ইউনিট ৩

পর্যায়ক্রমিক অন্তরক, ম্যাকলরিনের ধারা ও অন্তরকের প্রয়োগ

ভূমিকা

পূর্ববর্তী ইউনিটে আপনারা অন্তরক সহগের ধারণা লাভ করেছেন। পূর্ববর্তী ইউনিটে কোন ফাংশনকে চলকের সাপেক্ষে একবার অন্তরীকরণ করা হয়েছিল। বর্তমান ইউনিটে আপনারা জানতে পারবেন কোন ফাংশনকে কিভাবে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করা যায়, কিভাবে অন্তরকের প্রয়োগ করা হয় এবং কিভাবে ম্যাকলরিনের ধারা নির্ণয় এবং তা প্রয়োগ করা হয়।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি–

- পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ নির্ণয় ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন;
- ম্যাকলরিনের ধারা নির্ণয় করতে পারবেন;
- ম্যালরিনের ধারার সাহায্যে $(1+x)^x$, e^x, $lx(1+x)$, $\sin x, \cos x$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় করতে পারবেন;
- $\dfrac{dy}{dx}$ এর জ্যামিতিক প্রয়েগে দক্ষতা অর্জন করবেন;
- যে কোন রেখার স্পর্শক নির্ণয় করতে পারবেন;
- অন্তরকের সাহায্যে পরিবর্তনের হার বর্ণনা ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন;
- অন্তরকের সাহায্যে ফাংশনের চরমমান নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

পাঠ-১
পর্যায়ক্রমিক অন্তরক নির্ণয় ও প্রয়োগ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- পর্যায়ক্রমিক অন্তরক নির্ণয় ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

পূর্ববর্তী ইউনিটে আপনারা শিখেছেন একটি ফাংশনের কিভাবে অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে হয়। পূর্ববর্তী ইউনিটে আপনারা ফাংশনের যে অন্তরক সহগ নির্ণয় করেছেন তা প্রথম অন্তরক সহগ। অর্থাৎ যদি $y = f(x)$ হয় তবে x কে পরিবর্তনশীল ধরে y এর প্রথম অন্তরক সহগ $\frac{dy}{dx}$ । একে y_1 বা y' বা $f'(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। প্রথম অন্তরক সহগকে একটি নতুন ফাংশন ধরে আবার যদি x কে পরিবর্তনশীল ধরে অন্তরক সহগ নির্ণয় করা হয় তবে তাকে দ্বিতীয় অন্তরক সহগ বলা হয়। দ্বিতীয় অন্তরক সহগকে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা হয়।

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ বা, $\frac{d^2y}{dx^2}$

একে y_2 বা y'' বা $f''(x)$ দ্বারাও প্রকাশ করা হয়।

একইভাবে x কে পরিবর্তনশীল মনে করে $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় করলে তাকে তৃতীয় অন্তরক সহগ বলা হয় এবং একে $\frac{d^3y}{dx^3}$ বা y_3 বা, y''' বা $f'''(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অনুরূপভাবে পর্যায়ক্রমে x কে পরিবর্তনশীল ধরে চতুর্থ, পঞ্চম ইত্যাদি অন্তরক সহগ নির্ণয় করা যায়।

ফাংশনের n তম অন্তরক সহগকে $\frac{d^ny}{dx^n}$, y_n বা $f_n(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। কোন কোন সময় y_n কে $D^n(y)$ দ্বারাও সূচিত করা হয়।

ক্রমের যে পর্যায়ে অন্তরক সহগের মান শূন্য হয় তার পরবর্তী প্রত্যেকটি পর্যায়ে অন্তরক সহগের মান শূন্য হবে। নিম্নে উদাহরণগুলির মাধ্যমে পর্যায়ক্রমিক অন্তরক সহগের ধারণা আপনাদের নিকট আরও স্পষ্টতর হবে।

উদাহরণ 1 ঃ নিম্নলিখিত ফাংশনের তৃতীয় ও চতুর্থ অন্তরক সহগ নির্ণয় করুন।

(i) $y = x^2(x^2-5)$ (ii) $y = 5x^4-2x^3+7x^2-x+9$ (iii) $\log(1+x)$

সমাধান ঃ

i) $y = x^2(x^2-5)$

$$\therefore y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{x^2(x^2-5)\}$$
$$= x^2.\frac{d}{dx}(x^2-5) + (x^2-5)\frac{d}{dx}(x^2)$$
$$= x^2.2x + (x^2-5).2x$$
$$= 2x^3+2x^3-10x$$

