অধ্যায় ৬

বিস্তার পরিমাপ (Measures of Dispersion)

ভূমিকা

তথ্যমানসমূহে অথবা কোন গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে তথ্যমানগুলোর কেন্দ্রের দিকে কেন্দ্রীভূত হওয়ার প্রবণতা যেমন থাকে তেমনি মানগুলোর বিভিন্ন দিকে প্রসারিত হওয়ার প্রবণতাও থাকে। অর্থাৎ কোন চলকের মানের কেন্দ্রীয় প্রবণতাই একমাত্র বৈশিষ্ট্য নয় চলকটির মানের বিস্তারও অন্য একটা বৈশিষ্ট্য। বিস্তার হল কেন্দ্রীয় প্রবণতার বিপরীত ধরনের বৈশিষ্ট্য। চলকের মানগুলোর বিভিন্ন দিকে প্রসারিত হবার প্রবণতাকে বিস্তার বলে। বিস্তারের পরিমাপ যার দ্বারা করা হয় তাকে বিস্তার পরিমাপক বলা হয়। এ অধ্যায়ে বিভিন্ন পাঠে বিস্তারের পরিমাপ, প্রয়োজনীয়তা, বিস্তার পরিমাপের সুবিধা অসুবিধা ইত্যাদি সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এ অধ্যায় শেষে আপনি বলতে পারবেন-

- বিস্তার
- বিস্তারের পরিমাপ
- ভেদাংক ইত্যাদি।

পাঠ-৬.১ বিস্তার ও বিস্তার পরিমাপ
(Dispersion and Measures of Dispersion)

ভূমিকা

এ পাঠে বিস্তার ও বিস্তার পরিমাপ সম্পর্কে আলোচনা করা হল।

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- বিস্তারের সংজ্ঞা বলতে পারবেন;
- বিস্তারের পরিমাপক সম্পর্কে বলতে পারবেন;
- বিস্তারের প্রকারভেদ সম্পর্কে ধারণা করতে পারবেন;
- বিস্তারের পরিমাপের প্রয়োজনীয়তা সম্পর্কে ধারণা করতে পারবেন।

বিস্তার (Dispersion)

চলকের কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক যেমন– গড়, মধ্যমা, প্রচুরক এর সাহায্যে চলকের মানসমূহের বৈশিষ্ট্য সুষ্ঠুভাবে জানা সম্ভব নয়। উদাহরণস্বরূপ কেউ যদি মনে করে গ্রীষ্মকালে ছোট একটা নদীর পানির গভীরতা গড়ে ২ ফুট এবং সহজে এটা পার হওয়া যাবে এমন সিদ্ধান্ত নিলে বিপদে পড়বেন। কারণ নদীর পানির গভীরতা কোথায় কেমন বিস্তারিতভাবে তাকে জানতে হবে। অর্থাৎ পানির গভীরতার ব্যবধান কেমন জানতে হবে, কোন জায়গায় যদি ১ বা ২ ফুট আবার কোন জায়গায় যদি ৭ বা ৮ ফুট হয় তবেই বিপদের সম্মুখিন হতে হয়। সুতরাং তথ্যরাশির ব্যবধান বা বিস্তার কোন চলকের দ্বিতীয় বৈশিষ্ট্য।

বিস্তার দ্বারা চলকের তথ্যরাশির ব্যাপ্তি কিংবা নির্দিষ্ট কোন মান থেকে রাশিগুলোর বিচ্যুতি বা ব্যবধান বুঝানো হয়ে থাকে।

বিস্তার পরিমাপ ঃ বিস্তারের পরিমাপ যে মানের দ্বারা করা হয় তাকে বিস্তারের পরিমাপক বলা হয়। কিভাবে চলকের তথ্যমানসমূহ বিক্ষিপ্ত হয়ে আছে তার বিভিন্ন মাত্রা বিস্তার পরিমাপকের দ্বারা জানা যায়। বিস্তার পরিমাপের কিছু শর্ত মেনে চলা উচিত। যেমন–

ক) বিস্তার পরিমাপ চলকের সকল তথ্যমানের উপর ভিত্তি করে হওয়া উচিত।

খ) ইহা সহজে নির্ণয় এবং যাতে করে সহজবোধ্য হয় সে ব্যাপারে খেয়াল রাখা উচিত।

বিস্তার পরিমাপের প্রকারভেদ

বিস্তার পরিমাপ দুই প্রকার হতে পারে, যেমন–

১। পরম বিস্তার পরিমাপ (Absolute Measures of Dispersion)

২। আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ (Relative Measures of Dispersion)

১। পরম বিস্তার পরিমাপ

পরম বিস্তার পরিমাপের ক্ষেত্রে চলকের তথ্যমান এবং বিস্তারের একক একই থাকবে। পরম বিস্তার চার ধরনের। যথা–

ক) পরিসর (Range)

খ) চতুর্থক ব্যবধান (Quartile deviation)

গ) গড় ব্যবধান (Mean deviation)

ঘ) পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাংক (Standard deviation and variance)

২। আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ (Relative measures of dispersion)

যে পরিমাপ কোন একটি বিস্তার পরিমাপ ও কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপের সাথে তুলনা করে নির্ণয় করা হয় তাকে আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ কলে। এটা একটা একক বিহীন সংখ্যা এবং একে শতকরা বা অনুপাত আকারে পরিমাপ করা হয়। আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ চার প্রকার, যথা–

ক) পরিসরাংক (Co-efficient of Range)

খ) চতুর্থক ব্যবধানাংক (Co-efficient of Quartile deviation)

গ) গড় ব্যবধানাংক (Co-efficient of Mean deviation)

ঘ) পরিমিত ব্যবধানাংক ও ব্যবধানাংক (Co-efficient of standard deviation and Co-efficient of Variation)

বিস্তার পরিমাপের প্রয়োজনীয়তা

১। গড়ের বিশ্বাসযোগ্যতা নির্ণয় ঃ তথ্যমান সমূহের বিস্তার পরিমাপের দ্বারা গড়ের অবস্থান এবং সঠিকতা নির্ণয় করা যায়। বিস্তার পরিমাপক যদি কম হয় তবে বুঝতে হবে চলকের তথ্য মানসমূহ এর কেন্দ্রবিন্দু বা গড়ের খুব কাছাকাছি অবস্থান করছে এবং এক্ষেত্রে গড় বিশ্বাসযোগ্য অর্থাৎ এ মান সকল মানের উপস্থাপক। আবার বিস্তার পরিমাপের মান যদি বেশি হয় তবে বুঝতে হবে তথ্যমানসমূহ গড় থেকে বেশ দূরে বিস্তৃত। এক্ষেত্রে গড় তথ্যসমূহের সকল মানকে উপস্থাপন করে না।

২। দুই বা ততোধিক চলকের তুলনামূলক আলোচনা ঃ বিস্তার পরিমাপকের দ্বারা দুই বা ততোধিক চলকের তথ্যমানসমূহের মধ্যে তুলনা করা যায়। যে চলকের বিস্তার মান কম হয় সেটিই ভাল।

সারসংক্ষেপ ঃ

তথ্যমান সমূহের অথবা গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে তথ্যমানগুলোর কেন্দ্রের দিকে কেন্দ্রিভূত হওয়ার প্রবনতা যেমন থাকে তেমনি মানগুলোর প্রসারিত হওয়ার প্রবনতাও থাকে। বিস্তার হল কেন্দ্রীয় প্রবনতার বিপরীত ধরনের বৈশিষ্ট্য।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন–৬.১

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন।

১। বিস্তার দ্বারা চলকের তথ্যরাশিসমূহের কি বুঝায়?

