অধ্যায় ৮

সংশ্লেষ ও নির্ভরণ
(Correlation & Regression)

ভূমিকা

কোন সমগ্রকের দুই বা ততোধিক চলকের মধ্যে যে সম্পর্ক পরিলক্ষিত হয় তা হল সংশ্লেষ। সম্পর্কের মাত্রা একমুখী হতে পারে আবার বিপরীত মুখী হতে পারে যেমন ভাল পড়াশুনা কর্লে ভাল ফলাফল আশা করা যায়। এরূপ সম্পর্ক এক মুখী সম্পর্ক। আবার অতিরিক্ত বৃষ্টিতে ফসল খারাপ হয়। এরূপ সম্পর্ককে বিপরীত মুখী সম্পর্ক বলা হয়। দুইটি চলকর মধ্যে সম্পর্ক আছে এটুকু জানলে চলবেনা তার জন্য প্রয়োজন চলকের সম্পর্কের মাত্রা কতটুকু তার পরিমাপ সম্পর্কে জানা। সম্পর্ক পরিমাপের জন্য কার্ল পির্য়াসন একটি পরিমাপ পদ্ধতি বের করেছেন যাকে বলা হয় সংশ্লেষাঙ্ক বা Co-efficient of correlation। সংশ্লেষাঙ্কের মানের পরিমান দুইটি চলকের মধ্যকার সম্পর্কের মাত্রা নির্দেশ করে। আবার একটি চলকের গতিশীলতার পরিপ্রেক্ষিতে অপর চলকের কি ধরণের পরিবর্তন হয় তার পরিমাপ পদ্ধতিকে বলে নির্ভরণ (Regression)।

উদ্দেশ্য :

এ অধ্যায় শেষে আপনি বলতে পারবেন-

- সংশ্লেষণের ধারণা ও ব্যবহার
- সংশ্লেষ ও সংশ্লেষের প্রকারভেদ
- সংশ্লেষের পরিমাপ, ধর্ম ও প্রমান
- নির্ভরন, নির্ভরাঙ্ক ও ব্যবহার
- সংশ্লেষ ও নির্ভরণের পার্থক্য
- নির্ভরণের ধর্ম ও প্রমান
- সংশ্লেষ ও নির্ভরণের বিভিন্ন সমস্যার সমাধান

পাঠ: ৮.১: সংশ্লেষের ধারণা (Concept of correlation)

ভূমিকা

সংশ্লেষ বিশ্লেষনে আমরা সর্বত্র একাধিক তথ্যসারি নিয়ে বিশ্লেষণ করি এবং উহাদের মধ্যে তুলনামূলক পরিবর্তন পরিমাপ করি। সম্পর্ক বিশ্লেষণ সর্বক্ষেত্রেই তুলনামূলক অবস্থায় পরিমাপ। দু'টি চলকের মধ্যে সংশ্লেষ পরিলক্ষিত হলে সঙ্গে সঙ্গে ধরে নেওয়া যায় উহাদের মধ্যে সম্পর্ক আছে।

উদ্দেশ্য

এ পাঠে আপনি বলতে পারবেন:

- সংশ্লেষের সংজ্ঞা
- সংশ্লেষের ধারণা
- সংশ্লেষের ব্যবহার
- সংশ্লেষের বিভিন্ন সমস্যার সমাধান

সংশ্লেষ

যদি দু'টি চলক একই সাথে পরিবর্তীত হয় অর্থাৎ উহার একটিতে পরিবর্তন হলে অন্যটিতে কোন না কোন পরিবর্তন হয় তাহলে ধরে নেওয়া হয় উহাদের মধ্যে সম্পর্ক আছে। চলক দু'টির মধ্যে এরূপ সম্পর্ককে সংশ্লেষ বলে। উদাহরণ স্বরূপ বলা যায়, সার প্রয়োগে কোন জমির ফসলের উৎপাদন বৃদ্ধি পায়, অতিরিক্ত বৃষ্টিতে ফসলের ক্ষতি হওয়া ইত্যাদি। এখানে প্রথমটিতে সার ও ফসল দু'টি চলক এবং অন্যটিতে বৃষ্টি ও ফসল দু'টি চলক।

চলকের পরিবর্তনের প্রকৃতি ভিন্ন রূপ হতে পারে। যেমন, একটি চলক বৃদ্ধি পেলে অন্যটিতে হ্রাস/বৃদ্ধি পেতে পারে আবার একটি হ্রাস পেলে অন্যটি হ্রাস এবং দ্বিতীয়টিতে বৃদ্ধি পেতে পারে তাই সম্পর্কের প্রকৃতি অনুযায়ী সংশ্লেষকে ভিন্ন ভাবে ভাগ করা যায়:

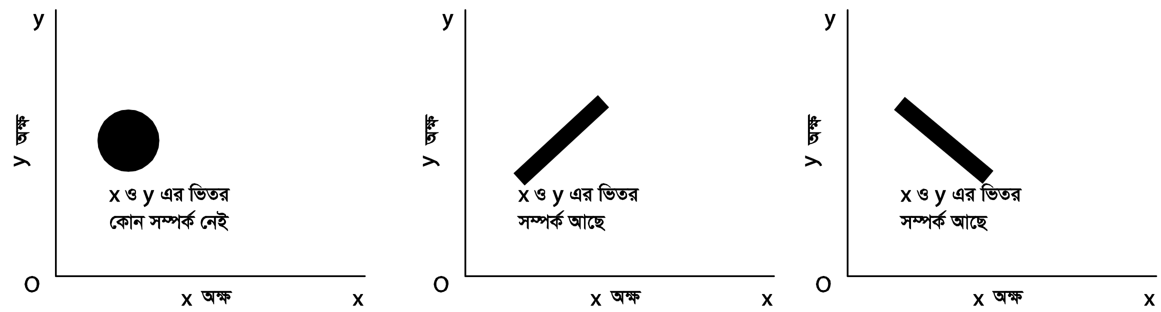
ধনাত্মক সংশ্লেষ: যদি একটি চলকের বৃদ্ধি অথবা হ্রাসের সাথে অপরটি বৃদ্ধি অথবা হ্রাস পায় তখন এ সম্পর্ককে ধনাত্মক সংশ্লেষ বলে।

ঋনাত্মক সংশ্লেষ: যদি একটি চলকের হ্রাস/বৃদ্ধিতে অন্য চলকে বিপরীতমূখী পরিবর্তন পরিলক্ষিত হয় তখন সেই সম্পর্কে ঋনাত্মক সংশ্লেষ বলে।

বিক্ষেপ চিত্র: দু'টি চলকের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ককে লেখের সাহায্যে প্রকাশ করা যায় বিক্ষেপ চিত্রের সাহায্যে, দ্বিচলক বিশিষ্ট তথ্যকে লেখ এর মাধ্যমে উপস্থাপন করাকেই বলা হয় বিক্ষেপ চিত্র। বিক্ষেপ চিত্রের মাধ্যমে সংশ্লেষ সম্পর্কে নিম্ন লিখিত মন্তব্য করা সম্ভব।

১। বিক্ষেপ চিত্রের বিন্দুগুলি যদি উর্দ্ধগামী বা নিম্নগামী হয় তাহলে চলক দ্বয়ের মধ্যে সম্পর্ক আছে বলে প্রতিয়মান হয় এবং যদি বিন্দুগুলির বিশেষ কোন গতিপথ না থাকে তবে চলক দ্বয়ের মধ্যে কোন সম্পর্ক নেই।

চিত্র দেখুন:



চিত্র : বিক্ষেপ চিত্র

২। যদি চলকদ্বয়ের অবস্থানের গতি উর্ধ্ব গামী হয় অর্থাৎ চিত্রের বাম দিকে নিচ হতে বিন্দুগুলি উপরের দিকে উঠতে থাকে তখন চলক দ্বয়ের সম্পর্ককে ধনাত্মক সংশ্লেষ বিদ্যমান বুঝতে হবে। চিত্র **দেখুন:**

চিত্র : ঋণাত্মক সংশ্লেষ

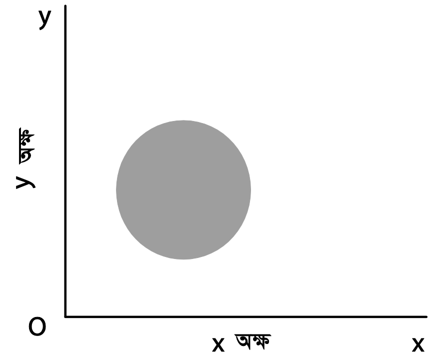
৩। যদি চলক দ্বয়ের অবস্থানের গতি নিম্ন মুখী হয় অর্থাৎ চিত্রের বাম দিকে উপর থেকে নিচে বিন্দুগুলি নামতে থাকে তখন তাদের সম্পর্ককে ঋনাত্মক সংশ্লেষ বিদ্যমান বুঝতে হবে।

