}$

সমাধান ঃ $\cos(B-C)+\cos A$

$= 2\cos\left(\frac{A+B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B+C}{2}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{A+B+C-2C}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B+C-2B}{2}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$ [ΔABC-এ $A+B+C=\pi$]

$= 2\sin B\sin C$

$= 2.\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}$

$= \frac{bc}{2R^2}$

অনুশীলনী-১৯.১

যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করুন

1. $a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)=(b+c)\sin\frac{A}{2}$
2. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$
3. $a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0$
4. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$

kJb 2 ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- সমস্যা সমাধানে সূত্রটি প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে যে,

$a^2 = b^2+c^2 -2bc \cos A$ বা, $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$b^2 = c^2+a^2 -2ca \cos B$ বা, $\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$c^2 = a^2+b^2-2ab \cos C$ বা, $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

C-কে সূক্ষ্মকোণ ধরলে চিত্র ১৯.১ এর ১ম চিত্রে আমরা পাই,

$AB^2=BC^2+CA^2-2BC.CD$

এখন ΔACD থেকে, $CD = AC \cos C = b \cos C$

$\therefore \quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

আবার C-কে স্থূলকোণ ধরলে চিত্র ১৯.১- এর 2 নং চিত্র হতে আমরা পাই,

$AB^2=BC^2+CA^2+2BC.CD$

এখন ΔACD থেকে, $CD = AC \cos ACD = b \cos(\pi-C) = -\, b\cos C$

$\therefore \quad c^2=a^2+b^2-2ab \cos C$

আবার C সমকোণ ধরলে চিত্র ১৯.১-এর ৩য় চিত্র হতে, $AB^2=BC^2+CA^2$

অর্থাৎ, $c^2=a^2+b^2$

$= a^2+b^2-2ab \cos C \; [\therefore \cos C = \cos 90^\circ = 0]$

অতএব, C সূক্ষ্মকোণ, স্থূলকোণ অথবা সমকোণ যাই হোক না কেন আমরা পাই,

$c^2=a^2+b^2-2ab \cos C$

অথবা, $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

একইভাবে, অন্য দুটি সম্পর্কও প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে যে,

$\boldsymbol{a = b \cos C + c \cos B}$

$\boldsymbol{b = c \cos A + a \cos C}$

$\boldsymbol{c = a \cos B + b \cos A}$

C কে সূক্ষ্মকোণ ধরলে চিত্র ১৯.১ এর ১ম চিত্রে আমরা পাই,

$BC = BD+CD$

$= AB \cos ABD + AC \cos ACD$

$\therefore \quad a = c \cos B + b \cos C$

চিত্র ১৯.১ এর ২য় চিত্রে C স্থূলকোণ অতএব,

$BC = BD - CD = AB \cos ABD - AC \cos ACD$

$= c \cos B - b \cos(\pi - C) = c \cos B + b \cos C$

বা, $a = b \cos C + C \cos B$

আবার চিত্র ১৯.১-এর ৩য় চিত্রে C সমকোণ,

$BC = AB \cos ABC = c \cos B + b \cos C \quad [\because \cos C = \cos 90° = 0]$

বা, $a = b \cos C + c \cos B$

সুতরাং; প্রতি ক্ষেত্রেই পাওয়া যায়,

$a = b \cos C + c \cos B$

একইভাবে, অন্য দুটি সম্পর্কও প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

উদাহরণ-1 ঃ যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে

$$(b+c) \cos A + (c+a) \cos B + (a+b) \cos C = a+b+c$$

সমাধান ঃ $(b+c) \cos A + (c+a) \cos B + (a+b) \cos C$

$= b \cos A + c \cos A + c \cos B + a \cos B + a \cos C + b \cos C$

$= (b \cos C + c \cos B) + (c \cos A + a \cos C) + (a \cos B + b \cos A)$

$= a + b + c$

উদাহরণ-2 ঃ যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করুন $a^2+b^2+c^2=2(bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C)$

সমাধানঃ $a = b \cos C + c \cos B$

$\therefore \quad a^2 = ab \cos C + ac \cos B$ ... ... (i)

$b = c \cos A + a \cos C$

$\therefore \quad b^2 = bc \cos A + ab \cos C$ ... ... (ii)