$= 4x^3 - 10x$

$y_2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(4x^3 - 10x)$

$= 4.3x^2 - 10$

$= 12x^2 - 10$

$y_3 = \frac{d}{dx}(y_2) = \frac{d}{dx}(12x^2 - 10)$

$= 12.2x$

$= 24x$

$y_4 = \frac{d}{dx}(y_3) = \frac{d}{dx}(24x)$

$= 24$

ii) $y = 5x^4 - 2x^3 + 7x^2 - x + 9$

$\therefore y_1 = \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(5x^4 - 2x^3 + 7x^2 - x + 9)$

$= 5.4x^3 - 2.3x^2 + 7.2x - 1$

$= 20x^3 - 6x^2 + 14x - 1$

$y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) = \frac{d}{dx}(20x^3 - 6x^2 + 14x - 1)$

$= 20.3x^2 - 6.2x + 14$

$= 60x^2 - 12x + 14$

$y_3 = \frac{d}{dx}(y_2) = \frac{d}{dx}(60x^2 - 12x + 14)$

$= 60.2x - 12$

$= 120x - 12$

$y_4 = \frac{d}{dx}(y_3) = \frac{d}{dx}(120x + 12)$

$= 120$

iii) $y = \log(1+x)$

$\therefore y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{\log(1+x)\}$

$= \frac{d}{dx}(\log u)$ [$1+x=u$ ধরে]

$= \frac{d}{du}(\log u) . \frac{du}{dx}$

$= \frac{1}{u} \frac{d}{dx}(1+x)$

$= \frac{1}{1+x} .1$

$= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

$$y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) = \frac{d}{dx}(1+x)^{-1}$$
$$= \frac{d}{dx}(u^{-1})$$
$$= \frac{d}{du}(u^{-1}) \cdot \frac{d}{dx}(1+x)$$
$$= -u^{-2}\frac{d}{dx}(1+x)$$
$$= -(1+x)^{-2}.1$$
$$= -(1+x)^{-2}$$
$$y_3 = \frac{d}{dx}(y_2) = \frac{d}{dx}\{-(1+x)^{-2}\}$$
$$= -\frac{d}{dx}(u^{-2})$$
$$= -\frac{d}{du}(u^{-2})\frac{du}{dx}$$
$$= -(-2)u^{-3} \cdot \frac{d}{dx}(1+x)$$
$$= 2(1+x)^{-3}$$
$$= 2(1+x)^{-3}$$
$$y_4 = \frac{d}{dx}(y_3) = \frac{d}{dx}\{2(1+x)^{-3}\}$$
$$= 2\frac{d}{dx}(u^{-3})$$
$$= 2\frac{d}{du}(u^{-3}) \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= 2(-3)u^{-4}. \frac{d}{dx}(1+x)$$
$$= -6(1+x)^{-4}.1$$
$$= -6(1+x)^{-4}$$

উদাহরণ 2 ঃ যদি $y = e^x\cos x$ হয় তবে দেখান যে, $y_4 + 4y = 0$

সমাধান ঃ $y = e^x\cos x$

$$\therefore y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x\cos x)$$
$$= e^x\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\frac{d}{dx}(e^x)$$
$$= e^x(-\sin x) + \cos x\, e^x$$
$$= -e^x\sin x + e^x\cos x$$
$$y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) = \frac{d}{dx}[-e^x\sin x + e^x\cos x]$$
$$= \frac{d}{dx}(-e^x\sin x) + \frac{d}{dx}(e^x\cos x)$$

$$= -e^x\frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\frac{d}{dx}(e^x)$$
$$= -e^x\cos x - e^x\sin x + e^x\cos x - e^x\sin x$$
$$= -2e^x\sin x$$

$$y_3 = \frac{d}{dx}(y_2) = \frac{d}{dx}(-2e^x\sin x)$$
$$= -2\frac{d}{dx}(e^x\sin x)$$
$$= -2\left[e^x\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\frac{d}{dx}(e^x)\right]$$
$$= -2\,[e^x\cos x + e^x\sin x]$$
$$= -2e^x(\cos x + \sin x)$$