(ক) ব্যবধান (খ) গড়

(গ) প্রচুরক (ঘ) মধ্যমা।

২। বিস্তার পরিমাপ চলকের কতগুলো মানের উপর হয়?

(ক) আংশিক মান (খ) সকল মান

(গ) অর্ধেক মান (ঘ) উপরের কোনটিই নয়।

৩। বিস্তার পরিমাপের প্রকারভেদ কয়টি?

(ক) ৩টি (খ) ৪টি

(গ) ৫টি (ঘ) ২টি।

৪। বিস্তার দুই বা ততোধিক চলকের মধ্যে কি করে?

(ক) তুলনা করে (খ) সংমিশ্রণ করে

(গ) আলাদা করে (ঘ) কোনটিই নয়।

সত্য/মিথ্যা নির্নয় ঃ

৫। চলকের মানগুলোর বিভিন্ন দিকে প্রসারিত হবার প্রবনতাকে বিস্তার বলে।

শুন্যস্থান পূরন ঃ

৬। -------------- চলকের সকল তথ্যমানের উপর ভিত্তি করে হওয়া উচিত।

৭। যে চলকের বিস্তার মান কম হয় সেটিই হল ------------ ।

বাক্য মিলানো ঃ

৮। বিস্তার পরিমাপের দ্বারা দুই বা ততোধিক চলকের	ক) সমূহের কেন্দ্রবিন্দুর কাছাকাছি অবস্থান করে।
৯। বিস্তার পরিমাপক যদি কম হয় তবে তথ্যমান	খ) একক বিহীন সংখ্যা
১০। আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপকে একটি	গ) তথ্যমান সমূহের মধ্যে তুলনা করা যায়।

পাঠ-৬.২ পরিসর ও পরিসরাংক
(Range and Co-efficient of Range)

ভূমিকা

এ পাঠে পরিসর ও পরিসরাঙ্ক সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হল।

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- পরিসর কিভাবে নির্ণয় করতে হয় বলতে পারবেন;
- পরিসর এর সুবিধা ও অসুবিধা সমূহ বলতে পারবেন।

পরিসর (Range)

পরিসর হল বিস্তার পরিমাপের সবচেয়ে সহজবোধ্য ও সহজভাবে নির্ণয়ের পরিমাপ। চলকের মানসমূহের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের বা সংখ্যার পার্থক্য বা ব্যবধানকে পরিসর বলে। অর্থাৎ পরিসর = বৃহত্তম সংখ্যা − ক্ষুদ্রতম সংখ্যা।

গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে উচ্চতর শ্রেণীর উচ্চসীমা এবং নিম্নতর শ্রেণীর নিম্নসীমার ব্যবধানকে পরিসরের পরিমাণ বলে।

অর্থাৎ পরিসর = উচ্চশ্রেণীর উচ্চসীমা − নিম্নশ্রেণীর নিম্নসীমা।

পরিসরের আপেক্ষিক পরিমাপ হলো পরিসরাংক। চলকের তথ্যমান সমূহের পরিসরকে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের যোগফল দ্বারা ভাগ করলে পরিসরাংক পাওয়া যায়। অর্থাৎ–,

পরিসরাংক = cwimi / (e,,nËg msL¨v + ÿz`ªZg msL¨v) × ১০০

উদাহরণ ঃ ১২ জন ব্যক্তির উচ্চতা হল যথাক্রমে ৬২, ৬৫, ৬৮, ৬৯, ৭১, ৬৯, ৬৭, ৭১, ৬৬, ৭৩, ৭২, ৬১ ইঞ্চি। পরিসর এবং পরিসরাংক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে বৃহত্তম সংখ্যা= ৭৩

ক্ষুদ্রতম সংখ্যা = ৬১

∴ পরিসর = ৭৩−৬১

= ১২ ইঞ্চি।

পরিসরাংক $= \frac{12}{73+61}$

$= \frac{7}{134} \times$ ১০০

= ৫.২২%

উদাহরণ: নিম্নের গণসংখ্যা নিবেশন বিন্যাস হতে পরিসর ও পরিসরাঙ্ক নির্ণয় করুন।

শ্রেণী	৫-১০	১০-১৫	১৫-২০	২০-২৫	২৫-৩০	৩০-৩৫	৩৫-৪০	৪০-৪৫	৪৫-৫০	৫০-৫৫
গণসংখ্যা	৭	১১	১৪	১৯	২৭	৪৮	৪৩	২১	১৩	৯

সমাধান ঃ পরিসর = উচ্চশ্রেণীর উচ্চসীমা − নিম্নশ্রেণীর নিম্নসীমা

= ৫৫ − ৫

= ৫০

$\therefore$ পরিসরাংক $= \frac{50}{55+5} \times$ ১০০

$= \frac{50}{60} \times$ ১০০

= ৮৩.৩৩%

পরিসরের সুবিধা ও অসুবিধা

সুবিধা ঃ

ক) পরিসর খুব সহজে বুঝা যায় এবং সহজে নির্ণয় করা যায়।

খ) পরিসর নির্ণয় করতে খুব কম সময় লাগে।

অসুবিধা ঃ

ক) পরিসর শুধুমাত্র তথ্যমান সমূহের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের উপর ভিত্তি করে করা হয়। সকল তথ্যমানের উপর নির্ভর করে করা হয় না বলে এটা ততটা নির্ভরযোগ্য বিস্তার পরিমাপ নয়।

খ) প্রাপ্তমানের প্রভাব পরিসরের উপর যথেষ্ট আছে।

গ) গাণিতিক প্রয়োজনের ক্ষেত্রে এটা উপযোগী নয়।

সারসংক্ষেপ ঃ

পরিসর বিস্তার পরিমাপের সবচেয়ে সহজ ভাবে নির্নয়ের পরিমাপ।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন–

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন।

১। চলকের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের পার্থক্যকে কি বলে?

(ক) পরিসরাংক (খ) পরিসর

(গ) গণসংখ্যা নিবেশন (ঘ) কোনটিই নয়।

২। পরিসরে আপেক্ষিক পরিমাপকে কি বলে?