চিত্র দেখুন:

চিত্র : ঋণাত্মক সংশ্লেষ

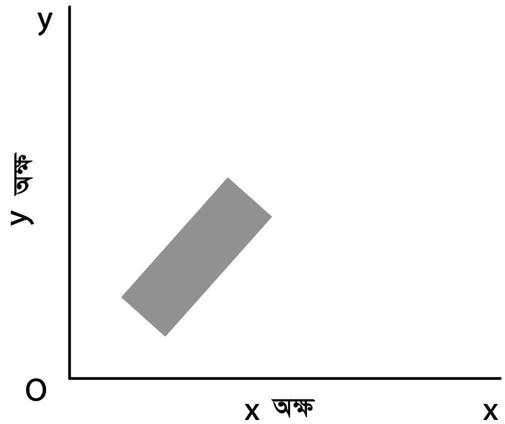
৪। যদি চলকদ্বয়ের মধ্যে কোন সম্পর্ক না থাকে তবে বিন্দুগুলি বিক্ষিপ্ত ভাবে লেখ কাগজে অবস্থান করবে।

চিত্র দেখুন:



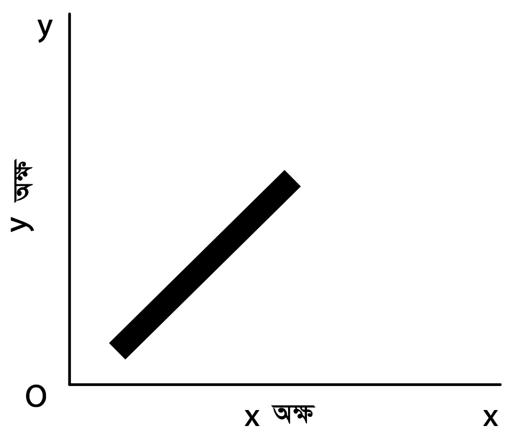
চিত্র : কোন সম্পর্ক নেই

৫। বিক্ষেপ চিত্রের বিন্দুগুলির বিস্তৃতি খুব কম হলে বুঝতে হবে চলকদ্বয়ের সংশ্লেষের মাত্রা খুব কম। চিত্রে দেখুন



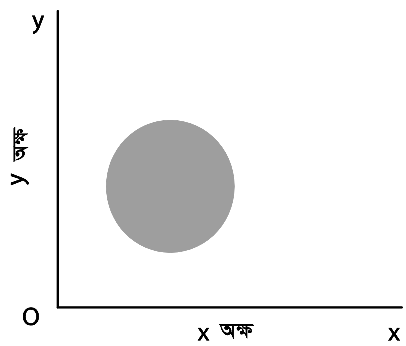
চিত্র : সংশ্লেষের মাত্রা খুব কম

যদি চলকদ্বয়ের মধ্য সম্পর্কে মাত্রা খুব বেশী হয় তবে বিন্দু গুলির অবস্থান খুবই কাছা কাছি হবে। চিত্র দেখুন:



চিত্র : সম্পর্কের মাত্রা খুব বেশী

শূণ্য সংশ্লেষ: যদি দুইটি চলকের মধ্যে কোন একটির পরিবর্তন হলে অন্যটির কোন পরিবর্তন হয় না অর্থাব্ব উহাদের মধ্যে কোন সম্পর্ক পরিলক্ষিত হয় না তখন সেই চলকের সম্পর্ককে শুন্য সংশ্লেষ বলে।



চিত্র : কোন সম্পর্ক নেই

সারসংক্ষেপ ঃ

কোন সমগ্রকের দুই বা ততোধিক চলকের মধ্যে যে সম্পর্ক পরিলক্ষিত হয় তা হল সংশ্লেষ। সংশ্লেষ দুই ধরণের; ১। ধনাত্মক সংশ্লেষ ২। ঋনাত্মক সংশ্লেষ। চিত্রের সাহায্যে দুইটি চলকের মধ্যেকার পারস্পরিক সম্পর্ক প্রকাশ করা যায়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৮.১

বহু নির্বাচন প্রশ্ন :

১। সর্ব ক্ষেত্রেই তুলানমূলক অবস্থার পরিমাপ কোনটি
ক) গড় খ) বিস্তার
গ) সম্পর্ক বিশ্লেষন ঘ) প্রচুরক

২। একটি চলকের মানের বৃদ্ধি যদি অপর চলকের মানের বৃদ্ধি পায় তবে তাকে বলা হয়
ক) ধনাত্মক সম্পর্ক খ) ঋনাত্মক সম্পর্ক
গ) শুন্য সম্পর্ক ঘ) অরৈখিক সম্পর্ক

৩। যদি দুটি চলকের মধ্যে সম্পর্কের মাত্রা খুব বেশী হয় তবে বিন্দু গুলি অবস্থা হবে
ক) খুব কাছা কাছি খ) দুরে
গ) খুব দুরে ঘ) অরৈখিক

সত্য/মিথ্যা

৪। বিক্ষেপ চিত্রের সাহায্যে দুটি চলকের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক প্রকাশ করা যায়।
৫। সম্পর্কের মাত্রা খুব কাছা কাছি হলে বিন্দু গুলির অবস্থান দূরে হয়।
৬। দ্বিচলক বিশিষ্ট তথ্যকে লেখের মাধ্যমে উপস্থাপন করাকে বলা হয় বিক্ষেপ চিত্র।
৭। দুইটি চলকের মধ্য সম্পর্ক না থাকলে তাকে শুন্য সম্পর্ক বলা হয়।

শূন্যস্থান পূরণ :

৮। সংশ্লেষণ দুই প্রকার ১। --------------------- ও ২। ----------------
৯। কোন সমগ্রকের দুই বা ততোধিক চলকের মধ্যে যে সম্পর্ক পরিলক্ষিত হয় তাকে বলা হয় ------------- ।

১০। যদি চলক দ্বয়ের গতি নিম্ন গামী হয় তখন সেই সম্পর্কে ------------ বলে।
১১। বিক্ষেপ চিত্রের বিন্দুগুলির বিস্তৃতি খুব কম হলে চলক দ্বয়ের সম্পর্ক --------।

শব্দ/বাক্য মিলানো

১২। সম্পর্কের মাত্রা খুব বেশী হলে	ক) কোন সম্পর্ক না থাকলে তাকে গুন্য সম্পর্কে বলে
১৩। দুইটি চলকের মধ্যে	খ) বিন্দুগুলির অবস্থান খুবই কাছাকাছি হয়।

পাঠ-৮.২ ঃ সংশ্লেষ পরিমাপ পদ্ধতিঃ (Measures of Correlation)

ভূমিকা

দু'টি চলকের মধ্যে সংশ্লেষ আছে এ জ্ঞানটুকু আমাদের উদ্দেশ্যের জন্য যথেষ্ট নয়। চলক দুইটির মধ্যে সংশ্লেষের পরিমান জানা দরকার অর্থাৎ চলক দু'টির মধ্যে সম্পর্কের মাত্রা পরিমাপ দরকার। এ পাঠে সংশ্লেষ এর পরিমাপ পদ্ধতি সম্পর্কে আলোচনা করা হল।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন-

- সংশ্লেষের মাত্রা কিভাবে পরিমাপ করা যায়;
- সংশ্লেষাঙ্কের সংজ্ঞা;
- সংশ্লেষাঙ্কের ধর্ম ও ব্যবহার;
- সংশ্লেষাঙ্কের বিভিন্ন সমস্যার সমাধান।

সংশ্লেষ পরিমাপ পদ্ধতি

সংশ্লেষের মাত্রা বলতে দু'টি চলকের মধ্যকার সম্পর্কের পরিমানকে বুঝায়। অর্থাৎ ধানের উৎপাদন বৃদ্ধিতে সার ও বৃষ্টির সম্পর্ক খুব গভীর। আবার অতিবৃষ্টি ফসলের ক্ষতির কারণ।

পরস্পর সম্পর্ক যুক্ত দু'টি চলকের পরিবর্তনের প্রকৃতি এবং উহাদের মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্কের মাত্রাকে সংশ্লেষাঙ্ক বা Co-efficient of correlation বলে।

সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয়:

সংশ্লেষাঙ্ক দ্বারা দু'টি চলকের রৈখিক সম্পর্কের শক্তির মাত্রা পরিমাপ করা হয়। Karl pearson সর্বপ্রথম সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয়ের সুত্র প্রদান করেন। Karl pearson এর সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয়ের সুত্রটি নিম্নরূপ-