$$y_4 = \frac{d}{dx}(y_3) = \frac{d}{dx}[-2e^x(\cos x + \sin x)]$$
$$= -2\left[e^x\frac{d}{dx}(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)\frac{d}{dx}(e^x)\right]$$
$$= -2\,[e^x(\cos x - \sin x) + (\sin x + \cos x)e^x]$$
$$= -2[e^x\cos x - e^x\sin x + e^x\sin x + e^x\cos x]$$
$$= -2[2e^x\cos x]$$
$$= -4e^x\cos x = -4y$$
$$\therefore y_4 + 4y = 0$$

উদাহরণ 3 ঃ $\frac{1}{x}$ এর n–তম অন্তরক সহগ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$$\therefore \quad y_1 = \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2}$$
$$y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) = \frac{d}{dx}(-x^{-2}) = -(-2)\,x^{-3} = 2x^{-3}$$
$$y_3 = \frac{d}{dx}(y_2) = \frac{d}{dx}(2x^{-3}) = -2.3x^{-4}$$
$$y_4 = \frac{d}{dx}(y_3) = \frac{d}{dx}(-2.3x^{-4}) = -2.3.(-4)x^{-5} = 1.2.3.4x^{-5} = \frac{(-1)^4.4!}{x^{4+1}}$$

অনুরূপভাবে, $y_n = \frac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}}$

উদাহরণ 4 ঃ $y = \tan(m\tan^{-1}x)$ হলে প্রমাণ করুন $(1+x^2)y_1 = m(1+y^2)$

সমাধান ঃ $y = \tan(m\tan^{-1}x)$

$$\therefore y_1 = \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}\{\tan(m\tan^{-1}x)\}$$

$$= \sec^2(m\tan^{-1}x).\frac{d}{dx}(m\tan^{-1}x)$$

$$= \sec^2(m\tan^{-1}x).\frac{m}{1+x^2}$$

$\therefore (1+x^2)y_1 = m\sec^2(m\tan^{-1}x)$

বা, $(1+x^2)y_1 = m\{1+\tan^2(m\tan^{-1}x)\}$

বা, $(1+x^2)y_1 = m[1+\{\tan(m\tan^{-1}x)\}^2]$

বা, $(1+x^2)y_1 = m(1+y^2)$

উদাহরণ 5 ঃ যদি $y = \cos x$ হয় তবে দেখান যে, $y_2 = \cos(\pi+x)$, $y_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$, $y_4 = \cos(2\pi+x)$ এবং ইহা হতে y_n এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $y = \cos x$

$$y_1 = \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) = \frac{d}{dx}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right\}$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos\left\{\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right\} = \cos(\pi+x)$$

$$y_3 = \frac{d}{dx}(y_2) = \frac{d}{dx}\{\cos(\pi+x)\}$$

$$= -\sin(\pi+x) = \cos\left\{\frac{\pi}{2}+(\pi+x)\right\} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

$$y_4 = \frac{d}{dx}(y_3) = \frac{d}{dx}\left\{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right\}$$

$$= -\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = \cos\left\{\frac{\pi}{2}+\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right\} = \cos(2\pi+x)$$

অনুরূপভাবে $y_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$

উদাহরণ 6 ঃ যদি $y = e^{a\sin^{-1}x}$ হয় তবে দেখান যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 = a^2y$

সমাধান ঃ $y = e^{a\sin^{-1}x}$

$$\therefore y_1 = \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(e^{a\sin^{-1}x})$$

$$= e^{a\sin^{-1}x}\frac{d}{dx}(a\sin^{-1}x)$$

$$= e^{a\sin^{-1}x}\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) = \frac{d}{dx}\left\{e^{a\sin^{-1}x}.\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\right\}$$

$$= ae^{a\sin^{-1}x}.\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right\} + \frac{a}{\sqrt{1-x^2}}.\frac{d}{dx}\left(e^{a\sin^{-1}x}\right)$$

$$= ae^{a\sin^{-1}x}\left\{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}.(-2x)\right\} + \frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\ e^{a\sin^{-1}x}\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= ae^{a\sin^{-1}x}.\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^2e^{a\sin^{-1}x}}{1-x^2}$$