$c = a \cos B + b \cos A$

$\therefore \quad c^2 = ca \cos B + bc \cos A$ ... ... (iii)

(i), (2) ও (3) যোগ করে পাই

$a^2+b^2+c^2 = ab \cos C + ac \cos B + bc \cos A + ab \cos C + ca \cos B + bc \cos A$

$= 2(bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C)$

<u>**বিকল্প প্রমাণ**</u> $2(bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C)$

$$= 2\left(bc.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + ca.\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + ab\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$$

$$= 2.\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2)$$

$$= a^2+b^2+c^2$$

উদাহরণ-3 ঃ যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে,

$$\frac{a \sin(B-C)}{b^2-c^2} = \frac{b \sin(C-A)}{c^2-a^2} = \frac{c \sin(A-B)}{a^2-b^2}$$

সমাধান ঃ $\dfrac{a \sin(B-C)}{b^2-c^2}$

$$= \frac{a\,(\sin B \cos C - \cos B \sin C)}{b^2 - c^2}$$

$$= \frac{a\left(\frac{b}{2R}\cos C - \frac{c}{2R}\cos B\right)}{b^2 - c^2}$$

$$= \frac{\frac{a}{2R}\ (b\cos C - c\cos B)}{b^2 - c^2}$$

$$= \frac{a\,(a - c\cos B - c\cos B)}{2R(b^2 - c^2)} \qquad [\ \therefore\ a = b\cos C + c\cos B\ ]$$

$$= \frac{a\,(a - 2c\cos B)}{2R(b^2 - c^2)}$$

$$= \frac{a\left(a - 2c.\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right)}{2R(b^2 - c^2)}$$

$$= \frac{(a^2 - c^2 - a^2 + b^2)}{2R(b^2 - c^2)}$$

$$= \frac{b^2 - c^2}{2R(b^2 - c^2)} = \frac{1}{2R}$$

অনুরূপভাবে, $\frac{b\sin(C-A)}{c^2 - a^2} = \frac{1}{2R}$ এবং $\frac{c\sin(A-B)}{a^2 - b^2} = \frac{1}{2R}$

$$\therefore\ \frac{a\sin(B-C)}{b^2 - c^2} = \frac{b\sin(C-A)}{c^2 - a^2} = \frac{c\sin(A-B)}{a^2 - b^2}$$

অনুসিদ্ধান্তঃ $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

$$= \frac{\frac{a}{2R}}{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

$$= \frac{abc}{R} \cdot \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2}$$

অনুরূপভাবে, $\tan B = \frac{abc}{R} \cdot \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}$

এবং $\tan C = \frac{abc}{R} \cdot \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$

অনুশীলনী-১৯.২

যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে যে,

1. $\frac{(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{a}{\sin A} = 2R$

2. $b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B = 2bc\sin A$.

3. $\frac{2\cot A + \cot B + \cot C}{\cot A - \cot B + 2\cot C} = \frac{b^2 + c^2}{2b^2 - c^2}$

kJb 3 ত্রিভুজের যে কোন কোণের অনুপাতকে তার বাহুর মাধ্যমে প্রকাশ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিভুজের অর্ধকোণ সমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে তার বাহুর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবেন;
- ত্রিভুজের কোণের সাইনের অনুপাতকে বাহুর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবেন।

ত্রিভুজের অর্ধকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে বাহুর মাধ্যমে প্রকাশ

(i) আমরা জানি,

$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1-\cos A = 1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

যদি ত্রিভুজের পরিসীমার অর্ধেককে s দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে $2s = a+b+c$

এখন, $a-b+c = a+b+c-2b = 2s-2b = 2(s-b)$

এবং $a+b-c = a+b+c-2c = 2s-2c=2(s-c)$

অতএব, $2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{2(s-b).2(s-c)}{2bc}$

বা, $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$

$\therefore \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

যেহেতু ত্রিভুজের যে কোন কোণ $180°$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, অতএব $\frac{A}{2} < 90°$ এবং $\sin\frac{A}{2}$ এর মান ধনাত্মক।