যদি (x_i, y_i); i = ১, ২, ... n পরস্পর সম্পর্ক যুক্ত দু'টি চলক x ও y এর n জোড়া মান হয়, যাদের গড় $\bar{x}$ ও $\bar{y}$ তখন উহাদের সংশ্লেষাঙ্ক হবে-

r_{xy} = **Error!**; i = ১, ২........n

যেখানে r_{xy} = x ও y এর সংশ্লেষাঙ্ক সুচিত হয়

যদি, $Sp(xy) = \sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$; $(x_i - \bar{x})$ ও $(y_i - \bar{y})$ এর গুনফলের যোগফল

$SS(x) = \sum (x_i - \bar{x})^২$; $(x_i - \bar{x})$ এর বর্গের যোগফল

$SS(y) = \sum (y_i - \bar{y})^২$; $(yi - \bar{y})$ এর বর্গের যোগফল

তখন, r_{xy} কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়

r_{xy} = **Error!**

আবার r_{xy} কে ব্যবহারিক কাজে ব্যবহৃত সুত্রটি নিম্নভাবে প্রকাশ করা যায়

r_{xy} = **Error!**; i = ১,২ ....n

সংশ্লেষাঙ্ক r_{xy} সুত্রে

$\frac{1}{n}\Sigma(xi-\bar{x})(yi-\bar{y})$ কে Cov(xy) দ্বারা,

$\frac{1}{n}\Sigma(xi-\bar{x})^{২}$ কে Var(x) দ্বারা এবং

$\frac{1}{n}\Sigma(yi-\bar{y})^{২}$ কে Var (y) দ্বারা সূচিত করলে-

r_{xy} = **Error!**

সেখানে Cov(xy) = x ও y ভেদাঙ্ক সহগ

Var(x) = x এর ভেদাঙ্ক

Var(Y) = Y এর ভেদাঙ্ক

আবার, r_{xy} = **Error!**

Karl Pearson এর সুত্র নিম্নলিখিত অনুমানের উপর ভিত্তি করে নির্ণয় করা হয় :

১। চলক দ্বয়ের মধ্যে রৈখিক সম্পর্ক বিদ্যমান

২। চলক দ্বয়ের মধ্যে সম্পর্কের কারণ ও প্রভাব বিদ্যমান

৩। স্বাধীন চলকের একটি মানের জন্য নির্ভরশীল চলকের একাধিক মান বিদ্যমান হতে পারে।

সংশ্লেষাঙ্কের ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য : সংশ্লেষাঙ্কের প্রধাণ ধর্মগুলি নিম্নরূপ

১। সংশ্লেষাঙ্ক একটি একক মুক্ত সংখ্যা

২। সংশ্লেষাংক মুলবিন্দু ও মাপনী হতে স্বাধীন

৩। সংশ্লেষাঙ্ক প্রতি সম অর্থাব্ব $r_{xy} = r_{yx}$

৪। সংশ্লেষাঙ্কের মান সর্বদা -১ থেকে +১ এর মধ্য অবস্থিত

৫। চলক দু'টি স্বাধীন হলে $r_{xy} = o$

সংশেষাঙ্কের ধর্মাবলীর প্রমাণঃ

১। সংশ্লেষাঙ্ক চলক দ্বয়ের মুল বিন্দু ও মাপনীর উপর নির্ভরশীল নয়

প্রমাণ : মনে করি x_i; y_i; i = ১,২..................n, x ও y এর n জোড়া মান। x_i এর মূলবিন্দু a ও মাপনীর h পরিবর্তনের নতুন মান u_i এবং y_i মূলবিন্দু b ও মাপনী k পরিবর্তনে নতুন মান vi পাওয়া গেল

অর্থাব্ব $ui = \frac{xi - a}{h}$; $v_i = \frac{yi - b}{k}$

$\Rightarrow x_i = a + hu_i$; $\Rightarrow y_i = b + kv_i$

$= > \bar{x} = a + h\bar{u}$; $= > \bar{y} = b + k\bar{v}$

এখন, $\Sigma(x_i - \bar{x}) = \Sigma\ [a+hu_i-a-h\bar{u}] = h\Sigma(u_i-\bar{u})$

$\Sigma(y_i - \bar{y}) = \Sigma\ [b+kv_i-b-k\bar{v}] = k\Sigma(v_i - \bar{v})$

এবং $\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \Sigma\ [h(u_i - \bar{u}) \infty k(x_i - \bar{v})] = hk\Sigma(u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})$

আমরা জানি- সংশ্লেষাঙ্ক

r_{xy} = **Error!**

= **Error!**

= **Error!**

$= r_{uv}$

অর্থাব্ব $r_{xy} = r_{uv}$; অর্থাব্ব সংশ্লেষাঙ্ক মূল ও মাপনীর উপর নির্ভর করে না (প্রমানিত)

২। সংশ্লেষাঙ্কের মান -১ ও + ১ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ।

প্রমাণ : মনে করি x_i ও yi ; i = ১,২......n, x ও y এর n জোড়া মান।

আমরা জানি, কোন সংখ্যার বর্গ সর্বদা যোগবোধক অর্থাব্ব

Error!$\geq$ ০

এখানে σ_x = x এর পরিমিত ব্যবধান

σ_y = y এর পরিমিত ব্যবধান

এখন **Error!**+ **Error!**± **Error!**≥ ০

or, **Error!+ Error!**± **Error!**≥ ০ [∴ উভয় পক্ষে যোগ চিহ্ন নিয়ে-]

$$\frac{n\sigma_x^2}{\sigma_x^2} + \frac{n\sigma_y^2}{\sigma_y^2} \pm nr_{xy}\frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x\sigma_y} \geq 0$$ ∴ r_{xy} = **Error!**

or, $n + n \pm ২nr_{xy} \geq o$

$২n \pm ২nr_{xy} \geq o$

fi $১ + r_{xy} \geq o$; $১ - r_{xy} \geq o$

fi $r_{xy} \geq -১$; $r_{xy} \leq +১$

অর্থাব্ব r_{xy} এর মান -১ ও +১ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ। (প্রমানিত)

দু'টি পরস্পর স্বাধীন চলকের সংশ্লেষাঙ্ক শূন্য

প্রমান : মনে করি x_i ও y_i ; i = ১ ২ ....n, x ও y এর n জোড়া মান ও তাহারা পরস্পর স্বাধীন। আমরা জানি দু'টি স্বাধীন চলকের ভেদাঙ্ক সহগ এর মান গুন্য

অর্থাব্ব $\frac{1}{n}\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = o$

আমরা আরও জানি - সংশ্লেষাঙ্ক

r_{xy} = **Error!**

= **Error!**; স্বাধীন চলকের ক্ষেত্রে

= o

∴ r_{xy} = o অর্থাৎ আমরা বলতে পারি দু'টি স্বাধীন চলকের সংশ্লেষাঙ্ক শুন্য। (প্রমানিত)

সংশ্লেষাঙ্ক, r_{xy} মানের ব্যাখ্যা :

১) r = +১ হলে, চলক দ্বয়ের মধ্যে ধনাত্মক সম্পর্ক বিদ্যামান

২) r = -১ হলে, চলকের মধ্যে ঋনাত্মক সম্পর্ক বিদ্যমান

৩) r = ০ হলে, চলকের মধ্যে কোন সম্পর্ক নেই।

সম্ভাব্য বিচ্যুতিঃ সংশ্লেষাঙ্কের সম্পর্কে ব্যাখ্যা দানের সম্ভাব্য বিচ্যুতি একটি গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা রাখে। কোন তথ্য বিশ্ব হতে বিভিন্ন আকারের নমুনা সংগ্রহ করে সংশ্লেষাঙ্কের মান r নির্ণয় করলে r এর বিভিন্ন মান পাওয়া যাবে এবং এদের বিন্যাসটির একটি ভেদাঙ্ক মান পাওয়া যাবে যার পরিমিত ব্যবধান মানকে SE (r) দ্বারা সূচিত করলে,

SE_r = **Error!**। সম্ভাব্য বিচ্যুতি P.E(r) = $.৬৭৪৫\sqrt{\frac{1 - r2}{n - 2}}$; এ ক্ষেত্রে .৬৭৪৫ হল পরিমিত বিন্যাসের শতকরা ৫০% তথ্য মান p ± .৬৭৪৫x এর ভিতর বিদ্যমান থাকে। সম্ভাব্য বিচ্যুতি PE(r) এর উপর নির্ভর করে r এর মানের ব্যাখ্যা :