(ক) চলক (খ) পরিসরাংক

(গ) ব্যবধান (ঘ) বিভেদাংক

৩। পরিসর শুধুমাত্র তথ্যসমূহের কোন মানের উপর ভিত্তি করে

(ক) বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান (খ) সকল মান

(গ) অর্ধেক মান (ঘ) কোনটিই নয়।

সত্য/মিথ্যা নির্নয় ঃ

৪। পরিসর = বৃহত্তম সংখ্যা + ক্ষুদ্রতম সংখ্যা

৫। পরিসর হল গড় পরিমাপের সহজতম পরিমাপ

শুন্যস্থান পূরন ঃ

৬। পরিসরাংক = -------------------------- ।

৭। পরিসর নির্নয় করতে ------------------- সময় লাগে।

বাক্য মিলানো ঃ

৮। প্রাপ্ত মানের প্রভাব	ক) সহজে নির্নয় করা যায়।
৯। পরিসর খুব সহজে বুঝা যায় এবং	খ) পরিসরের উপর যথেষ্ট আছে।

পাঠ-৬.৩ চতুর্থক ব্যবধান ও চতুর্থক ব্যবধানাংক
(Quartile deviation and Co-efficient of Quartile deviation)

ভূমিকা
এ পাঠে চতুর্থক ব্যবধান সম্পর্কে আলোচনা করা হল।

উদ্দেশ্য
এই পাঠ শেষে আপনি–

- চতুর্থক ব্যবধান সম্পর্কে ধারণা করতে পারবেন;
- চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় করতে পারবেন;
- চতুর্থক ব্যবধানাংক সম্বন্ধে বলতে পারবেন;
- চতুর্থক ব্যবধানাংক নির্ণয় করতে পারবেন;
- চতুর্থক ব্যবধানের সুবিধা ও অসুবিধা সম্পর্কে বলতে পারবেন।

চতুর্থক ব্যবধান (Quartile deviation)
পূর্বের পাঠে দেখা গেছে যে, পরিসর শুধুমাত্র চলকের ক্ষুদ্রতম মান এবং বৃহত্তম মানের উপর নির্ভরশীল। এখন চতুর্থক ব্যবধান চলকের প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থকের উপর নির্ভরশীল। এটি বিস্তারের দ্বিতীয় পরিমাপ এবং এর মান হল ৩য় ও ১ম চতুর্থক মানের ব্যবধানের অর্ধেক। অর্থাৎ $Q_১$ যদি ১ম চতুর্থক এবং $Q_৩$ যদি ৩য় চতুর্থক হয় তাহলে–

চতুর্থক ব্যবধান $QD = \frac{Q3 - Q1}{2}$

ইউনিট-৫ এর পাঠ ৫ এ $Q_১$, $Q_২$, $Q_৩$ কিভাবে নির্ণয় করতে হয় এর সূত্র বিস্তারিতভাবে দেয়া আছে।

চতুর্থক ব্যবধান পরিমাপকের একক আছে। চতুর্থক ব্যবধানের আপেক্ষিক পরিমাপক হল চতুর্থক ব্যবধানাংক। চতুর্থক ব্যবধানকে ৩য় ও ১ম চতুর্থকের গাণিতিক গড় দ্বারা ভাগ করলে চতুর্থক ব্যবধানাংক পাওয়া যায়। এটা একটি একক বিহীন সংখ্যা।

চতুর্থক ব্যবধানাংক = **Error!**× ১০০

$= \frac{Q3 - Q1}{Q3 + Q1} \times ১০০$

উদাহরণ-১

নিম্নলিখিত গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে চতুর্থক ব্যবধান ও চতুর্থক ব্যবধানাংক নির্ণয় করুন।

শ্রেণী	০-১০	১০-২০	২০-৩০	৩০-৪০	৪০-৫০	৫০-৬০	৬০-৭০	৭০-৮০
গণসংখ্যা	২	৩	১৫	৩৭	২৩	১৩	৫	২

সমাধান ঃ

চতুর্থক নির্ণয় সারণী

শ্রেণী	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
০-১০	২	২
১০-২০	৩	৫
২০-৩০	১৫	২০=$Fc_১$
৩০-৪০	৩৭	৫৭= $Fc_৩$
৪০-৫০	২৩	৮০
৫০-৬০	১৩	৯৩
৬০-৭০	৫	৯৮
৭০-৮০	২	১০০

এখানে $\frac{n}{4} = \frac{100}{4}$ = ২৫ এখানে $Q_১$ অবস্থান করে ৩০-৪০ শ্রেণীতে।

$$\therefore Q_১ = L_১ + \frac{\frac{n}{8} - F1}{fQ1} \times C$$

এখানে $L_১$ = ৩০, n= ১০০, $Fc_১$ = ২০, $fQ_১$=৩৭, C=১০

$$\therefore Q_১ = ৩০ + \frac{\frac{100}{4} - 20}{37} \times ১০$$

$$= ৩০ + \frac{5}{37} \times ১০ = ৩১.৩৫১$$

আবার $\frac{3n}{4} = \frac{300}{4}$ = ৭৫ যার চেয়ে বড় ক্রমযোজিত গণসংখ্যা হচ্ছে ৮০, অর্থাৎ ৪০-৫০ শ্রেণীতে $Q_৩$ অবস্থিত।

$$\therefore Q_৩ = L_৩ + \frac{\frac{3n}{4} - Fc3}{fQ3} \times C$$

এখানে $L_৩$ = ৪০, $Fc_৩$ = ৫৭, $fQ_৩$=২৩, C=১০

সুতরাং $Q_৩ = ৪০ + \frac{\frac{300}{4} - 57}{23} \times ১০$

$$= ৪০ + \frac{18}{23} \times ১০$$

$$= ৪৭.৮২৬$$

এখন, চতুর্থক ব্যবধান $Q_D = \frac{Q3 - Q1}{2}$

$$= \frac{47.826 - 31.351}{2}$$

$$= ১৬.৪৭৫$$

এবং চতুর্থক ব্যবধানাংক $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times ১০০$

$$= \frac{47.826 - 31.351}{47.826 + 31.351} \times ১০০$$

$$= \frac{16.475}{79.187} \times ১০০$$

$$= ২০.৮০৫\%$$

নিজে করুন **(Activity):** নিম্ন লিখিত গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে চতুর্থক ব্যবধান ও চতুর্থক ব্যবধাংক নির্ণয় করুন।

শ্রেণী	২০-৩০	৩০-৪০	৪০-৫০	৫০-৬০	৬০-৭০	৭০-৮০	৮০-৯০
গণসংখ্যা	৪	১৪	২৫	৫০	২৪	১০	১

চতুর্থক ব্যবধানের সুবিধা ও অসুবিধা

সুবিধা ঃ

ক) বিস্তার পরিমাপের জন্য চতুর্থক ব্যবধান পরিসরের চেয়ে বেশি উত্তম।

খ) চতুর্থক ব্যবধান সহজে নির্ণয় করা যায় এবং এটা বেশ সহজবোধ্য।

গ) এটা প্রান্তিয় মান দ্বারা প্রভাবিত হয় না।

সারসংক্ষেপ ঃ

চতুর্থক ব্যবধানের আপেক্ষিক পরিমাপ হল চতুর্থক ব্যবধানাংক।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন–৬.৩

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন।

১। চতুর্থক ব্যবধান কোন চতুর্থকের উপর নির্ভরশীল?