বা, $(1-x^2)y_2 = e^{a\sin^{-1}x}\dfrac{ax}{\sqrt{1-x^2}} + a^2e^{a\sin^{-1}x}$

বা, $(1-x^2)y_2 = xy_1 + a^2y$

বা, $(1-x^2)y_2 - xy_1 = a^2y$

কতগুলো প্রয়োজনীয় ফাংশনের *n* তম অন্তরক সহগ

1. $y = x^n$, x যোগবোধক পূর্ণ সংখ্যা–

   $y_1 = \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$

   $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) = \frac{d}{dx}\left(nx^{n-1}\right) = n(n-1)x^{n-2}$

   $y_3 = \frac{d}{dx}(y_2) = n(n-1)\frac{d}{dx}\left(x^{n-2}\right) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

   অনুরূপভাবে, $y_r = n(n-1)(n-2)...\{n-(r-1)\}x^{n-r}$, $(r<n)$

   n যোগবোধক পূর্ণ সংখ্যা হলে শেষে n এর সূচক $n-n$ হবে,

   $\therefore y_n = n(n-1)(n-2)(n-3)\ ....\ 3.\ 2.1 = n!$

2. $y = (ax+b)^m$, m যে কোন সংখ্যা হতে পারে,

   $y_1 = \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(ax+b)^m = m(ax+b)^{m-1}.\ a = ma\ (ax+b)^{m-1}$

   $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) = \frac{d}{dx}\{ma(ax+b)^{m-1}\} = ma(m-1)(ax+b)^{m-2}.a$

   $= m(m-1)\ a^2(ax+b)^{m-2}$

   $y_3 = m(m-1)\ (m-2)\ a^3(ax+b)^{m-3}$

অনুরূপভাবে $y_n = m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1)\, a^n (ax+b)^{m-n}$

(i) যদি m, n অপেক্ষা বৃহত্তর কোন যোগবোধক পূর্ণসংখ্যা হয় তবে

$$m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

$$\therefore y_n = \frac{d^n}{dx^n}(ax+b)^m = \frac{m!}{(m-n)!}\, a^n (ax+b)^{m-n}$$

(ii) যদি m,n অপেক্ষা ক্ষুদ্রতম কোন যোগবোধক পূর্ণসংখ্যা হয় তবে,

$$\frac{d^n}{dx^n}(ax+b)^m = 0$$

(iii) $m=n$ হলে $\frac{d^n}{dx^n}(ax+b)^n = a^n.n!$

3. $y = a^x$

$$\therefore y_1 = \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a$$

$$y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) = \frac{d}{dx}\left(a^x \log_e a\right) = \log_e a \frac{d}{dx}(a^x)$$

$$= \log_e a\, a^x . \log_e a = a^x \left(\log_e a\right)^2$$

$$y_3 = a^x \left(\log_e a\right)^3, \; y_4 = a^x \left(\log_e a\right)^4$$

অনুরূপভাবে $y_n = a^x (\log_e a)^n$

4. $y = e^{ax}$

$\therefore y_1 = \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(e^{ax}) = e^{ax}.\frac{d}{dx}(ax) = e^{ax}.\, a = a\, e^{ax}$

$y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) = \frac{d}{dx}(a\, e^{ax}) = a\frac{d}{dx}(e^{ax}) = a.a\, e^{ax} = a^2 e^{ax}$

$y_3 = \frac{d}{dx}(y_2) = \frac{d}{dx}(a^2 e^{ax}) = a^2\frac{d}{dx}(e^{ax}) = a^2 a e^{ax} = a^3 e^{ax}$

অনুরূপভাবে $y_n = a^n e^{ax}$

5. $y = \sin(ax+b)$

$y_1 = \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}\{\sin(ax+b)\} = \cos(ax+b).\frac{d}{dx}(ax+b)$

$= a\cos(ax+b)$

$= a\sin\left(\frac{\pi}{2}+ax+b\right)$

$y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) = \frac{d}{dx}\left\{a\sin\left(\frac{\pi}{2}+ax+b\right)\right\}$

$= a\cos\left(\frac{\pi}{2}+ax+b\right).\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}+ax+b\right)$

$= a.a.\cos\left(\frac{\pi}{2}+ax+b\right)$

$= a^2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+ax+b\right)$

$= a^2\sin\left(\frac{2\pi}{2}+ax+b\right)$

$y_3 = a^3\cos\left(\frac{2\pi}{2}+ax+b\right) = a^3\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2}+ax+b\right)$