১। r এর মান যখন P.E.(r) এর থেকে ছোট হয়. তখন সংশ্লেষাঙ্ক মোটেই যথার্থ নয়

২। যদি r□> ৬ P.E(r) তখন সংশ্লেষাঙ্ক নিশ্চিতভাবে যথার্থ

৩। যদি r এর মান P.E(r) এর চেয়ে বড় তখন সংশ্লেষাঙ্ক যথার্থভাবে বিদ্যমান।

উদাহরণ-১: ১০টি দম্পত্তির বয়সের তালিকা নিম্নরূপে তাদের বয়সের সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করুন ও ফলাফল বিশ্লেষণ করুন।

স্বামীদের বয়স x;	২৩ ২৭ ২৮ ২.৮ ২৯ ৩০ ৩১ ৩৩ ৩৫ ৩৬
স্ত্রীদের বয়স y;	১৮ ২২ ২৩ ২৫ ২৪ ২৫ ২৬ ২৮ ২৯ ৩০

সমাধানঃ সংশ্লেষাঙ্ক r এর মান নির্ণয়ের জন্য নিম্নের সারনীটি প্রস্তুত করতে হবে-

x	y	$u=x-\bar{x}$	$v=y-\bar{y}$	uv	$u^২$	$v^২$

২৩	১৮	-৭	-৭	৪৯	৪৯	৪৯
২৭	২২	-৩	-৩	৯	৯	৯
২৮	২৩	-২	-২	৪	৪	৪
২৮	২৫	-২	০	০	৪	০
২৯	২৪	-১	-১	১	১	১
৩০	২৫	০	০	০	০	০
৩১	২৬	১	১	১	১	১
৩৩	২৮	৩	৩	৯	৯	৯
৩৫	২৯	৫	৪	২০	২৫	১৬
৩৬	৩০	৬	৫	৩০	৩৬	২৫
মোট		০	০	১২৩	১৩৮	১১৪

এখানে $\bar{x} = \frac{Sxi}{10} = \frac{300}{10} =$ ৩০

$\bar{y} = \frac{Syi}{10} = \frac{250}{10} =$ ২৫

$\therefore$ সংশ্লেষাঙ্ক, $r_{uv} = \frac{Suv}{\sqrt{Su2Sv2}}$

or, r_{uv} = .৯৯৯ যেহেতু সংশ্লেষাঙ্ক +১ এর খুব কাছাকাছি অর্থাব্ব স্বামী-স্ত্রী বয়সের মধ্যে ধনাত্মক সংশ্লেষ বিদ্যমান।

নিজে করুন: নিম্ন লিখিত তথ্য হতে সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করুন ও উহাদের ফলাফল বিশ্লেষণ করুন

উব্বপাদন (মন) **x**	২৫ ২৭ ৩৬ ৪২ ৪৫
মূল্য (টাকা) y	৩০ ৩৫ ৩৪ ৪৯ ৩৮

[উত্তর : r_{xy} = ◊৮৪]

উদাহরণ-২: মনে করি (x_i, y_i); i = ১,২....... ৫ ; x ও y এর ৫ জোড়া মান। দেওয়া আছে-

Σx = ২৯ ; $\Sigma x^২$ = ২৩১

Σy = ৩১ ; $\Sigma y^২$ = ৩০৭ এবং

Σxy = ২৩১

x ও y চলকের সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করুন?

সমাধান : আমরা জানি দু'টি চলকের ক্ষেত্রে সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয়ের সুত্র :

r_{xy} = **Error!**

= **Error!**

= **Error!**

$$= \frac{84.2}{\sqrt{62.8 \square 14.8}} = \frac{84.2}{84.91} = \Diamond 99$$

$\therefore r_{xy} =$.৯৯

নিজে করুন : যদি u = ২x + ৫, v = ৭-৩ y এবং x ও y এর সংশ্লেষাঙ্ক r_{xy} = ◊৭৫ হলে u ও v এর সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করুন।

[উত্তর : r_{uv} = - ◊৭৫]

সংশ্লেষাঙ্কের সীমাবদ্ধতা: সংশ্লেষাঙ্ককের সীমাবদ্ধতাগুলি নিম্নে দেওয়া হল:

১। সংশ্লেষাঙ্ক শুধুমাত্র রৈখিক সম্পর্কের মাত্রা ও গতি নির্ণয় করতে পারে কিন্তু বক্র সম্পর্কের মাত্রা ও গতি নির্ণয় করতে পারে না।

২। সংশ্লেষাঙ্ক বড় মান দ্বারা প্রভাবিত নয়।

৩। সংশ্লেষাঙ্ক গণনার জন্য তথ্যগুলি যদি সমগুন সম্পন্ন না হয় তবে চলক দ্বয়ের সম্পর্কের প্রকৃত চিত্র নাও দিতে পারে।

সারসংক্ষেপ ঃ

সংশ্লেষাঙ্কের মাত্রা সংশ্লেষের পরিমান কে বুঝায়। দুটি স্বাধীন চলকের সংশ্লেষাঙ্ক r=o, সম্ভাব্য বিচ্যুতি, সংশ্লেষাঙ্কের পরিমান সম্পর্কে ব্যাখ্যা প্রদান করে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.২

বহু নির্বাচন প্রশ্ন :

১। দুই বা ততোধিক চলকের রৈখিক সম্পর্কে বলা হয়

ক) সম্ভাবনা খ) ভেদাঙ্ক

গ) সহ সম্পর্ক ঘ) পরিমিত ব্যবধান

২। সহ সম্পর্কের মাত্রার পরিমাপকে বলা হয়

ক) বিস্তার পরিমাপ খ) সংশ্লেষাঙ্ক

গ) বিভেদাঙ্ক ঘ) কার্টসিম

৩। চলক দুটি স্বাধীন হলে সংশ্লেষাঙ্কের মান হবে

ক) $r \geq +$১ খ) $r = o$

গ) $r \leq -$১ ঘ) $r \neq o$

শূন্যস্থান পূরন :

৪। সংশ্লেষাঙ্ক একটি ----- মুক্ত সংখ্যা

৫। সংশ্লেষাঙ্ক -------- ও -------- হতে স্বাধীন

৬। সংশ্লেষাঙ্ক প্রতিসম অর্থাব্ব ----------।

৭। চলক স্বাধীন হলে r = ----------।

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন :

৮। r = + ১ হলে, চলক দ্বয়ের মধ্য ধনাত্মক সম্পর্ক বিদ্যমান

৯। r = − ১ হলে, চলক দ্বয়ের মধ্য কোন সম্পর্ক নেই।

১০। r এর মান যখন p. E (r) থেকে ছোট হয়, তখন সংশ্লেষাঙ্ক মোটেই যথার্থ নয়।

১১। সংশ্লেষাঙ্কের মাত্রা বলতে দুটি চলকের মধ্যকার সম্পর্কের পরিমানকে বুঝায়।

শব্দ মিলানো ঃ

১২. পরস্পর সম্পর্ক যুক্ত দু'টি চলকের পরিবর্তনের প্রকৃতি এবং উহাদের মধ্যকার	ক. -১ থেকে +১ এর মধ্যে বিদ্যমান
১৩. k.pearson এর সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয়ের সুত্রটি	খ. শূণ্য।
১৪. সংশ্লেষাঙ্কের মান সর্বদা	গ. তখন সংশ্লেষাঙ্ক নিশ্চিত ভাবে যথার্থ।
১৫. দৃ'টি স্বাধীন চলকের সংশ্লেষাঙ্ক	ঘ. সম্পর্কের মাত্রাকে সংশ্লেষাঙ্ক বলে
১৬. যদি r > ৬ P.E (r) হয়	ঙ. r = **Error!**

পাঠ-৮.৩ নির্ভরণ (Regression)

ভূমিকা

সংশ্লেষাঙ্কের ক্ষেত্রে আমরা শুধু মাত্র দু'টি চলকের সম্পর্কের মাত্রা নির্ণয় করতে পারি। কিন্তু ইহার মাধ্যমে চলকের মধ্যে একটির গতিশীলতা আরেকটির উপর কিভাবে প্রভাব বিস্তার করে তা জানা যায় না। একটি চলকের গতিশীলতার উপর অপর চলকের যে পরিবর্তন হয় তাহা পরিমাপ করার উদ্দেশ্য নির্ভরণ এর সাহায্য নেওয়া হয়।

উদ্দেশ্য

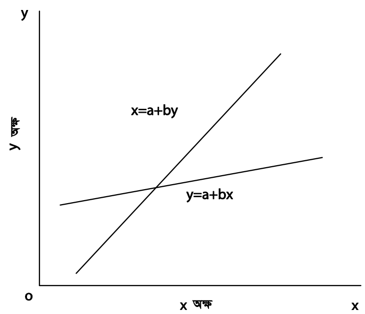
এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন

- নির্ভরণের সংজ্ঞা কি
- নির্ভরন রেখা বলতে কি বুঝায়
- নির্ভরাঙ্কের সংজ্ঞা
- কি ভাবে নির্ভরাঙ্ক নির্ণয় করা যায়
- সংশ্লেষাঙ্কে সাথে নির্ভরাঙ্কের পার্থক্য ।

নির্ভরণ

নির্ভরণ: নির্ভরণ প্রক্রিয়াটি সর্ব প্রথম প্রখ্যাত জীব তত্ত্ববিদ স্যার ফেন্সিস গেলটন (১৮২২-১৯১১) প্রদান করেন। নির্ভরণ বিশ্লেষণে একটি চলকের পরিপ্রেক্ষিতে অপর চলকের যে গড় পরিবর্তন পরিলক্ষিত হয় তাহা বিশ্লেষণ করা হয়। নির্ভরণের শব্দ গত অর্থ হচ্ছে ''গড় মানের দিকে আসা" অর্থাৎ নির্ভরণ, সম্পর্ক যুক্ত দু'টি চলকের একটির নির্দিষ্ট মানের জন্য অন্য চলকের গড় মান নির্ণয় করে। এ ভাবে সম্পর্কের সমীকরণের মাধ্যমে একটি চলকের যে কোন মানের জন্য অন্য নির্ভরশীল চলকের মানও নির্ণয় করে।

নির্ভরণ রেখা: বিক্ষেপ চিত্রের ক্ষেত্রে দেখা যায়যে, দু'টি চলকের মধ্যে সম্পর্ক থাকলে চলক দু'টির বিভিন্ন মান লেখ কাগজে স্থাপন করলে বিন্দুগুলি একটি পথ নির্দেশ করে। নির্ভরণ রেখা একটি চলকের গড় মানগুলির বিপরীতে অন্য একটি চলকের যথার্থ গড় মান প্রকাশ করে। যদি x ও y দুইটি চলক হয়। তাহলে দু'টি নির্ভরণ রেখা পাওয়া যাবে-



১। একটি রেখা x চলকের মানগুলির বিপরীতে y এর চলকের যথার্থ গড় মানগুলি প্রদর্শন করে।

২। অন্যটি রেখা y চলকের মানগুলির বিপরীতে x এর চলকের যথার্থ গড় মানগুলি প্রদর্শন করে।

১মটিকে x চলকের উপর y চলকের নির্ভরণ রেখা এর **২**য় টিকে y চলকের উপর x এর নির্ভরণ রেখা বলে। প্রাপ্ত নির্ভরণ রেখাকে সমীকরণের সাহায্যে দেখানো হল:

১। $y = a_১ + b_১x$; y এর উপর x এর নির্ভরণ রেখা

২। $x = a_২ + b_২y$; x এর উপর y এর নির্ভরণ রেখা

উপরোক্ত সমীকরণ দু'টিতে $a_১$, $b_১$, এবং $a_২$, $b_২$ কে বলা হয় ধ্রুবক। এখানে $b_১$; $b_২$ কে নির্ভরাঙ্ক বলা হয়।

নির্ভরণ রেখার নির্ণয় পদ্ধতি:

নির্ভরণ রেখার গড় মান হতে অন্যান্য সমীকরণে ব্যবহার করে নির্ভরণ রেখা প্রস্তুত করা যায়। এরূপ একটি নির্ভর রেখা প্রকাশ করা হল :

$y_i = a + bx_i + e_i$; $i =$ ১,২ .... n

এখানে ei; i = ১, ২ .... n হচ্ছে বিচ্যুতি সমূহ যারা স্বাধীনভাবে গড় মান = ০ ও ভেদাঙ্ক = σ^2 সহ পরিমিত বিন্যাসের বিন্যাস্ত। E(x/y) কে x এর সাপেক্ষে y-এর প্রত্যাশিত মান। এ ক্ষেত্রে E(y/x) = a+bx

ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতি: উনবিংশ শতাব্দীতে ফরাসি গনিতবিদ এনড্রিন লেগনড্রি সর্বপ্রথম ন্যূনতম বর্গ প্রক্রিয়া ব্যবহার করেন। ন্যূনতম বর্গ প্রক্রিয়ার মূল বিষয় হল,'' অঙ্কিত নির্ভরণ রেখা হতে প্রতিটি বিন্দুর বিচ্যুতির বর্গের যোগফল হবে ন্যূনতম"

নির্ভরণ রেখা নির্ণয়ের জন্য a ও b ধ্রুবক প্রাক্কলন করতে হয় ন্যূনতম বিচ্যুতি বর্গের মাধ্যমে।

নির্ভরণ রেখা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে নিম্ন লিখিত অনুমানগুলো ধরা হয়

- x এর মান সমূহ নির্দিষ্ট হতে হবে
- y এর উপর x এর নির্ভরন রৈখিক হবে
- x এর প্রত্যেকটি মানের জন্য y এর শর্তাধীন বিন্যাস পরিমিত হবে
- বিচ্যুতি সমূহ স্বাধীনভাবে পরিমিত বিন্যস্ত থাকবে এবং এদের গড় মান "০" এবং ভেদাঙ্ক σ^2 হবে

আমরা পূর্বেই নির্ভরন সমীকরণ পেয়েছি-

$y_i = a + bx_i + e_i$; $i =$ ১,২ ....n

$\Rightarrow e_i = y_i - a - bx_i$

বা, $\sum e_i^২ = \sum(y_i - a - bx_i)^২$ [উভয় পক্ষে বর্গ ও যোগ চিহ্ন নিয়ে পাই]

ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতির নিয়মানুযায়ী a ও b এর মান পাওয়া যাবে আংশিক অন্তকরণ (Differenciation) করে অর্থাব্ব

$$\frac{\partial \sum ei^২}{\partial a} = ০$$

এবং $\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial a} = o$

এখানে $\frac{Sei2}{a}$ = ০ => $-$২Σ(yi-a-bxi) = o

or, $\Sigma(y_i\text{-a-b}x_i) = o$

or, $\Sigma y_i - \Sigma a - b\Sigma x_i = o$

or, $\Sigma y_i = \Sigma a + b\Sigma x_i$ ....(i)

এবং $\frac{\square Sei2}{\square b}$ = o => ২ $(\Sigma(y_i\text{-a-b}x_i)(x_i) = o$

or, $\Sigma x_i y_i - a\Sigma x_i - b\Sigma x_i^{২} = o$

or, $\Sigma x_i y_i = a\Sigma xi + b\Sigma x_i^{২}$............(ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) কে পরিমিত সমীকরণ বলে। সমীকরণ (i) কে n দ্বারা ভাগ করে পাই-

$\bar{y} = a + b\,\bar{x}$.............(iii)

এবং (ii) কে n দ্বারা ভাগ করলে পাই-

$\frac{Sx_iy_i}{n} = a\bar{x} + \frac{bSxi2}{n}$ ....(iv)

সমীকরণ (iii) কে $\bar{x}$দ্বারা গুন করে (iv) হতে বিয়োগ করলে পাই-

$\frac{Sxiyi}{n} - \overline{xy} = \frac{bSxi2}{n} - b\,\bar{x}^{২}$

or, $b[\frac{Sxi2}{n} - \bar{x}^2] = \frac{Sxiyi}{n} - \overline{xy}$

or b = **Error!**

= **Error!**

∴ b = **Error!**

∴ b = **Error!**

যেখানে $SS(x) = \frac{Sxiyi}{n} - \overline{xy}$

$Sp(x) = \frac{Sx_i^2}{n} - \bar{x}^2$

সমীকরণ (ii) এ $\hat{b}$ এর মান বসিয়ে $\hat{a}$ এর মান নির্ণয় করা যায়: $\hat{b}$ অর্থ প্রাকক্লিত b

অতএব, সর্বশেষ প্রাককলিত রৈখিক নির্ভরণ রেখাটিকে দেখা যায়: এবং $\hat{a}$ অর্থ প্রাকক্লিত a

$y_i = \hat{a} + \hat{b}\,x_i$

অর্থাৎ y_i = (প্রাককলিত a) +(প্রাককলিত b)x_i

উদাহরণ ঃ

১০টি পরিবারে মোট খরচের উপর সাপ্তাহিক খাদ্যদ্রব্যের খরচের একটি নির্ভরণ রেখা নির্ণয় করুন।

সাপ্তাহিক মোট খরচ x	৪০০	৩১৫	২৭৫	৩৫০	২৯০	২২৫	২১৫	২২৫	২৭৫	২৯০
সাপ্তাহিক খাদ্য দ্রব্যের খরচ y	১৭০	১৬০	১৫০	১৪০	১২৫	১১০	১২০	১৪০	১৮০	১৯০