(ii) আমরা জানি, $2\cos^2\frac{A}{2} = 1+\cos A$

$$= 1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2s(2s-2a)}{2bc}$$

$\therefore \cos^2\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}$

$\therefore \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

যেহেতু $\frac{A}{2}$ সূক্ষ্মকোণ অতএব $\cos\frac{A}{2}$ ধনাত্মক। সুতরাং, বর্গমূলের ধনাত্মক মান নেয়া হয়েছে।

(iii) $$\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

অনুরূপভাবে, $\frac{B}{2}$ এবং $\frac{C}{2}$ কোণ দুটির ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকেও বাহুর মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়।

অতএব, আমরা পাই, $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$$

$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

ত্রিভুজের যে কোন কোণের সাইন (sine)-এর অনুপাতকে তার বাহুর মাধ্যমে প্রকাশ

আমরা জানি, $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\ \cos\frac{A}{2}$

$$= 2.\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\ \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$= \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

অনুরূপভাবে, $\sin B = \frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

উদারহণ ঃ যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে যে,

$$\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2} = 0$$

সমাধানঃ $\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2}$

$$= \frac{b-c}{a}\frac{s(s-a)}{bc} + \frac{c-a}{b}\frac{s(s-b)}{ca} + \frac{a-b}{c}\frac{s(s-c)}{ab}$$

$$= \frac{s}{abc}\ \{(b-c)(s-a)+(c-a)(s-b)+(a-b)(s-c)\}$$

$$= \frac{s}{abc}\ (bs-ab-cs+ac+cs-bc-ab+ab+ab-ac-bs+bc)$$

$$= \frac{s}{abc}\ \infty\ 0 = 0$$

অনুশীলনী-১৯.৩

যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে যে,

1. $\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2} = \frac{(a+b+c)^2}{4abc} = \frac{s^2}{abc}$
2. $\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2} = 0$
3. $bc\cos^2\frac{A}{2} + ca\cos^2\frac{B}{2} + ab\cos^2\frac{C}{2} = 0$

kJb 4 ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত সমস্যার সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

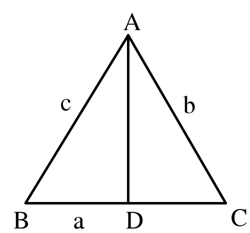
ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে Δ দ্বারা সূচিত করা হল। BC ভূমির উপর AD লম্ব অঙ্কন করুন। তাহলে ΔACD হতে,

$$AD = AC \sin \angle ACD = b \sin C$$

অর্থাৎ, $\Delta = \frac{1}{2}\ BC.\ AD = \frac{1}{2}\ a.b \sin C$

আমরা জানি $\Delta = \frac{1}{2}$ * ভূমি * উচ্চতা,

অনুরূপভাবে B এবং C বিন্দু হতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব অঙ্কন করে দেখান যায় যে,



$$\Delta = \frac{1}{2}\ bc \sin A = \frac{1}{2}\ ca \sin B.$$

অতএব, $\Delta = \frac{1}{2}\ bc \sin A = \frac{1}{2}\ ca \sin B = \frac{1}{2}\ ab \sin C$

অর্থাৎ, $\Delta = \frac{1}{2}$ (hMA mJÉr %‰hPWtqr èelu) *(বাহু দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইন অনুপাত)।

এখন, $\Delta = \frac{1}{2}\ bc \sin A = \frac{1}{2}\ bc.\ 2\sin\frac{A}{2}\ \cos\frac{A}{2}$

$$= bc \sin\frac{A}{2}\ \cos\frac{A}{2}$$

$$= bc\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

আবার আমরা জানি, ত্রিভুজের পরিসিমার অর্ধেক $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

অতএব, $\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$

$$= \frac{1}{4}\ \{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4\}^{1/2}$$

আবার, $\Delta = \frac{1}{2}\ bc \sin A = \frac{1}{2}\ bc.\frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$

উদাহরণ-1 ঃ যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে $\frac{1}{a}\ \sin A + \frac{1}{b}\ \sin B + \frac{1}{c}\ \sin C = \frac{6\Delta}{abc}$

সমাধান ঃ $\frac{1}{a}\ \sin A + \frac{1}{b}\ \sin B + \frac{1}{c}\ \sin C$

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{2\Delta}{bc} + \frac{1}{b}\cdot\frac{2\Delta}{ca} + \frac{1}{c}\cdot\frac{2\Delta}{ab}$$

$$= \frac{2\Delta}{abc} + \frac{2\Delta}{abc} + \frac{2\Delta}{abc}$$

$$= \frac{6\Delta}{abc}$$

উদাহরণ-2 ঃ যদি একটি ত্রিভুজের বাহুসমূহ যথাক্রমে $\frac{y}{z} + \frac{z}{x}$, $\frac{z}{x} + \frac{x}{y}$ এবং $\frac{x}{y} + \frac{y}{z}$ হয় তবে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ ধরুন ত্রিভুজের পরিসীমার অর্ধেক $=s$.