(ক) ১ম ও ৩য় চতুর্থক　　(খ) ১ম ও ২য় চতুর্থক

(গ) ২য় ও ৩য় চতুর্থক　　(ঘ) কোনটিই নয়।

২। চতুর্থক ব্যবধানের সূত্র কোনটি–

(ক) $\frac{Q1 + Q2}{2}$　　(খ) $\frac{Q3 - Q1}{2}$

(গ) $\frac{Q3 + Q2}{2}$　　(ঘ) $\frac{Q3 - Q2}{2}$

৩। চতুর্থক ব্যবধানাংকের সূত্র কোনটি–

(ক) $\frac{Q2 - Q1}{Q1 + Q2}$ (খ) $\frac{Q3 - Q1}{Q3 + Q1} \times$ ১০০

(গ) $\frac{Q3 + Q2}{Q3 - Q1}$ (ঘ) $\frac{Q3 - Q2}{Q3 + Q2}$

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় ঃ

৪। চতুর্থক ব্যবধান চলকের ১ম ও ৩য় চতুর্থকের উপর নির্ভরশীল।

৫। $Q_D = \frac{Q3 + Q2}{2}$

শুন্যস্থান পূরণ ঃ

৬। চতুর্থক ব্যবধান পরিমাপকের ------------ আছে।

৭। ব্যবধানাঙ্ক একটি একক --------------- সংখ্যা।

বাক্য মিলানো ঃ

৮। চতুর্থক ব্যবধান প্রান্তিক মান দ্বারা	ক) $\frac{Q3 - Q1}{Q3 + Q1} \times$ ১০০
৯। চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক =	খ) প্রভাবিত হয় না।

পাঠ-৬.৪ গড় ব্যবধান ও গড় ব্যবধানাংক
(Mean deviation and Co-efficient of mean deviation)

ভূমিকা

এ পাঠে গড় ব্যবধান সম্পর্কে আলোচনা করা হল।

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- গড় ব্যবধান সম্পর্কে ধারনা করতে পারবেন;
- গড় ব্যবধান নিরূপণ করতে পারবেন;
- গড় ব্যবধানাংক সম্পর্কে বলতে পারবেন;
- গড় ব্যবধানাংক নির্ণয় করতে পারবেন।

গড় ব্যবধান ও গড় ব্যবধানাংক

গড় ব্যবধানের ক্ষেত্রে প্রতিটি সংখ্যামানের পার্থক্য তথ্যমানসমূহের গাণিতিক গড় অথবা মধ্যমা থেকে নেয়া হয়, সাধারণত গাণিতিক গড় থেকে প্রতিটি মানের ব্যবধানের যোগফল শূন্য বিধায় এই ব্যবধানগুলো শুধুমাত্র ধনাত্মক ধরে নেওয়া হয় অর্থাৎ পরম (absolute) মান নেয়া হয়। পরম মান বোঝাতে ব্যবধান বা পার্থক্যগুলোর দুপাশে দাঁড়ি টানা হয়। তারপর ঐ ব্যবধানগুলোর গাণিতিক গড় নির্ণয় করে গড় ব্যবধান পাওয়া যায়।

যদি n সংখ্যক তথ্যমান বিশিষ্ট কোন চলকের মান $x_১, x_২, ... x_n$ হয়

এবং $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} xi$

যদি ঐ চলকের মানসমূহের গড় $\bar{x}$ হয় তবে গড় ব্যবধান হবে–

$$MD = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |Xi - \bar{x}| \quad i = ১, ২, ...n.$$

যদি n সংখ্যক মানকে k শ্রেণী বিশিষ্ট গণসংখ্যা নিবেশনে পরিণত করা যায় এবং Xi (i=১,২,........n) i তম শ্রেণীর মধ্যমান হয় এবং f_i যদি উক্ত শ্রেণীর গণসংখ্যা হয় তবে–

$$MD = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i |xi - \bar{x}|$$

এখানে, $\bar{x} = \frac{Sf_i\, Xi}{n}$; $n = \sum_{i=1}^{n} f_i$

গড় ব্যবধানাংক হল

$$\text{গড় ব্যবধানাংক} = \frac{\text{Mo e¨eavb}}{\text{MvwYwZK Mo}} \times ১০০$$

উদাহরণ ঃ

নওয়াপাড়া কলেজের দশ জন ছাত্রের বয়স নিম্নে দেওয়া আছে। গড় ব্যবধান ও গড় ব্যবধানাংক বের করুন।

বয়স (বৎসরে) ঃ ১৬, ১৫, ১৭, ১৮, ১৪, ১৯, ২১, ১৬, ২০, ২৩

সমাধান ঃ

এক্ষেত্রে গাণিতিক গড় $\bar{X} = \frac{SXi}{n}$

$= \frac{179}{10}$

= ১৭.৯

গড় ব্যবধান বের করতে হলে নিম্নের সারণী ব্যবহার করতে হবে।

গড় ব্যবধান ও গড় ব্যবধানাংক নির্ণয় সারণী

বয়স Xi	Xi - $\bar{X}$	| Xi - $\bar{X}$|
১৬	-১.৯	১.৯
১৫	-২.৯	২.৯
১৭	-০.৯	০.৯
১৮	০.১	০.১
১৪	-৩.৯	৩.৯
১৯	১.১	৩.১
২১	৩.১	১.৯
১৬	-১.৯	২.১
২০	২.১	৫.১
২৩	৫.১	
		|Xi- $\bar{X}$| = ২৩

$\therefore$ গড় ব্যবধান MD $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10}|Xi - \bar{X}|$

$= \frac{1}{10} \times$ ২৩

= ২.৩

এবং গড় ব্যবধানাংক $= \frac{2.3}{17.9} \times$ ১০০

= ১২.৮৪৯%

উদাহরণ-২ নিম্নে সারণী থেকে গড় ব্যবধান ও গড় ব্যবধাঙ্ক নির্ণয় করুন।

শ্রেণী	০-১০	১০-২০	২০-৩০	৩০-৪০	৪০-৫০	৫০-৬০	৬০-৭০
গণসংখ্যা	২	৩	১৫	৩৭	১৩	৫	২

সমাধান ঃ

গড় ব্যবধান ও গড় ব্যবধানাংক নির্ণয় সারণী

শ্রেণী	মধ্যমান Xi	গণসংখ্যা f	$f_i Xi$	$f_i \lvert Xi-\bar{X} \rvert$	$f_i \lvert Xi-\bar{X} \rvert$
০-১০	৫	২	১০	-৬৯.০	৬৯.০
১০-২০	১৫	৩	৪৫	-৭৩.৫	৭৩.৫
২০-৩০	২৫	১৫	৩৭৫	-২১৭.৫	২১৭.৫
৩০-৪০	৩৫	৩৭	১২৯৫	-১৬৬.৫	১৬৬.৫
৪০-৫০	৫৫	১৩	৭১৫	২০১.৫	২০১.৫
৫০-৬০	৬৫	৫	৩২৫	১২৭.৫	১২৭.৫
৬০-৭০	৭৫	২	১৫০	৭১.০	৭১.০
		Σf_i=১০০ =n	$\sum_{i=1}^{80} f_i Xi$ =৩৯৫০		$\Sigma f_i \lvert Xi-\bar{X} \rvert$ = ১০৫৩