$= a^3\sin\left(\frac{3\pi}{2}+ax+b\right)$

অনুরূপভাবে $y_n = a^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}+ax+b\right)$

বা, $\frac{d^n}{dx^n}\{\sin(ax+b)\} = a^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}+ax+b\right)$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\frac{d^n}{dx^n}(\sin x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$

6. $y = \cos(ax+b)$

$$\therefore y_1 = \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}\{\cos(ax+b)\} = -\sin(ax+b)\frac{d}{dx}(ax+b)$$
$$= -a\sin(ax+b)$$
$$= a\cos\left(\frac{\pi}{2}+ax+b\right)$$

$$y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) = \frac{d}{dx}\left\{a\cos\left(\frac{\pi}{2}+ax+b\right)\right\} = -a\sin\left(\frac{\pi}{2}+ax+b\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}+ax+b\right)$$

$$= -a^2\sin\left(\frac{\pi}{2}+ax+b\right) \qquad = a^2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+ax+b\right)$$
$$= a^2\cos\left(\frac{2\pi}{2}+ax+b\right)$$

তদ্রুপ $y_3 = -a^3\sin\left(\frac{2\pi}{2}+ax+b\right) = a^3\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2}+ax+b\right)$
$$= a^3\cos\left(\frac{3\pi}{2}+ax+b\right)$$

অনুরূপভাবে, $y_n = a^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}+ax+b\right)$

বা, $\frac{d^n}{dx^n}\{\cos(ax+b)\} = a^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}+ax+b\right)$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যদি $a=1$ এবং $b=0$ হয় তবে $\frac{d^n}{dx^n}(\cos x) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$

7. $y = \log(ax+b)$

$$\therefore y_1 = \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}\{\log(ax+b)\} = \frac{1}{ax+b}\cdot\frac{d}{dx}(ax+b) = \frac{a}{ax+b}$$

$$y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) = \frac{d}{dx}\{a(ax+b)^{-1}\} = -a(ax+b)^{-2}.\frac{d}{dx}(ax+b)$$
$$= -a^2.1\,(ax+b)^{-2}$$

$$y_3 = \frac{d}{dx}(y_2) = -a^2.1\frac{d}{dx}(ax+b)^{-2} = a^3(-1)(-2)(ax+b)^{-3}$$
$$= (-1)^2 2!\, a^3(ax+b)^{-3}$$

$$y_4 = \frac{d}{dx}(y_3) = (-1)^2 2!\, a^3\frac{d}{dx}(ax+b)^{-3} = (-1)^2 2!\,(-3)\, a^4(ax+b)^{-4}$$
$$= (-1)^3 3!\, a^4\,(ax+b)^4$$

অনুরূপভাবে, $y_n = (-1)^{n-1}\,(n-1)!\, a^n(ax+b)^{-n}$

বা, $\frac{d^n}{dx^n}\{\log(ax+b)\} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\dfrac{d^n}{dx^n}\{\log(x+a)\} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}$

এবং $\dfrac{d^n}{dx^n}(\log x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

অনুশীলনী– ৩.১

1. $y = x^2\log x$ হলে, তৃতীয় অন্তরক সহগ নির্ণয় করুন।
2. $y = \sin x$ হলে $\dfrac{d^4y}{dx^4}$ নির্ণয় করুন।
3. $y = \log(\sin x)$ হলে প্রমাণ করুন $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$
4. $y = a\cos(\log x)+b\sin(\log x)$ হলে প্রমাণ করুন $x^2y_2+xy_1-y=0$
5. $\dfrac{x}{x^2-a^2}$ এর n তম অন্তরক সহগ নির্ণয় করুন।
6. 2^x এর n তম অন্তরক সহগ নির্ণয় করুন।
7. $y = (e^x+e^{-x})\sin x$ হলে প্রমাণ করুন $y^4+4y=0$
8. (i) $y = \left(\cos^{-1}x\right)^2$ হলে প্রমাণ করুন $(1-x^2)y_2-xy_1=2$