এখন $2s = \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$

$$= 2\left(\frac{y}{2} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right)$$

$$\therefore\ s = \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}$$

যদি ত্রিভুজের বাহুগুলিকে a, b, c দ্বারা সূচিত করা হয় তবে

$$s - a = \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right) - \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) = \frac{x}{y}$$

$$s - b = \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right) - \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right) = \frac{y}{z}$$

এবং $s - c = \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right) - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z}\right) = \frac{z}{x}$

এখন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right) . 1}$$

$$= \sqrt{\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}}$$

উদাহরণ-3 ঃ যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে যে,

$$\left(\frac{a^2}{\sin A} + \frac{b^2}{\sin B} + \frac{c^2}{\sin C}\right) \sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2} = \Delta$$

সমাধানঃ $\left(\frac{a^2}{\sin A} + \frac{b^2}{\sin B} + \frac{c^2}{\sin C}\right) \sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2}$

$$= \left(\frac{4R^2\sin^2 A}{\sin A} + \frac{4R^2\sin^2 B}{\sin B} + \frac{4R^2\sin^2 C}{\sin C}\right) \sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2}$$

$$= 4R^2(\sin A + \sin B + \sin C) \sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2}$$

$$= 4R^2.4\cos\frac{A}{2}\ \cos\frac{B}{2}\ \cos\frac{C}{2}\ .\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2}$$

$$= 2R^2.2\sin\frac{A}{2}\ \cos\frac{A}{2}\ .\ 2\sin\frac{B}{2}\ \cos\frac{B}{2}\ .\ 2\sin\frac{C}{2}\ \cos\frac{C}{2}$$

$$= 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

$$= \frac{1}{2}\ .\ 2R\sin A.2R\sin B.\sin C$$

$$= \frac{1}{2}\ ab \sin C$$

$$= \Delta$$

অনুশীলনী-১৯.৪

যে কোন ত্রিভুজের প্রমাণ করতে হবে

1. $a^2 \cot A + b^2 \cot B + c^2 \cot C = 4\Delta$
2. $\frac{a^2-b^2}{2}\ \frac{\sin A \sin B}{\sin(A-B)} = \Delta$
3. $a \sin B \sin C + b \sin C \sin A + c \sin A \sin B = \frac{3\Delta}{R}$

kJb 5 ত্রিভুজের অন্যান্য সূত্র

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিভুজের কয়েকটি সূত্র প্রমাণ ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করুন

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

$$\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

প্রমাণ ঃ আমরা জানি, যে কোন ত্রিভুজে

$\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, বা, $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$

$$\therefore \frac{b-c}{b+c} = \frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C} = \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$= \cot\frac{B+C}{2}\ \tan\frac{B-C}{2}$$

$$= \cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\tan\frac{B-C}{2} \qquad \left[\therefore \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \tan\frac{A}{2}\ \tan\frac{B-C}{2}$$

সুতরাং $\tan\frac{A}{2}\ \tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}$

$$\therefore \quad \tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{1}{\tan\frac{1}{2}A} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$$

অনুরূপভাবে, অন্য সম্পর্কগুলিও প্রতিষ্ঠা করা যায়।

কয়েকটি প্রয়োজনীয় সূত্র

(i) আমরা জানি, $\sin A = \dfrac{a}{2R}$ এবং $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$\therefore \quad \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a/2R}{(b^2+c^2-a^2)/2bc} = \frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{b^2+c^2-a^2}$$

অনুরূপভাবে, $\tan B = \dfrac{abc}{R}\cdot\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}$; এবং

$$\tan C = \frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$$

(ii) আমরা জানি,

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

ডানপক্ষের লব ও হরকে $\sqrt{(s-b)(s-c)}$ দ্বারা গুণ করে আমরা পাই,

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

[Δ দ্বারা ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সূচিত হল]