$\bar{X} = \frac{3950}{100}$ = ৩৯.৫

অতএব, গড় ব্যবধান $MD = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} f_i|Xi-\bar{X}|$

$= \frac{1053}{100}$, n= ১০০

= ১০.৫৩

অতএব, গড় ব্যবধানাংক $= \frac{10.53}{39.5} \times$১০০

= ২৬.৬৫৮

গড় ব্যবধানের সুবিধা ও অসুবিধা

সুবিধা ঃ

ক) গড় ব্যবধান সহজে পরিমাপ করা যায়।

খ) গাণিতিক হিসাব সহজে করা যায়।

গ) দুই বা ততোধিক নিবেশনের তুলনা করার জন্য এটা একটা নির্ভরযোগ্য পরিমাপক।

অসুবিধা ঃ

ক) গড় ব্যবধানের ক্ষেত্রে ঋনাত্মক মান অগ্রাহ্য করতে হয় এটা নিঃসন্দেহে একটি খারাপ দিক।

সারসংক্ষেপ ঃ

গড়ে ব্যবধানের ক্ষেত্রে প্রতিটি সংখ্যা মানের পার্থক্য তথ্যমান সমূহের গাণিতিক অথবা মধ্যমা থেকে নেওয়া হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন–৬.৪

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন।

১। গড় ব্যবধান তথ্যমানসমূহের কোন মানের উপর ভিত্তি করে করা হয়?

(ক) সকল মান (খ) বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান

(গ) ১ম ও ৩য় চতুর্থকের মান (ঘ) কোনটিই নয়।

২। গড় ব্যবধানে গাণিতিক গড় থেকে প্রতিটি মানের ব্যবধান বা পার্থক্য কি হিসেবে ধরা হয়?

(ক) ঋনাত্মক মান (খ) শুধু ঋনাত্মক মান

(গ) পরম মান (ঘ) কোনটিই নয়।

৩। গড় ব্যবধান নির্ণয়ের সূত্র কোনটি−

(ক) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|Xi+\bar{X}|$ (খ) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|Xi-\bar{X}|$

(গ) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|Xi \square \bar{X}|}{2}$ (ঘ) কোনটিই নয়।

সত্য/মিথ্যা নির্নয় ঃ

৪। সাধারনত গাণিতিক গড় থেকে প্রতিটি ব্যবধানের যোগফল শুন্য হয়।

শুন্যস্থান পূরন ঃ

৫। ব্যবধানাঙ্ক = $\frac{\text{Mo e¨eavb}}{\tilde{N}}$ × ১০০

বাক্য মিলানো ঃ

৬। গড় ব্যবধান সহজে	ক) নির্ভরযোগ্য পরিমাপক
৭। দুই বা ততোধিক নিবেশনের তুলনা করার জন্য এটা একটা	খ) পরিমাপ করা যায়

পাঠ-৬.৫ পরিমিত ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধানাংক
(Standard deviation and Co-efficient of Standard deviation)

ভূমিকা

পরিমিত ব্যবধান সম্পর্কে এ পাঠে বিস্তারিত আলোচনা করা হল।

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাংক সম্পর্কে বলতে পারবেন;
- পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাংক নির্ণয় করতে পারবেন;
- পরিমিত ব্যবধানাংক সম্পর্কে ধারণা করতে পারবেন;
- বিভেদাংক সম্পর্কে ব্যাখ্যা এবং এটা নির্ণয় করতে পারবেন।

পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাংক (Standard deviation and Variance)

পরিমিত ব্যবধান বিস্তার পরিমাপের একটি গুরুত্বপূর্ণ ও বহুল প্রচলিত বিস্তার পরিমাপ। গড় ব্যবধানের পদ্ধতি গ্রহণ করা হয় এবং সংখ্যামান থেকে গড়ের ব্যবধানগুলোকে এক্ষেত্রে বর্গ করা হয় ফলে সমস্ত বর্গফলগুলোই ধনাত্মক হয়ে যায়।

কোন চলক বা নিবেশনের সকল তথ্যমান থেকে এদের গাণিতিক গড়ের ব্যবধানসমূহের বর্গের গড় হল ভেদাংক এবং ভেদাংক এর বর্গমূল হল পরিমিত ব্যবধান।

যদি n সংখ্যক তথ্যমান বিশিষ্ট চলকের মান $X_১, X_২, ...X_n$ হয় এবং এর গাণিতিক গড় $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Xi$ হয়, তবে ভেদাংক

$S২ \quad = \frac{1}{n}\Sigma\,(Xi - \bar{X})^2$

= **Error!**

এবং পরিমিত ব্যবধান

S = **Error!**

গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে যেখানে $X_১, X_২, ...\ X_k$ হল মধ্যমান এবং $f_১, f_২, ...\ f_k$ হলো যথাক্রমে তাদের গণসংখ্যা। ভেদাংক

$S^২ \quad = \frac{1}{n}\Sigma f$ **Error!**^{২}

= Error!

এবং পরিমিতি ব্যবধান

S = **Error!**

পরিমিত ব্যবধানাংক: পরিমিত ব্যবধান ও গড়ের অনুপাতকে ১০০ দ্বারা গুন করলে যে মান পাওয়া যায় তাকেই পরিমিত ব্যবধানাংক বলে।

অর্থাৎ পরিমিত ব্যবধানাংক = $\frac{\text{cwiwgZ e¨eavb}}{\text{Mo}}$ × ১০০

পরিমিত ব্যবধানাংক = $\frac{S}{\bar{x}}$ × ১০০

উদাহরণ- ১

পাঠ-৬.৪ এ উদাহরণ-১ এ বর্ণিত ১০ জন ছাত্রের বয়সের পরিমিত ব্যবধান এবং পরিমিত ব্যবধানাংক বের করুন।

সমাধান ঃ

এখানে n= ১০

$\therefore$ S = **Error!**

এখন, $\sum_{i=1}^{10} Xi2$ = ১৬২+১৫২+১৭২+ .... +২৩২ = ৩২৭৭

এবং $\sum_{i=1}^{10} Xi$ =১৬+১৫+১৭+ .... + ২৩ = ১৭৯

$\therefore$ S = **Error!**

$= \sqrt{\frac{1}{10} \square 72.9}$

= ২.৭

$\therefore$ সুতরাং পরিমিত ব্যবধান = ২.৭

পরিমিত ব্যবধানাংক = $\frac{S}{\overline{X}}$ × ১০০

= $\frac{2.7}{17.9}$× ১০০

= ১৫.০৮৪%

উদাহরণ-২ ঃ দুইজন ছাত্র ‘ক' এবং ‘খ' ৫টি বিষয়ে নিম্নলিখিত নম্বর পেল। কোন ছাত্রটি ভাল বের করুন।