   (ii) $y = (\sin^{-1}x)^2$ হলে প্রমাণ করুন $(1-x^2)y_2-xy_1-2=0$
9. $y = \sin(m\sin^{-1}x)$ হলে দেখান যে, $(1-x^2)y_2-xy_1+m^2y=0$
10. $y = Ae^{mx}+Be^{-mx}$ হলে দেখান যে, $y_2-m^2y=0$
11. $y = e^{ax}\sin bx$ হলে দেখান যে, $y_2-2ay_1+(a^2+b^2)y=0$
12. $y = e^x\cos x$ হলে দেখান যে, $y_2-2y_1+2y=0$

পাঠ-২
ম্যাকলরিনের ধারা নির্ণয় ও তার প্রয়োগ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- ম্যাকলরিনের ধারা নির্ণয় করতে পারবেন;
- ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে ফাংশনের বিস্তৃতি নির্ণয় করতে পারবেন।

ম্যাকলরিনের ধারা

যদি $f(x)$, x এর এমন একটি ফাংশন হয় যার বিস্তৃত করা যায় এবং ঐ বিস্তৃতির প্রতিটি পদ যে কোন সংখ্যকবার অন্তরীকরণ করা যায়, তাহলে–

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+.....+\frac{x^n}{n!}f^n(0)+----\infty$$

$$=\sum_{r=0}\frac{x^r}{r!}f^r(0)$$

ইহা ম্যাকলরিনের ধারা বা বিস্তৃতি নামে পরিচিত।

প্রমাণ ঃ ধরুন $f(x)$ কে x এর ঘাত ধারা রূপে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়–

$f(x) = A_o+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+......(i)$

উপরোক্ত সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করলে পাওয়া যায়–

$f'(x) = A_1+2A_2x+3A_3x^2+4A_4x^3+.........$

$f''(x)= 2.1A_2+3.2A_3x+4.3A_4x^2+.......$

$f'''(x) = 3.2.1A_3+4.3.2A4x+.........$

$f^v(x) = 4.3.2.1\ A_4+5.4.3.2.A_5x+.....$

এখন x=0 বসিয়ে পাওয়া যায়–

$f(0) = Ao$

$f'(0) = A1$

$f''(0)=2.1\ A_2=2!A_2$

$f'''(0) = 3.2.1.A3=3!A3$

$f^{iv}(0) = 4.3.2.1A_4=4!A_4$

$f^n(0)=n!A_n$

এখন $A_0,A_1,A_2,A_3,A_4....An$**...** এর মান (1)নং এ বসিয়ে বসিয়ে আমরা পাই–

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^n(0)+....\square$$

বিঃদ্রঃ যে সকল ক্ষেত্রে ম্যাকলরিনের ধারা প্রযোজ্য নয়–

(i) যদি $f(0)$ অথবা $f'(0), f''(0)....$ এর যে কোন একটি বিদ্যমান না থাকে।

(ii) যদি $f(x)$ অথবা $f'(x), f''(x)....f^n(x)$ এর যে কোন একটি ফাংশন বিচ্ছিন্ন হয়।

উদাহরণ 1 ঃ ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে $(1-x)^n$ কে বিস্তৃত করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $f(x) = (1-x)^n$ $\quad \therefore f(0) = 1$

$f'(x) = -n(1-x)^{n-1}$ $\quad \therefore f'(0) = -n$

$f''(x) = (-1)^2\, n(n-1)(1-x)^{n-2}$ $\quad \therefore f''(0) = n(n-1)$

$f'''(x) = (-1)^3\, n(n-1)(n-2)(1-x)^{n-3}$ $\quad \therefore f'''(0) = n(n-1)(n-2)$

(i) n এর মান অখন্ড যোগবোধক সংখ্যা হলে–

$f^n(x) = (-1)^n\, n(n-1)(n-2)....\, 2.1\, (1-x)^{n-n} = (-1)^n n!$ একটি ধ্রুবক।

$\therefore f^n(0) = (-1)^n n!$

এবং $f^{n+1}(x), f^{n+2}(x), f^{n+3}(x), f^{n+4}(x)$....... ইত্যাদি অন্তরক সহগগুলো প্রত্যেকে শূন্য হবে।

সুতরাং ম্যাকলরিনের ধারা অনুসারে–

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}\, x^2 + \ldots\ldots + (-1)^n x^n$$

ii) যদি n এর মান অখন্ড যোগবোধক সংখ্যা না হয় তবে $f^n(x)$ এর মান ধ্রুবক হবে না এবং $f^{n+1}(x), f^{(n+2)}(x)$, ...এর মান শূন্য হবে না।