অনুরূপভাবে, $\tan\frac{B}{2} = \frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$ এবং $\tan\frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$

(iii) আবার, $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

অর্থাৎ, $\cot\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}} = \frac{s(s-a)}{\Delta}$ [ডান পক্ষের লব ও হরকে $\sqrt{s(s-a)}$ দ্বারা গুণ করে]

অনুরূপভাবে, $\cot\frac{B}{2} = \frac{s(s-b)}{\Delta}$ এবং $\cot\frac{C}{2} = \frac{s(s-c)}{\Delta}$

উদাহরণ-1 ঃ যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে, $(b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} + (a-b)\cot\frac{C}{2} = 0$

সমাধান ঃ $(b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} + (a-b)\cot\frac{C}{2}$

$= (b-c)\frac{s(s-a)}{\Delta} + (c-a)\frac{s(s-b)}{\Delta} + (a-b)\frac{s(s-c)}{\Delta}$

$= \frac{s}{\Delta}\{(b-c)(s-a)+(c-a)(s-b)+(a-b)(s-c)\}$

$= \frac{s}{\Delta}(bs-ab-cs+ca+cs-bc-as+ab+ab-ca-bs+bc)$

$= \frac{s}{\Delta} \infty 0 = 0$

উদাহরণ-2 ঃ যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে, $\frac{(a+b+c)^2}{\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}} = 4\Delta$

সমাধান ঃ $\frac{(a+b+c)^2}{\cot\frac{A}{2} + \cot+\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}}$

$= \frac{(a+b+c)^2}{\frac{s(s-a)}{\Delta} + \frac{s(s-b)}{\Delta} + \frac{s(s-c)}{\Delta}}$

$= \frac{\Delta(a+b+c)^2}{s(s-a)+s(s-b)+s(s-c)}$

$= \frac{\Delta(2s)^2}{s^2-as+s^2-bs+s^2-cs}$

$= \frac{\Delta.4s^2}{3s^2-s(a+b+c)}$

$= \frac{4\Delta.s^2}{3s^2-s.2s}$

$= \frac{4\Delta.s^2}{3s^2-2s^2}$

$= \frac{4\Delta.s^2}{s^2}$

$= 4\Delta$

kJb 6 বিবিধ সমস্যা ও সমাধান

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিভুজের গুণাবলী সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

উদাহরণ-1 ঃ যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে $\dfrac{b+c}{b-c} = \cot\dfrac{A}{2}\ \cot\dfrac{B-C}{2}$

সমাধান ঃ $\dfrac{b+c}{b-c}$

$$= \frac{2R\sin B+2R\sin C}{2R\sin B-2R\sin C}$$
$$= \frac{2R(\sin B+\sin C)}{2R(\sin B-\sin C)}$$
$$= \frac{\sin B+\sin C}{\sin B-\sin C}$$
$$= \frac{2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$
$$= \tan\left(\frac{B+C}{2}\right)\ \cot\left(\frac{B-C}{2}\right)$$
$$= \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\ \cot\left(\frac{B-C}{2}\right)$$ [$\because$ ΔABC -এ $A+B+C=\pi$]
$$= \cot\frac{A}{2}\ \cot\frac{B-C}{2}$$

উদাহরণ-2 ঃ যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করুন $\dfrac{\sin(B-C)}{\sin A} = \dfrac{b\cos C-c\cos B}{b\cos C+c\cos B}$

সমাধান ঃ $\dfrac{\sin(B-C)}{\sin A}$

$$= \frac{\sin B\cos C-\cos B\sin C}{\sin A}$$
$$= \frac{\frac{b}{2R}\cos C-\frac{c}{2R}\cos B}{\frac{a}{2R}}$$
$$= \frac{b\cos C-c\cos B}{a}$$
$$= \frac{b\cos C-\cos B}{b\cos C+\cos B}$$