ছাত্র	বিষয়-১	বিষয়-২	বিষয়-৩	বিষয়-৪	বিষয়-৫
ক	২৫	৩৬	৩২	৪০	৩৭
খ	৪২	৫০	২০	১৬	৪২

সমাধান ঃ

ছাত্র ‘ক' এর নম্বরের গড়

$\overline{X}1 = \frac{25 + 36 + 32 + 40 + 47}{5}$

$= \frac{170}{5}$ = ৩৪

এবং $\overline{X}2 = \frac{42 + 50 + 20 + 16 + 42}{5}$

$= \frac{170}{5}$ = ৩৪

ছাত্র “ক” নম্বরের পরিমিত বিস্তার S_1= **Error!**

= **Error!**

= **Error!**

$= \sqrt{\frac{1}{5} \square 134}$

$= ৫.১৭৭$

এখন ছাত্র ‘ক' এর পরিমিত ব্যবধানাংক $= \frac{S1}{\overline{X1}} \times ১০০ = \frac{5.177}{34} \times ১০০$ [$\because S_১ = ৫.১৭৭$ এবং $\overline{X1} = ৩৪$]

$= ১৫.২২৬\%$

ছাত্র ”খ”-এর পরিমিত বিস্তার $S_২$ = **Error!**

$$S_২ = \sqrt{\frac{1}{5} \times 756.60780}$$

$$= \sqrt{151.33215}$$

$$= ১৩.৪৬৬$$

$$\therefore \quad S_২ = ১৩.৪৬৬$$

এখন ছাত্র “খ” এর পরিমিত ব্যবধাংক $= \frac{13.466}{34} \times ১০০$

$= ৩৯.৬০৬$

এখানে দেখা যাচ্ছে যে, ছাত্র ‘ক' এবং ‘খ' উভয়েরই গড় নম্বর সমান অর্থাৎ ৩৪। কিন্তু ‘খ' এর প্রাপ্ত নম্বরের পরিমিত ব্যবধানাংক ‘ক' এর চেয়ে বেশি অর্থাৎ ৩৯.৬০৬% যেখানে ক-এর ১৫.২২৬%। যেহেতু ‘ক' এর পরিমিত ব্যবধানাংক কম সেহেতু ‘ক' অন্য ছাত্র ‘খ' এর চেয়ে ভাল।

উদাহরণ-৩ ঃ পাঠ ৬.৩ এ উদাহরণ-১ এ বর্ণিত গণসংখ্যা নিবেশনের জন্য পরিমিত ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধানাংক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় সারণী

শ্রেণী	মধ্যমান Xi	গণসংখ্যা f_i	f_iXi	f_iXi^২
০-১০	৫	২	১০	৫০
১০-২০	১৫	৩	৪৫	৬৭৫
২০-৩০	২৫	১৫	৩৭৫	৯৩৭৫
৩০-৪০	৩৫	৩৭	১২৯৫	৪৫৩২৫
৪০-৫০	৪৫	২৩	১০৩৫	৪৬৫৭৫
৫০-৬০	৫৫	১৩	৭১৫	৩৯৩২৫
৬০-৭০	৬৫	৫	৩২৫	২১১২৫
৭০-৮০	৭৫	২	১৫০	১১২৫০
		Σf_i= ১০০	Σf_iXi= ৩৯৫০	Σf_iXi^২= ১৭৩৭০০

ভেদাংক $S_{২}$ = **Error!**

= **Error!**

$= \frac{17675}{100} =$ ১৭৬.৭৫

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান $S = \sqrt{176.75}$

= ১৩.২৯৫

এবং পরিমিত ব্যবধানাংক $= \frac{S}{X} \times$ ১০০

$= \frac{13.295}{39.5} \times$ ১০০

= ৩৩.৬৫৭

পরিমিত ব্যবধানের সুবিধা ও অসুবিধা

সুবিধা ঃ

ক) পরিমিত ব্যবধান বিস্তার পরিমাপের সবচেয়ে বেশি গুরুত্বপূর্ণ ও বহুল ব্যবহৃত পরিমাপ।

খ) পরিমিত ব্যবধানে গাণিতিক সংজ্ঞা স্পষ্ট এবং এটা সমস্ত তথ্যমানের উপর ভিত্তি করে নির্ণয় করা হয়।

গ) দুই বা বেশি গ্রুপের তথ্যমানের জন্য সংযুক্ত পরিমিত ব্যবধান বের করা যায় কিন্তু অন্য পরিমাপের ক্ষেত্রে সম্ভব নয়।

ঘ) দুই বা ততোধিক বিন্যাসের তুলনা করার জন্য পরিমিত ব্যবধানাংক সবচেয়ে বেশি উপযোগী।

অসুবিধা ঃ

ক) অন্যান্য পরিমাপের চেয়ে এটা নির্ণয় করা একটু কঠিন।

খ) এটি পরিমাপের যথার্থতা সম্পর্কে ধারনা দিতে পারে না।

সারসংক্ষেপ ঃ

কোন চলক বা নিবেশনের সকল তথ্যমান থেকে এদের গাণিতিক গড়ের ব্যবধানসমুহের বর্গের গড় হল ভেদাংক এবং ভেদাংকের বর্গমূল হল পরিমিত ব্যবধান।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন–৬.৫

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন।

১। পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের সূত্র কোনটি?

(ক) (খ)

(গ) (ঘ)

২। পরিমিত ব্যবধান ভেদাংকের কোনটি–

(ক) বর্গমূল (খ) গড়

(গ) মধ্যমা (ঘ) বর্গ।

৩। পরিমিত ব্যবধানের ক্ষেত্রে সংখ্যামান থেকে গড়ের ব্যবধান সমূহের মান কেমন নেয়া হয়?

(ক) ঋনাত্মক (খ) পরম মান

(গ) ঋনাত্মক ও ঋনাত্মক উভয়ই (ঘ) ঋনাত্মক।

৪। পরিমিত ব্যবধানাংকের সূত্র কোনটি?