সমাধান : y এর উপর x এর নির্ভরণ রেখার সমীকরণ

$y = a + b\, x_i$; i = ১, ২ ....১০

যেহেতু মানগুলি খুব বড় তাই আমরা সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি ব্যবহার করবো। ন্যূনতম বর্গ প্রক্রিয়ায় a ও b নির্ণয় সারনী

y	x	dy= y-১৪০	dx=x-২৭৫	dxdy	dx২
১৪০	৪০০	০	১২৫	০	১৫৬২৫
১৬০	৩১৫	২০	৪০	৮০০	১৬০০
১৫০	২৭৫	১০	০	০	০
১৪০	৩৫০	০	৭৫	০	৫৬২৫
১২৫	২৯০	-১৫	১৫	-২২৫	২২৫
১১০	২২৫	-৩০	-৫০	১৫০০	২৫০০
১২০	২১৫	-২০	-৬০	১২০০	৩৬০০
১৪০	২২৫	০	-৫০	০	২৫০০
১৮০	২৭৫	৪০	০	০	০
১৯০	২৯০	৫০	১৫	৭৫০	২২৫
মোট		৫৫	১১০	৪০২৫	৩১৯০০

এখানে Ax = ২৭৫ এবং Ay = ১৪০

∴ bxy = **Error!**

$= \textbf{Error!} = \frac{4025 - 605}{31900 - 1210} = \frac{3420}{30690}$ = .১১

∴ bxy =.১১

এবং $x = A_x + dx$ /১০

= ২৭৫+ $\frac{110}{10}$ = ২৮৬

এবং y = Ay + dy /১০ = ১৪০ + $\frac{55}{10}$ = ১৪৫.৫

এখন a $= \overline{y} - b\overline{x}$

= ১৪৫.-(০.১১) × ২৮৬

= ১৪৫.৫ - ৩১.৪৬ = ১১৪.০৪

∴ নির্ণেয় নির্ভরণ রেখাটি-

y_i = ১১৪.০৪ + ০.১১ x_i

নিজে করুন : নিম্নে লিখিত তথ্য হতে x এর উপর y এর নির্ভরণ রেখা অঙ্কন করুন

x	২০	২৫	২৮	৩২	৩৬
y	৪৮	৬০	৬৮	৭০	৭৫

সারসংক্ষেপ :

নির্ভরন হচ্ছে একটি স্বাধীন চলকের উপর আর একটি নির্ভরশীল চলকের নির্ভরণ। বিচ্যুতি সমূহের বর্গের সমষ্টি নূন্যতম করে যে পদ্ধতি মাধ্যমে নির্ভরাঙ্কের মান বের করা হয় তাকে নূন্যতম বর্গ পদ্ধতি বলে নির্ভরাঙ্ককে সাধারন bxy দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$bxy = \frac{\frac{Sxiyi}{n} - \bar{x}\ \bar{y}}{\frac{Sxi2}{n} - \bar{x}2}$$

$$= \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৮.৩

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন :

সঠিক উত্তরের পার্শ্বে টিক (|) চিহ্ন দিন।

১। নির্ভরাঙ্ক নির্ণয় করতে কোন পদ্ধতি সাহায্যে নেওয়া হয়

ক) বিয়োজন পদ্ধতি খ) নূন্যতম বর্গ পদ্ধতি

গ) যোজন পদ্ধতি ঘ) যোজন বিয়োজন পদ্ধতি

২। নিভরাঙ্কের মান পরিবর্তন নির্ভর করে কোনটি উপর

ক) মুলের উপর খ) মাপনীর উপর

গ) মুল ও মাপনীর উপর গ) অন্তকরনের উপর

৩। নির্ভরাঙ্কের মানের ক্ষেত্রে কোনটি সত্য নয়

ক) মান শূন্য খ) মান যোগ বোধক

গ) বিয়োগ বোধক ঘ) সর্বদা কাল্পনিক

সত্য/মিথ্যা

৪। নির্ভরাঙ্কের মান-α থেকে $+\alpha$ পর্যন্ত হতে পারে

৫। নির্ভরনের ক্ষেত্রের শুধু মাত্র নির্ভরশীল চলক দৈব চলক

৬। নির্ভরাঙ্কের মান মাপনীর উপর র্নিভরশীল

৭। নির্ভরাঙ্কের মান মুলের উপর স্বাধীন

৮। নির্ভরনের ক্ষেত্রে স্বাধীন চল দৈব চলক।

শূন্যস্থান পূরণ

৯। নির্ভরন হল স্বাধীন চলকে বিভিন্ন মানের জন্য নির্ভরশীল চলকের ------ মান বের করা।

১০। নির্ভরাঙ্কের মান -------, ------- অথবা -------- হতে পারে।

১১। $r_{xy} = \sqrt{bxy}$

বাক্য মিলানো ঃ

১২।	অঙ্কিত নির্ভরন রেখা হতে প্রতিটি বিন্দুর বিচ্যুতি বর্ণের	ক)	গড় মানের দিকে আসা
১৩।	নির্ভরনের শব্দ গত অর্থ হল	খ)	একটি চলকের যথার্থ গড় মান প্রকাশ করা।
১৪।	নির্ভরন রেখা একটি চলকের গড় মানের বিপরীতে অন্য	গ)	যোগফল হবে নূন্যতম।

পাঠ : ৮.৪ সংশ্লেষ ও নির্ভরনের পার্থক্য (Difference between Correlation and Regression)

ভূমিকা ঃ

সংশ্লেষ ও নির্ভরনের সংজ্ঞা সম্পর্কে পূর্ব পাঠে জেনেছি। পরিসংখ্যানিক বিশ্লেষণে উহাদের মধ্যেকার পার্থক্য জানা প্রয়োজন।

উদ্দেশ্য

এ পাঠে আপনি বলতে পারবেন-

- নির্ভরণ ও সংশ্লেষ এর পার্থক্য কি
- নির্ভরণের ধর্মাবলী ও তার প্রমান
- নির্ভরনের সহিত সংশ্লেষের সম্পর্ক

সংশ্লেষন ও নির্ভরণের মধ্যে পার্থক্য:

সংশ্লেষ ও নির্ভরণের মধ্যে কোন কোন ক্ষেত্রে মিল আছে আবার কোন কোন ক্ষেত্রে অনেক পার্থক্য বিদ্যমান নিম্নে সংশ্লেষ ও নির্ভরণের মধ্যে পার্থক্যের তুলনামূলক আলোচনা নিম্নরূপে দেওয়া হল :

সংশ্লেষ	নির্ভরণ
১। সংশ্লেষ এর মাধ্যমে দু'বা ততোধিক চলকের কোন সম্পর্ক আছে কিনা তাকে বুঝায়	১। দুই বা ততোধিক স্বাধীন চলকের জন্য নির্ভরশীল চলকের গড় মান নির্ণয় করা বুঝায়
২। সংশ্লেষ এ চলক সমূহের সম্পর্কের কারণ ও প্রভাব বিশ্লেষণ করা যায় না	২। নির্ভরণের প্রধান কাজ হল সম্পর্কের কারণ ও প্রভাব বিশ্লেষণ করা।
৩। সংশ্লেষ এ স্বাধীন চলক ও নির্ভরশীল চলকের ধারণা নেই	৩। নির্ভরণে যে চলক প্রভাবিত হয় তাকে নির্ভরশীল চলক বলে। বাকি চলকগুলো স্বাধীন চলক।
৪। r_{xy} ও r_{yx} নির্ণয় করলে একই মান পাওয়া যায়।	৪। নির্ভরণের ক্ষেত্রে নির্ভরাংক $bxy \neq byx$
৫। সংশ্লেষাঙ্কের মান সর্বদা -১ ও +১ এর মধ্য অবস্থিত।	৫। নির্ভরাঙ্কের মান - α থেকে + α এর মধ্যে সীমাবদ্ধ
৬। সংশ্লেষ এর ক্ষেত্রে প্রত্যেকটি চলকই দৈব বিবেচনা করা হয়।	৬। নির্ভরনের ক্ষেত্রে শুধু মাত্র নির্ভরশীল চলক দৈব চলক হিসাবে বিবেচিত

নির্ভরাঙ্কের বৈশিষ্ট্য ধর্ম

নির্ভরাঙ্কের বৈশিষ্ট্য ধর্ম নিম্নে দেওয়া হল

১.। নির্ভরাংক মূলবন্দু পরিবর্তনের উপর স্বাধীন ও মাপনীর উপর নির্ভরশীল।

২। $r_{xy} = \sqrt{bxy \square byx}$

৩। দু'টি নির্ভরাঙ্কের গড় সংশ্লেষাঙ্কের চেয়ে বড়

ধর্মসমূহের প্রমান :

১। ''নির্ভরাঙ্ক মুলবিন্দু পরিবর্তনের উপর স্বাধীন কিন্তু মাপনীর উপর নির্ভরশীল''