সুতরাং ম্যাকলরিনের ধারা অনুযায়ী নিম্নের অসীম সিরিজটি পাওয়া যাবে–

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}\, x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\, x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

উদাহরণ 2 ঃ ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে a^x কে বিস্তৃত করুন।

সমাধানঃ ধরুন $f(x) = a^x$ $\quad \therefore f(0) = a^0 = 1$

$f'(x) = \frac{d}{dx}\,(a^x) = a^x \log_e a$ $\quad \therefore f'(0) = a^0 \log_e a = \log_e a$

$f''(x)=$**Error!**

$f'''(x) = a^x \left(\log_e a\right)^3$ $\quad \therefore f'''(0) = a^0 \left(\log_e a\right)^3 = \left(\log_e a\right)^3$

অনুরূপভাবে $f^n(x) = a^x \left(\log_e a\right)^n$ $\quad \therefore f^n(0) = a^0 \left(\log_e a\right)^n = \left(\log_e a\right)^n$

ম্যাকলরিনের ধারা অনুযায়ী–

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \ldots$$

$$\therefore a^x = 1 + x\left(\log_e a\right) + \frac{x^2}{2!}\left(\log_e a\right)^2 + \frac{x^3}{3!}\left(\log_e a\right)^3 + \ldots + \frac{x^n}{n!}\left(\log_e a\right)^n + \ldots$$

উদাহরণ 3 ঃ ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে $\log_e (1-x)$ কে বিস্তৃত করুন।

সমাধানঃ ধরুন $f(x) = \log_e (1-x)$ $\quad \therefore f(0) = \log_e (1) = 0$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\log_e(1-x)\right\} = \frac{1}{1-x}\frac{d}{dx}(1-x)$$

$$= \frac{-1}{1-x} \qquad \therefore f'(0) = \frac{-1}{1} = -1$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\ \{-1(1-x)^{-1}\}$$

$$= -(1-x)^{-2} \qquad \therefore f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}\ \{-(1-x)^{-2}\} \qquad \therefore f'''(0) = -2$$

$$= -2(1-x)^{-3}$$

$$= \frac{-2}{(1-x)^3}$$

অনুরূপভাবে, $f^n(x) = \dfrac{-(n-1)!}{(1-x)^n}$ $\qquad \therefore f^n(0) = -(n-1)!$

এখন ম্যাকলরিনের ধারা অনুসারে–

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}\ f''(0) +\frac{x^3}{3!}\ f'''(0) +.....+ \frac{x^n}{n!}\ f^n(0) +.....\square$$

$$\therefore\ \log_e(1-x) = 0+x(-1)+ \frac{x^2}{2!}(-1) +\frac{x^3}{3!}(-2)\ +...+ \frac{x^n}{n!}\ \{-(n-1)!\}+...\square$$

$$= -x-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - .... - \frac{x^n(n-1)!}{n(n-1)!} - ....\ \square$$

$$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - .... - \frac{x^n}{n}\ ....\ \square$$

পাঠ-৩

ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে $f(x) = (1+x)^n$, e^x, $\ln(1+x)$, $\sin x, \cos x$ ইত্যাদির বিস্তৃতি নির্ণয়।

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে নির্দিষ্ট কতগুলো ফাংশনের বিস্তৃতি নির্ণয় করতে পারবেন।

1. ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে $f(x) = (1+x)^n$ বিস্তৃত করুন।

সমাধান: $f(x) = (1+x)^n \qquad \therefore f(0) = 1$

$f'(x) = \dfrac{d}{dx}\{(1+x)^n\} = n(1+x)^{n-1} \quad \therefore f'(0) = n$

$f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \qquad \therefore f''(0) = n(n-1)$

$f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3} \therefore f'''(0) = n(n-1)(n-2)$

---

i) nধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে–

$f^n(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)...1\ (1+x)^{n-n} = n!$ একটি ধ্রুবক

$\therefore f^n(0) = n!$

$\therefore f^{n+1}(n)$ এর উচ্চক্রমিক সকল অন্তরক সহগ শূন্য হবে

সুতরাং ম্যাকলরিনের ধারা অনুসারে,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + ...+ \frac{x^n}{n!}f^n(0)$$