(ক) $\frac{\text{Mo}}{\text{cwiwgZ e¨eavb}} \times$ ১০০ (খ) $\frac{\text{cwiwgZ e¨eavb}}{\text{Mo}} \times$ ১০০

(গ) পরিমিত ব্যবধান × ১০০ (ঘ) কোনটিই নয়।

সত্য/মিথ্যা নির্নয় ঃ

৫। পরিমিত ব্যবধান বিস্তার পরিমাপের গুরুত্বপূর্ন পরিমাপ নয়।

৬। ভেদাংকের বর্গমূল হল পরিমিত ব্যবধান।

শুন্যস্থান পূরন ঃ

৭। পরিমিত ব্যবধান = ------------- ।

৮। পরিমিত ব্যবধানাঙ্ক = $\frac{\text{S}}{\cdots\cdots} \times$ ১০০

বাক্যমিলানো ঃ

৯। দুই বা ততোধিক গ্রুপের তথ্যমানের জন্য সংযুক্ত	ক) ফলে সমস্ত বর্গফলগুলোই ধনাত্মক
১০। সংখ্যামান থেকে গড়ের ব্যবধানগুলোকে বর্গ করা হয়।	খ) পরিমিত ব্যবধান বের করা যায়

পাঠ-৬.৬ বিভিন্ন উপপাদ্য ও তার প্রমাণ (Theory and its proves)

ভূমিকা

বিভিন্ন উপপাদ্য ও তার প্রমান এ পাঠে আলোচনা কর হল।

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- বেশ কিছু উপপাদ্য সম্পর্কে বলতে পারবেন এবং এগুলোর প্রমাণ করতে পারবেন।

বিভিন্ন উপপাদ্য

উপপাদ্য-১

যদি চলকের মানগুলোর ব্যবধান এর গাণিতিক গড় $\bar{X}$থেকে নেয়া হয় তাহলে ব্যবধান সমূহের বর্গের যোগফল ক্ষুদ্রতম।

প্রমাণ ঃ মনে করুন, n সংখ্যক তথ্যমান বিশিষ্ট একটি চলকের মান $X_১$, $X_২$, ... X_n এবং এদের গাণিতিক গড় $\bar{X}$ধরা যাক, M অন্য যে কোন একটি মান। প্রমাণ করতে হবে যে, **Error!**< **Error!**

এখন, **Error!**

= **Error!**

$$= \sum_{i=1}^{n}\{(X_i - \bar{X}) + (\bar{X} - M)\}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\{(X_i - \bar{X})^2 + ২n\,(X_i - \bar{X})(\bar{X} - M) + (\bar{X} - M)^2\}$$

= **Error!**+ ২n × ০ × $(\bar{X} - M)$ + n $(\bar{X} - M)^2$

= **Error!**+ n $(\bar{X} - M)^2$ ∵ **Error!**= ০

যেহেতু, $\bar{X} \neq M$ সুতরাং $n(\bar{X} - M)^2 \geq$ ০ অর্থাৎ **Error!**এর সাথে একটি অশুন্য ধনাত্মক সংখ্যা যোগ করলে **Error!**^{2}এর সমান হয় সুতরাং

Error!< **Error!**

উদাহরণ-২ ঃ গড় থেকে তথ্যগুলির ব্যবধানের যোগফল শুন্য।
প্রমান ঃ মনে করুন, n সংখ্যক তথ্যমান বিশিষ্ট একটি চলকের মান $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots\ldots X_n$ এবং এদের গাণিতিক গড় $\bar{X}$।
প্রমাণ করতে হবে যে, **Error!**= ০

এখন, **Error!**= $\sum_{i=1}^{n} X_i - n\bar{x}$
উভয় পক্ষে n দ্বারা ভাগ করলে, **Error!**= $\bar{X} - \bar{X}$ = ০ (প্রমানিত)

উদাহরণ-৩ ঃ ভেদাংক ও পরিমিত ব্যবধান উভয়ই চলকের মূলবিন্দু পরিবর্তনের উপর নির্ভরশীল নয়।
প্রমান ঃ মনে করুন, n সংখ্যক তথ্যমান বিশিষ্ট একটি চলকের মান, X_1, X_2, ------ X_n এবং এদের গাণিতিক গড় $\bar{X}$, অতএব,
S_x = **Error!**
ধরুন, M মূল বিন্দু, এখন $U_i = (X_i - M)$
=> $X_i = U_i + M$
এবং $\bar{U} = \bar{X} - M$
=> $\bar{X} = \bar{U} + M$
S_x = **Error!**- $(\bar{U} + M)\}^2$
= **Error!**
= **Error!**
$\therefore S_x = S_U$ অর্থাৎ পরিমিত ব্যবধান মূলবিন্দু পরিবর্তনের উপর নির্ভরশীল নয় আবার
ভেদাংক, S_x^2= **Error!**
= (পরিমিত ব্যবধান)^2
= S_U^2
$\therefore S_x^2 = S_U^2$ অর্থাৎ ভেদাঙ্কের ক্ষেত্রেও মূলবিন্দু পরিবর্তনের উপর নির্ভরশীল নয়। (প্রমানিত)

উপপাদ্য-৪

যদি চলকের মানসংখ্যাগুলোকে কোন স্থির সংখ্যা (স্কেল) দ্বারা গুণ/ভাগ করা হয়, সেক্ষেত্রে ভেদাংক ও পরিমিত ব্যবধান উভয়ই ঐ স্থির সংখ্যা দ্বারা পরিবর্তনশীল।

প্রমান ঃ মনে করুন, n সংখ্যক তথ্যমান বিশিষ্ট একটি চলকের মান, X_1, X_2, ------ X_n এবং এদের গাণিতিক গড় $\bar{X}$, অতএব,

পরিমিত ব্যবধান, $S_X = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=১}^{n}(x_১ - \bar{x})^২}$

ধরুন, X_i এর চলকে নতুন পরিবর্তন

$U_i = \frac{X_i - M}{H}$; M = মূল বিন্দু ও H = স্কেল বা স্থীর সংখ্যা

অর্থাৎ $X_i = HU_i + M$

এবং $\bar{X} = H\bar{U} + M$

এখন, S_x = **Error!**- $(H\bar{U} + M)\}^2$

= **Error!**

= **Error!**

= **Error!**

= H**Error!**

$= HS_U$

$\therefore S_x = HS_U$
অর্থাৎ পরিমিত ব্যবধান স্থীর সংখ্যা দ্বারা পরিবর্তনশীল।

ভেদাংক = (পরিমিত ব্যবধান)^2

$\therefore S_x^2 = H^2 S_U^2$
অর্থাৎ ভেদাঙ্ক ও স্থীর সংখ্যা দ্বারা পরিবর্তনশীল।

(প্রমানিত)

উপপাদ্য-৫: প্রথম n স্বাভাবিক ধনাত্মক সংখ্যার ভেদাংক $\frac{n^2 - 1}{12}$

প্রমাণ ঃ

ধরা যাক, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যা ১, ২, ৩, ... n অতএব

$\Re X_i =$ ১ + ২ + ------------------- + n = **Error!**

এবং $\Sigma X_i^2 =$ ১^2+ ২^2+ ------------------- + $n^2 =$ **Error!**

অতএব, ভেদাঙ্ক $= \frac{1}{n}\sum x_i^২ - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^২$

$= \frac{1}{n} \times$ **Error!- Error!**

= **Error!- Error!**

= (n+১) **Error!**

= (n+১) **Error!**

$=$ (n+১) $\left[\frac{4n + 2 - 3n - 3}{12}\right]$

$=$ (n+১) $\left[\frac{n - 1}{12}\right]$

$= \frac{n^২ - ১}{১২}$

$\therefore$ ভেদাঙ্ক $= \frac{n^২ - ১}{১২}$

(প্রমানিত)

সারসংক্ষেপ ঃ

গুরুত্বপূর্ন কয়েকটি উপপাদ্যের প্রমান দেওয়া হয়েছে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন–৬.৬

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন।

১। চলকের গাণিতিক গড় থেকে মানগুলোর ব্যবধানসমূহের বর্গের যোগফল কি রকম?