প্রমান : মনে করি x_i; $i =$ ১,২..............n চলকের a মুলবিন্দু ও h মাপনী

অতত্রব, নতুন চলক,

$$ui = \frac{xi - a}{h}\text{; } i = ১,২..........n$$

$$\text{fi } xi = a + hui \Rightarrow \bar{x} = a + h\bar{u}$$

$$\therefore x_i - \bar{x} = (a + hui - a - h\bar{u}) = h(ui - \bar{u})$$

অনুরূপভাবে $vi = \frac{yi - b}{k}$; yi ; i = ১,২....... n চলকের মুলবিন্দু b এবং k মাপনি

fi $yi = b + kvi$ fi $b + k\bar{v} = \bar{y}$

$\therefore yi - \bar{y} = (b + kvi - b - k\bar{v}) = k(vi - \bar{v})$

আমরা জানি, নির্ভরাঙ্ক

bxy = **Error!**

= **Error!**

= **Error!**

= **Error!**

$= \frac{k}{h}buv$

$\therefore bxy = \frac{k}{h}buv$ অর্থাব্ব নির্ভরাঙ্ক মুলবিন্দুর উপর স্বধীন কিন্তু মাপনীর উপর নির্ভরশীল।

২। সংশ্লেষাঙ্ক নির্ভরাঙ্ক দ্বয়ের জ্যামিতিক গড়ের সমান।

প্রমান : মনে করি $(x_i; y_i)$; i = ১,২ ....,x ও y এর জোড়া মান অতএব

সংশ্লেষাঙ্ক, γxy = **Error!**এবং

নির্ভরাঙ্ক, bxy = **Error!**

byx = **Error!**

এখন, bxy .byx = **Error!**

= °xy **Error!**× °xy **Error!**

$\Rightarrow \gamma xy^{২} = bxy \times byx$

$\Rightarrow$fi$\gamma xy = \sqrt{bxy \times byx}$

অতত্রব, সংশ্লেষাঙ্ক, নির্ভরাঙ্ক দ্বয়ের জ্যামিতিক গড়ের সমান।

৩। দু'টি নির্ভরাঙ্কের গানিতিক গড় সংশ্লেষাঙ্কের চেয়ে বড় এবং উল্টন গড় সংশ্লেষাঙ্কে থেকে ছোট

প্রমান: মনে করি-

$x_i ; y_i$ = ১২............n, x ও y এর n জোড়া মান

অতত্রব, সংশ্লেষাঙ্ক r_{xy} = **Error!**

নির্ভরাঙ্ক, bxy = **Error!**এবং

byx = **Error!**

আমরা জানি

গানিতিক গড় ≥ জ্যামিতিক গড়

এখন $(bxy+byx)^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{bxy\square byx}$

or, **Error!**$\geq r_{xy}$

অতত্রব আমরা বলতে পারি নির্ভরাঙ্কের জ্যামিতিক গড় সংশ্লেষাঙ্কের চেয়ে বড় আবার

আমরা জানি, উল্টন গড় ≤ জ্যামিতিক গড়

২ $\left[\frac{1}{bxy} + \frac{1}{byx}\right] \leq \sqrt{bxy \times byx}$

or, ২ $\left[\frac{1}{bxy} + \frac{1}{byx}\right] \leq r_{xy}$

অর্থাব্ব নির্ভরাঙ্ক দ্বয়ের উল্টন গড় সংশ্লেষাঙ্কের চেয়ে ছোট।

৪। নির্ভরাঙ্কের সাহায্যে সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয়:

আমরা জানি নির্ভরাঙ্ক দ্বয়ের জ্যামিতিক গড় হল সংশ্লেষাঙ্ক অর্থাব্ব

সংশ্লেষাঙ্ক

$$r_{xy} = \sqrt{bxy \times byx}$$

উদাহরণ : নিম্নলিখিত তথ্য হতে নির্ভরাঙ্ক ও সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করুন

x: একটি লোকের উচ্চতা	৫৫	৫৫	৫৯	৬২	৬৩	৬৬	৭০	৭১
y: লোক ওজন পাউন্ড	৮২	৯০	৯৫	১০৬	১১০	১৩২	১৪০	১৩৫

সমাধান: নির্ভরাঙ্ক ও সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য নিম্নের সারনী প্রস্তুত করতে হবে

x	y	x-৬২=dx	y-১১০=dy	dxdy	dx²	dy²
৫২	৮২	-১০	-২৮	২৮০	১০০	৭৪৮
৫৫	৯০	-৭	-২০	১৪০	৪৯	৪০০
৫৯	৯৫	-৩	-১৫	৪৫	৯	২২৫
৬২	১০৬	০	-৪	০	০	১৬
৬৩	১১০	১	০	০	১	০
৬৬	১৩২	৪	২২	৮৮	১৬	৪৪৮
৭০	১৪০	৮	৩০	২৪০	৬৪	৯০০
৭১	১৩৫	৯	২৫	২২৫	৮১	৬২৫
মোট		২	১০	১০১৮	৩২০	৩৪৩৪

x এর উপর y এর নির্ভরাঙ্ক

$b_{yx} = \frac{sp(xy)}{ss(x)} =$ **Error!**

= **Error!**= $\frac{1015.5}{319.5}$ = ৩.১৮

আবার y এর উপর x এর নির্ভরাঙ্ক,

b_{xy} = **Error!**= **Error!**

= **Error!**

সংশ্লেষাঙ্ক

$r_{xy} = \sqrt{bxy \times byx}$

$= \sqrt{3.18 \times .3} = \sqrt{.954} =$.৯৮

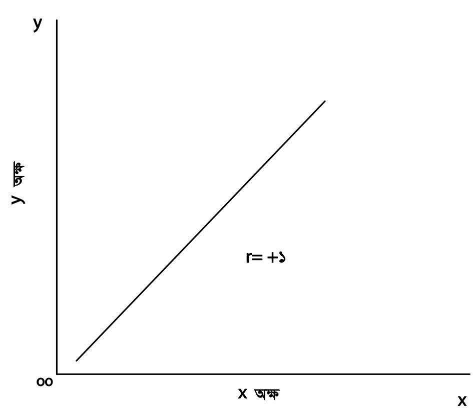
নিজে করুন : নিম্নের তথ্য হতে সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করুন

bxy = .৩৫৯ byx = .০৩ এখন r_{xy} = কত ?

সংশ্লেষাঙ্কের মাধ্যমে নির্ভরাঙ্কের দিক নির্ণয় :

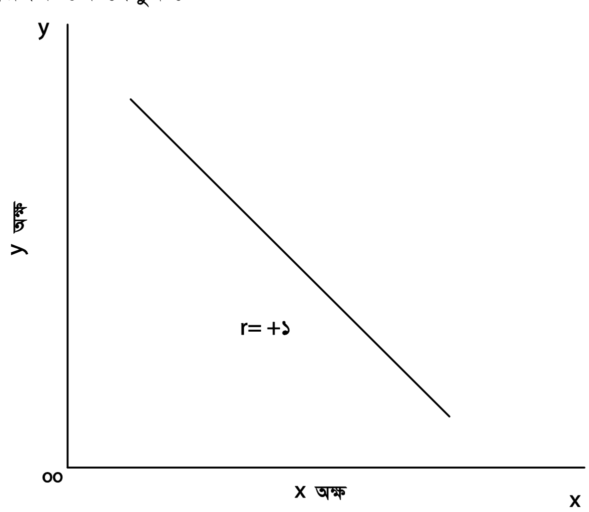
সংশ্লেষাঙ্কের বিভিন্ন মান নিভরণ রেখার দিক নির্দেশ করে ঃ

১। যদি r_{xy} = ১ হয় তবে নির্ভরণ রেখা দুইটি একই রেখায় মিলে যায়
চিত্রে দেখুন



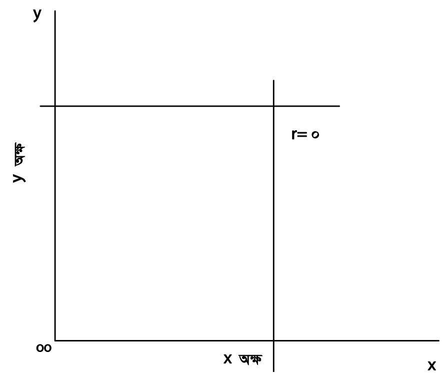
চিত্র : নির্ভরন রেখা

২। যদি $r = -$১ হয় তখন নির্ভরণ রেখা দু'টি একত্রে মিলে যায় সেক্ষেত্রে নির্ভরণ রেখার গতি বাম দিক থেকে উপর থেকে নিচের দিকে যায়। চিএে দেখুন ঃ