উদাহরণ-3 ঃ যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করুন

$$a^3\cos(B-C)+b^3\cos(C-A)+c^3\cos(A-B)=3abc$$

সমাধান ঃ $a^3\cos(B-C) = 8R^3\sin^3 A\cos(B-C)$

$$= 8R^3\sin^2 A\sin A\cos(B-C)$$
$$= 8R^3\sin^2 A\sin\{\pi-(B+C\}\cos(B-C)$$ [$\because$ ΔABC এ $A+B+C=\pi$]
$$= 4R^3\sin^2 A.2\sin(B+C)\cos(B-C)$$

$= 4R^3\sin^2A\ .\ (\sin2B+\sin2C)$

$= 4R^3\sin^2A\ (2\sin B\cos B + 2\sin C\cos C)$

$= 8R^3\sin^2A(\sin B\cos B + \sin C\cos C)$

অনুরূপভাবে, $b^3\cos(C–A) = 8R^3\sin^2B\ (\sin C\cos C + \sin A\cos A)$

$c^3\cos(A–B) = 8R^3\sin^2C\ (\sin A\cos A + \sin B\cos B)$

এখন $a^3\cos(B–C) + b^3\cos(C–A) + C^3\cos(A–B)$

$= 8R^3[\sin A(\sin B\cos B + \sin C\cos C) + \sin^2B(\sin C\cos C + \sin A\cos A)$

$+\sin^2C(\sin A\cos A+\sin B\cos B)]$

$= 8R^3\ [\sin A\sin B\ (\sin A\cos B+\cos A\sin B)+\sin B\sin C\ (\sin B\cos C+\cos B\sin C)$

$+ \sin C\sin A\ (\sin C\cos A + \cos C\sin A)$

$= 8R^3\ [\ \sin A\sin B\sin(A+B)+\sin B\sin C\sin(B+C) +\sin C\sin A\sin(C+A)]$

$= 8R^3\ [\ \sin A\sin B\sin(\pi– C) + \sin B\sin C\sin(\pi–A) + \sin C\sin A\sin(\pi–B)\ ]$

$= 8R^3\ [\ \sin A\sin B\sin C + \sin B\sin C\sin A + \sin C\sin A\sin B\ ]$

$= 8R^3\infty 3\sin A\sin B\sin C$

$= 3(2R\sin A)\ (2R\sin B)\ (2R\sin C)$

$= 3abc.$

উদাহরণ-4 ঃ যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করুন $c^2= (a–b)^2\cos^2\frac{C}{2} + (a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}$

সমাধান ঃ $(a–b)^2\cos^2\frac{C}{2} + (a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}$

$$=\frac{1}{2}(a–b)^2(1+\cos C) + \frac{1}{2}(a+b)^2(1–\cos C)$$

$$=\frac{1}{2}(a–b)^2\left(1+\frac{a^2+b^2–c^2}{2ab}\right) + \frac{1}{2}(a+b)^2\left(1–\frac{a^2+b^2–c^2}{2ab}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(a–b)^2\left(\frac{2ab+a^2+b^2–c^2}{2ab}\right) + \frac{1}{2}(a+b)^2\left(\frac{2ab–a^2–b^2+c^2}{2ab}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(a–b)^2\left\{\frac{(a+b)^2–c^2}{2ab}\right\} + \frac{1}{2}(a+b)^2\left\{\frac{c^2–(a–b)^2}{2ab}\right\}$$

$$=\frac{1}{4ab}\left[(a–b)^2\{(a+b)^2 – c^2\}+(a+b)^2\{c^2–(a–b)^2\}\right]$$

$$=\frac{1}{4ab}\ [\ (a^2–b^2)^2 –c^2(a–b)^2+c^2(a+b)^2 – (a^2–b^2)^2\ ]$$

$$=\frac{1}{4ab}\ [\ c^2\{(a+b)^2–(a–b)^2\}\ ]$$

$$=\frac{1}{4ab}\ .\ [\ c^2.4ab\ ]$$

$$= c^2$$

উদাহরণ-5 ঃ একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির পরিমাণ যথাক্রমে 3, 5 ও 7 হলে, প্রমাণ করুন ত্রিভুজটি স্থূলকোণী। স্থূলকোণটি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ত্রিভুজটি বাহুগুলির পরিমাণ = 3, 5, 7

$\therefore$ বৃহত্তম বাহুটি = 7

ধরুন ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণটি A.