(ক) বৃহত্তম (খ) ক্ষুদ্রতম

(গ) ঋনাত্মক (ঘ) কোনটিই নয়।

২। দুটি সংখ্যার পরিমিত ব্যবধান কোনটি?

(ক) সংখ্যা দুটির যোগফল (খ) সংখা দুটির বিয়োগফল

(গ) সংখ্যা দুটির পরিসরের অর্ধেক (ঘ) কোনটিই নয়।

৩। প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার ভেদাংকের সূত্র কোনটি–

(ক) **Error!** (খ) $\frac{n^{২}-১}{১২}$

(গ) **Error!** (ঘ) **Error!**

সত্য/মিথ্যা নির্নয় ঃ

৪। কোন চলকের মানগুলোর ব্যবধান এর গাণিতিক গড় থেকে নেওয়া হলে তার ব্যবধান সমূহের বর্গের যোগফল ক্ষুদ্রতর।

গুন্যস্থান পূরণ ঃ

৫। গড় থেকে তথ্যগুলির ব্যবধানের যোগফল ------------------ ।

বাক্য মিলানো ঃ

৬। পরিমিত ব্যবধান চলকের মূলবিন্দুর পরিবর্তনের উপর	ক) উপর নির্ভরশীল
৭। ভেদাঙ্ক চলকের স্থীর বিন্দুর পরিবর্তনের	খ) নির্ভরশীল নয়।

চূড়ান্ত মূল্যায়নঃ ৬

রচনামূলক প্রশ্নাবলী

১। বিস্তার ও বিস্তার পরিমাপ বলতে কি বুঝায় উদাহরণসহ লিখুন।

২। বিভিন্ন বিস্তার পরিমাপগুলো কি কি? বর্ণনা করুন। কোন পরিমাপটি ভাল, যুক্তি সহকারে উল্লেখ করুন।

৩। আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ ও পরম বিস্তার পরিমাপ বলতে কি বুঝায়? এদের মধ্যে পার্থক্য কি?

৪। বিস্তার পরিমাপের প্রয়োজনীয়তা সম্পর্কে আলোচনা করুন।

৫। পরিসর বলতে কি বোঝায়? এটা কিভাবে নির্ণয় করতে হয়? পরিসরাংক কি? পরিসরের সুবিধা ও অসুবিধাসমূহ লিখুন। নিম্নলিখিত তথ্যমান থেকে পরিসর এবং পরিসরাংক বের করুন।

১৯, ১৬, ১৫, ১৪, ১৩, ১৭, ২১, ২২, ২৮, ১৫, ১৬, ১৯

৬। চতুর্থক ব্যবধান ও চতুর্থক ব্যবধানাংক বলতে কি বুঝায়? এগুলো নির্ণয় করার পদ্ধতি বর্ণনা করুন। চতুর্থক ব্যবধানের সুবিধা ও অসুবিধাসমূহ লিখুন।

৭। নিম্নলিখিত গণসংখ্যা নিবেশন থেকে চতুর্থক ব্যবধান ও চতুর্থক ব্যবধানাংক নির্ণয় করুন।

X	১০-২০	২০-৩০	৩০-৪০	৪০-৫০	৫০-৬০	৬০-৭০
f	১২	১৯	৫	১০	৯	৬

৮। পরিমিত ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধানাংক বলতে কি বুঝায়? কিভাবে এগুলো নির্ণয় করতে হয়? এর সুবিধা ও অসুবিধাসমূহ লিখুন। পরিমিত ব্যবধান ও গড় ব্যবধানের মধ্যে পার্থক্য কি?

৯। নিম্নে প্রদত্ত কিছুসংখ্যক লোকের উচ্চতার নিবেশনের সারণী থেকে পরিমিত ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধানাংক নির্ণয় করুন।

শ্রেণীতে উচ্চতা (ইঞ্চিতে)	লোকের সংখ্যা
৬০-৬৫	২০
৬৫-৭০	১৮০
৭০-৭৫	৩১
৭৫-৮০	০৯

১০। দুটি সংখ্যার গাণিতিক গড় ৬ এবং ভেদাংক ৯। সংখ্যা দুটি কি কি?

১১। প্রথম ১০টি স্বাভাবিক সংখ্যার ভেদাংক নির্ণয় করুন।

১২। প্রমাণ করুন পরিমিত ব্যবধান চলকের মূল বিন্দু পরিবর্তনের উপর নির্ভরশীল নয় কিন্তু মাপনী বা স্কেলের উপর নির্ভরশীল।

১৩। প্রমাণ করুন দুটি সংখ্যার পরিমিত ব্যবধান সংখ্যা দুটির পরিসরের অর্ধেক।

১৪। প্রমাণ করুন, গাণিতিক গড় থেকে নেয়া চলকের সকল মানের ব্যবধান সমূহের বর্গের যোগফল ক্ষুদ্রতম।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৬.১

৬.১: ১। ক ২। খ ৩। ঘ ৪। ক ৫। সত্য ৬। বিস্তার পরিমাপ ৭। স্কল মাওনের উৎপাদক ৮। গ ৯। ক ১০। খ

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৬.২

৬.২: ১। খ ২। খ ৩। ক ৪। মিথ্যা ৫। সত্য ৬। $\frac{\text{cwimi}}{\text{¶z`aZg gvb + e„nËg gvb}}$ ৭। খুব কম ৮। খ ৯। ক

৬। $\frac{\text{cwimi}}{\text{¶z`aZg gvb + e„nËg gvb}}\infty$ ১০০ ৭। খুব কম ৮। খ ৯। ক।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৬.৩

৬.৩: ১। গ ২। ঘ ৩। ঘ ৪। মিথ্যা ৫। সত্য ৬। একক ৭। বিহীন ৮। খ ৯। ক।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৬.৪

৬.৪: ১। ক ২। খ ৩। খ ৪। সত্য ৫। গড় ৬। খ ৭। ক। $(\bar{X})$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৬.৫

৬.৫: ১। খ ২। ক ৩। ঘ ৪। খ ৫। মিথ্যা ৬। সত্য ৭। $\sqrt{\frac{১}{8}\sum(xi-\bar{x})^{২}}$ ৮। $\bar{x}$ ৯। খ ১০। ক।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৬.৬

৬.৬: ১। খ ২। ঘ ৩। খ ৪। সত্য ৫। শুন্য ৬। ঘ ৭। ক।