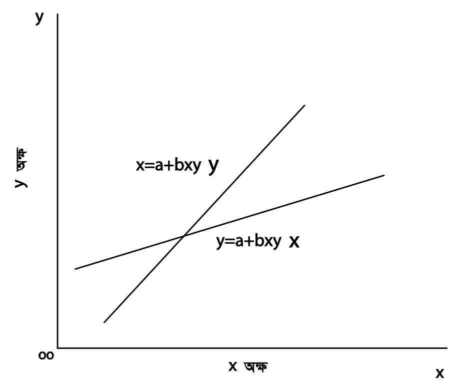
চিত্র : নির্ভরন রেখা

৩। যদি $r = 0$ হয় তখন নির্ভরন রেখা দুইটি সমকোন ছেদ করে। চিত্রে দেখুন



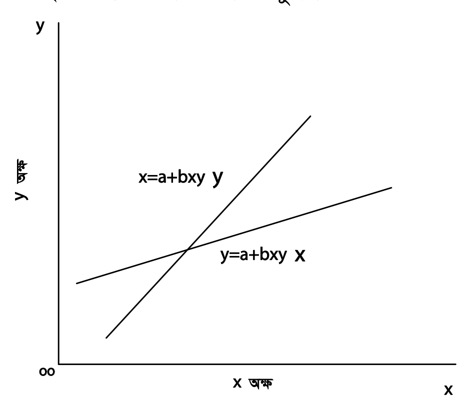
চিত্র : নির্ভরন রেখা

৪। r এর মান ০ ও ১ এর মধ্যে হলে নির্ভরণ রেখা দুইটি কখনও একত্রিত হবে না এবং অক্ষের সহিত বিভিন্ন কোণ সৃষ্টি করবে। r এর মান যত বাড়িবে রেখা দুইটি ও তত নিকটবর্তী হবে। চিত্রে দেখুন



চিত্র : নির্ভরন রেখা

৫। r এর মান যদি ০ ও -১ এর মধ্যে হয় তখন ও নির্ভরণ রেখা দুইটি আলাদা অবস্থান করবে। r এর মান যত কমিবে ততই রেখা দুইটি নিকট বর্তী হতে থাকবে। চিত্রে দেখুন।



চিত্র : নির্ভরন রেখা

সারসংক্ষেপ

নির্ভরণ বলতে একটি চলকের পরিপ্রেক্ষিতে অপর নির্ভরণ চলকের যে গড় পরিবর্তন পরিলক্ষিত হয় তাকে বুঝায়। নির্ভরণ রেখা নির্ণয় করতে নূণ্যতম বিচ্যুতি পদ্ধতির সাহায্যে নেওয়া হয়। নির্ভরণ সমীকরনে দুটি পরামান আছে। তন্মধ্য bxy ও byx কে নির্ভরাঙ্ক বলে। নির্ভরণ দুটির জ্যামিতিক গড় সংশ্লেষাঙ্ক এর সমান।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন: ৮.৪

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন :

সঠিক উত্তরের পার্শ্বে টিক (√) চিহ্ন দিন।

১। নির্ভরনের যে চলক প্রভাবিত হয় তাকে বলা হয়

ক) স্বাধীন চলক খ) অধীন চলক

গ) দৈব চলক ঘ) নির্ভরশীল চলক

২। স্বাধীন ও নির্ভরশীল চলকের ধারনা দেয় না কোন ক্ষেত্রে

ক) নির্ভরনের খ) সংশ্লেষনে

গ) গড় নির্ণয়ে ঘ) ভেদাঙ্ক বিশ্লেষণে

৩। সংশ্লেষ এর ক্ষেত্রে সংশ্লেষাঙ্কের মান

ক) $r_{xy} \neq r_{yx}$ খ) $r_{xy} = r_{yx}$

গ) $r_{xy} < r_{yx}$ ঘ) $r_{xy} > r_{yx}$

সত্য/মিথ্যা

৪। নির্ভরাঙ্কের মান - α থেকে + α এর মধ্যে সীমাবদ্ধ

৫। ”r” এর মান − ২ থেকে + ২ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ

৬। নির্ভরাঙ্কের মান সর্বদাই ধনাত্মক।

৭। সংশ্লেষাঙ্ক নিভরাঙ্ক দ্বয়ের জ্যামিতিক গড়ের সমান

৮। নির্ভরাঙ্কের উল্টন গড় সংশ্লেষাঙ্কের চেয়ে ছোট

শূন্যস্থান পূরণ :

৯। নির্ভরাঙ্কের ------ সংশ্লেষাঙ্কের চেয়ে ---------।

১০। bxy = --------------।

১১। সংশ্লেষনের ক্ষেত্রে প্রত্যেকটি চলকই ----- ------- করা হয়।

বাক্য মিলানো :

১২। যদি r_{xy} = ১ হয় তবে নির্ভরন রেখা দু'টি	ক)	কখনও একত্রিত হবে না
১৩। r এর মান ০ ও ১ এর মধ্যে হলে নির্ভরন রেখা	খ)	নির্ভরাঙ্ক

১৪।	**Error!**	গ)	একই রেখার মিলে যায়
১৫।	উল্টন গড় ≤	ঘ)	জ্যামিতিক গড়

চূড়ান্ত মূল্যায়ন-৮

রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। সংশ্লেষের সংজ্ঞা লিখুন? পিয়ারসনের সংশ্লেষাঙ্ক r এর ফরমুলা লিখুন।

২। সংশ্লেষাঙ্কে সংজ্ঞা লিখুন? সংশ্লেষাঙ্কের ধর্মগুলি লিখুন।

৩। সংশ্লেষক কত প্রকার লিখুন? বিক্ষেপ চিত্রের সাহায্যে কি ভাবে সংশ্লেষের ব্যাখ্যা করা যায় লিখুন।

৪। সংশ্লেষের সূত্রটি লিখুন? প্রমাণ করুন ° এর মান সর্বদা - ১ ও + ১ এর মধ্যে অবস্থান করে।

৫। শূন্য সংশ্লেষের সংজ্ঞা লিখুন? প্রমান করুন দুইটি স্বাধীন চলকের ক্ষেত্রে সংশ্লেষাঙ্ক $r = ০$?

৬। নিম্নলিখিত মানগুলির অর্থ ব্যাখ্যা করুন

১. $r = ০$ ২ $r \geq -১$ ৩. $r \leq +১$

৭। সম্ভাব্য বিচ্যুতির সংজ্ঞা লিখুন? সম্ভাব্য বিচ্যুতির সাহায্যে সংশ্লেষাঙ্কের ব্যাখ্যা কিভাবে দেওয়া যায় লিখুন।

৮। নির্ভরণ রেখার সংজ্ঞা লিখুন? নুন্যতম পদ্ধতির ধারণা লিখুন?

৯। নির্ভরন রেখার পরিমান কিভাবে নির্নয় করা যায় লিখুন? প্রাককলিত রেখা নির্ণয় করুন

১০। নির্ভরাঙ্কের সংজ্ঞা লিখুন? নির্ভরাঙ্কের সাথে সংশ্লেষনের পার্থক্য নির্ণয় করুন।

১১। প্রমাণ করুন সংশ্লেষাঙ্ক নির্ভরাঙ্ক দ্বয়ের জ্যামিতিক গড়ের সমান।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.১:

১। গ	২। ক	৩। ক	৪। সত্য	৫। মিথ্যা
৬। সত্য	৭। সত্য	৮। ঋনাত্মক, ঋনাত্মক		৯। সংশ্লেষঙ্ক
১০। ধনাত্মক	১১। আছে	১২। খ	১৩। ক	

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.২:

১। গ	২। খ	৩। খ	৪। একক	
৫। মুল বিন্দু, মাপনী		৬। $r_{xy} = r_{yx}$	৭। r=0	৮। সত্য
৯। মিথ্যা	১০। সত্য	১১। সত্য	১২। 0	১৩। ঙ
১৪। ক	১৫। খ	১৬। গ		

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.৩:

১। খ	২। খ	৩। ঘ	৪। সত্য	৫। সত্য
৬। সত্য	৭। সত্য	৮। মিথ্যা	৯। গড়	
১০। ঋনাত্মক, ধনাত্মক অথবা শূন্য		১১। byx	১২। গ	১৩। ক
১৪। খ				

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.৪:

১। ঘ	২। খ	৩। খ	৪। সত্য	৫। মিথ্যা

৬। মিথ্যা ৭। সত্য ৮। সত্য ৯। গড়, বড়/উল্টন গড়, ছোট
১০। $\sqrt{bxy \times byx}$ ১১। দৈব বিবেচনা১২। গ
১৩। ক ১৪। খ ১৫। ঘ।