$$\therefore\ \cos A = \frac{3^2+5^2–7^2}{2.3.5}$$

$$= \frac{9+25-49}{30}$$
$$= \frac{34-39}{30} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}$$
$$\therefore\ \cos A = -\frac{1}{2} = \cos 120°$$
$$\therefore\ A = 120°$$

যেহেতু ত্রিভুজটি একটি কোণ স্থূলকোণ। অতএব ত্রিভুজটি স্থূলকোণী এবং স্থূল কোণটি 120°।

উদাহরণ-6 ঃ যদি $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$ হয় তবে A এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$

বা, $(b+c)^2-a^2 = 3bc$

বা, $b^2+c^2+2bc-a^2 = 3bc$

বা, $b^2+c^2-a^2 = 3bc-2bc$

বা, $b^2+c^2-a^2 = bc$

বা, $\frac{b^2+c^2-a^2}{2} = \frac{bc}{2}$

বা, $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$

বা, $\cos A = \frac{1}{2} = \cos 60°$

$\therefore\ A = 60°$

উদাহরণ-7 ঃ যদি $\frac{\cos A+2\cos C}{\cos A+2\cos B} = \frac{\sin B}{\sin C}$ হয় তবে দেখান যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু বা সমকোণী।

সমাধানঃ $\frac{\cos A-2\cos C}{\cos A+2\cos B} = \frac{\sin B}{\sin C}$

বা, $\cos A \sin C + 2\cos C \sin C = \cos A \sin B + 2\cos B \sin B$

বা, $\cos A \sin C + \sin 2C = \cos A \sin B + \sin 2B$

বা, $\cos A \sin B - \cos A \sin C + \sin 2B - \sin 2C = 0$

বা, $\cos A(\sin B-\sin C) + 2\cos (B+C) \sin (B-C) = 0$

বা, $\cos A\ .2\sin\left(\frac{B-C}{2}\right) \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) + 2\cos (\pi-A)\ .2\sin\frac{B-C}{2} \cos\frac{B-C}{2} = 0$

বা, $\cos A \sin\left(\frac{B-C}{2}\right) \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) +\cos (-A).\ 2\sin\left(\frac{B-C}{2}\right) \cos\left(\frac{B-C}{2}\right) = 0$

বা, $\cos A \sin\left(\frac{B-C}{2}\right) \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) -2 \cos A \sin\left(\frac{B-C}{2}\right) \cos\left(\frac{B-C}{2}\right) =0$

বা, $\cos A \sin\left(\frac{B-C}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\right] = 0$

বা, $\cos A = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ A = \frac{\pi}{2}$

আবার, $\sin\frac{B-C}{2} = 0 = \sin 0$

$\therefore\ \frac{B-C}{2} = 0$

$\therefore\ B = C$

সুতরাং ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু কিংবা সমকোণী।

উদাহরণ-৪ ঃ যদি কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি সমান্তর প্রগমণ শ্রেণীভুক্ত হয়, তবে দেখান যে, $\cos A \cot\frac{A}{2}$, $\cos B \cot\frac{B}{2}$, $\cos C \cot\frac{C}{2}$ সমান্তর প্রগমন শ্রেণীভুক্ত।

সমাধানঃ ধরুন ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে $a, b, c,$

এখন a,b,c সমান্তর প্রগমন শ্রেণীভুক্ত হবে যদি $b-a = c-b$ হয়

বা, $a+c = 2b$

$\therefore\ 2R\sin A + 2R\sin C = 2.2R\sin B$

বা, $2R(\sin A + \sin C) = 2R.2\sin B$

বা, $\sin A + \sin C = 2\sin B$

বা, $2\sin\frac{A}{2}\ \cos\frac{A}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\ \cos\frac{C}{2} = 2.2\sin\frac{B}{2}\ \cos\frac{B}{2}$

বা, $2\sin^2\frac{A}{2}\ \dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \sin^2\frac{C}{2}\ \dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = 4\sin^2\frac{B}{2}\ \dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$

বা, $(1-\cos A)\cot\frac{A}{2} + (1-\cos C)\cot\frac{C}{2} = 2(1-\cos B)\cot\frac{B}{2}$

বা, $\cot\frac{A}{2} - \cos A\ \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2} - \cos C\cot\frac{C}{2} = 2\cot\frac{B}{2} - 2\cos B\cot\frac{B}{2}$

বা, $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2} - 2\cot\frac{B}{2} = \cos A\cot\frac{A}{2} + \cos C\cot\frac{C}{2} - 2\cos B\cot\frac{B}{2}$

বা, $\frac{s(s-a)}{\Delta} + \frac{s(s-c)}{\Delta} - \frac{2s(s-b)}{\Delta} = \cos A\cot\frac{A}{2} + \cos C\cot\frac{C}{2} - 2\cos B\cot\frac{B}{2}$

বা, $\frac{s}{\Delta}(s-a+s-c-2s+2b) = \cos A\cot\frac{A}{2} + \cos C\cot\frac{C}{2} - 2\cos B\cot\frac{B}{2}$

বা, $\frac{s}{\Delta}\ \{2b-(a+c)\} = \cos A\cot\frac{A}{2} + \cos C\cot\frac{C}{2} - 2\cos B\cot\frac{B}{2}$

বা, $\frac{s}{\Delta}(2b-2b) = \cos A\cot\frac{A}{2} + \cos C\cot\frac{C}{2} - 2\cos B\cot\frac{B}{2}$

বা, $\cos A\cot\frac{A}{2} + \cos C\cot\frac{C}{2} - 2\cos B\cot\frac{B}{2} = 0$

বা, $\cos A\cot\frac{A}{2} + \cos C\cot\frac{C}{2} = 2\cos B\cot\frac{B}{2}$

$\therefore\ \cos A\cot\frac{A}{2}, \cot B\cot\frac{B}{2}, \cos C\cot\frac{C}{2}$ সমান্তর প্রগমন শ্রেণীভূক্ত।

উদাহরণ-9 ঃ যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করুন $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 4R.\sin A\sin B\sin C$

সমাধানঃ $a\cos A + b\cos B + c\cos C$

$= 2R\sin A\cos A + 2R\sin B\cos B + 2R\sin C\cos C$

$= R\sin 2A + R\sin 2B + R\sin 2C$

$= R\ [\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C]$

$= R\ [2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C]$

$= R[2\sin(\pi - C)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C]$

$= R[2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C]$

$= 2R\sin C\ [\cos(A-B) + \cos C]$

$= 2R\sin C\ [\cos(A-B) + \cos\{\pi-(A+B)\}]$

$= 2R\sin C\ [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

$= 2R\sin C.2\sin A\sin B$

$= 4R\sin A\sin B\sin C$

অনুশীলনী-১৯.৫

যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে ঃ

1. $\frac{a-b}{a+b} = \tan\frac{A-B}{2}\ \tan\frac{C}{2}$

2. (i) $a(\cos C-\cos B) = 2(b-c)\cos^2\frac{A}{2}$

   (ii) $a(\cos B+\cos C) = 2(b+c)\sin^2\frac{A}{2}$

3. $a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + c\sin(A-B) = 0$

4. $(b+c-a)\tan\frac{A}{2} = (c+a-b)\tan\frac{B}{2} = (a+b-c)\tan\frac{C}{2}$

5. i) $a^2(\text{sn}^2B-\sin^2C) + b^2(\sin^2C-\sin^2A) + c^2(\sin A-\sin^2B) = 0$

   ii) $a^2(\cos^2B-\cos^2C) + b^2(\cos^2C-\cos^2A) + c^2(\cos^2A-\cos^2B) = 0$

6. $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C} + \frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A} + \frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B} = 0$

7. যদি $a = 3,\ b = 3\sqrt{3}$ এবং $A = 30°$ হয় তবে B ও C এর মান নির্ণয় করুন।

8. যদি $c^4-2(a^2+b^2)c^2 + a^4+a^2b^2+b^4=0$ হয় তবে প্রমাণ করুন $C=60°$ বা $120°$

9. ABC ত্রিভুজে $\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ সমান্তর প্রগমন শ্রেণীভুক্ত হলে দেখান যে, $\cos A, \cos B, \cos C$ সমান্তর প্রগমন শ্রেণীভুক্ত।

10. ABC ত্রিভুজে প্রমাণ করুন, $\frac{\cos B\cos C}{bc} + \frac{\cos C\cos A}{ca} + \frac{\cos A\cos B}{ab} = \frac{1}{4R^2}$