অর্থাৎ $(1+x)^n = 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + ...+x^n$

ii) n ঋণাত্মক সংখ্যা বা ভগ্নাংশ হলে $f^n(x)$ ধ্রুবক হবে না এবং $f^{n+1}(x)$ এবং অন্যান্য উর্ধ্বক্রমিক অন্তরক সহগ শূন্য হবে না। সুতরাং ধারাটি অসীম হবে।

$$\therefore (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + ... \square$$

2. ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে e^x কে বিস্তৃত করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $f(x) = e^x \qquad \therefore f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = \dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \therefore f'(0) = e^0 = 1$

$f''(x) = \dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \therefore f''(0) = e^0 = 1$

$f'''(x) = e^x \qquad \therefore f'''(0) = e^0 = 1$

অনুরূপভাবে $f^n(x)=e^x$ $\therefore f^n(0) = e^0=1$

ম্যাকলরিনের ধারা অনুসারে– $f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+......+\frac{x^n}{2!}f^n(0)+.....$

অর্থাৎ $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.......+\frac{x^n}{n!}+........$

3. ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে $f(x) = \ln(1+x)$ কে বিস্তৃত করুন।

সমাধান ঃ $f(x) = \ln(1+x)$ $\therefore f(0)=\ln 1=0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$ $\therefore f'(0)=1$

$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ $\therefore f''(0) = -1$

$f'''(x) = \frac{1.2}{(1+x)^3}$ $\therefore f'''(0)= 1.2 = 2!$

$f^{iv}(x) = -\frac{1.2.3}{(1+x)^4}$ $\therefore f^{iv}(x) = (-1)^3.3!$

$= (-1)^3\frac{1.2.3}{(1+x)^4}$

অনুরূপভাবে, $f^n(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ $\therefore f^n(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

ম্যাকলরিনের ধারা অনুসারে– $f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+.......+\frac{x^n}{n!}f^n(0)+....+$

অর্থাৎ $\ln(1+x)=0+x.1+\frac{x^2}{2!}.(-1)+\frac{x^3}{3!}(2!)+\frac{x^4}{4!}(-1)^3(3!)+..........+\frac{x^n}{n!}(-1)^{n-1}(n-1)!+......$

$$= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+ .... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+ ....$$

4. ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে $f(x) = \sin x$ কে বিস্তৃত করুন।

$f(x) = \sin x$ $\therefore f(0)=\sin 0 = 0$

$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}(\sin x) =\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ $\therefore f'(0)=\sin\frac{\pi}{2}=1$

$f''(x) = -\sin x$ $\therefore f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x= \sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$ $\therefore f'''(0) = -1$

$f^{iv}(x) = \sin x$ $\therefore f^{iv}(0) = 0$

$f^v(x) =\cos x=\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)$ $\therefore f^v(0)=1$

অনুরূপভাবে $f^n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$ $\therefore\ f^n(0) = \sin\frac{n\pi}{2}$

ম্যাকলরিনের ধারা অনুযায়ী−

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}\ f''(0)+\frac{x^3}{3!}\ f'''(0)+\frac{x^4}{4!}\ f^{iv}(0)+\frac{x^5}{5!}\ f^{v}(0)+........+\frac{x^n}{n!}\ f^n(0)+\ ......$$

$$\therefore\ \sin x=0+x.1+\frac{x^2}{2!}\ .0+\frac{x^3}{3!}(-1)+\frac{x^4}{4!}\ .0+\frac{x^5}{5!}\ .1+...+\frac{x^n}{n!}\ \sin\frac{n\pi}{2}+...$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-......+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}+.......$$

5. ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে $f(x)=\cos x$ কে বিস্তৃত করুন।

$f(x) =\cos x$ $\therefore\ f(0) =\cos 0 = 1$

$f'(x) =\frac{d}{dx}(\cos x) =-\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ $\therefore\ f'(0)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=0$

$f''(x)=\frac{d}{dx}(-\sin x) =-\cos x$ $\therefore\ f''(0)=-\cos 0 =-1$

$f'''(x)=\frac{d}{dx}(-\cos x) =\sin x=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$ $\therefore\ f'''(0)=0$

$f^{iv}(x)=\frac{d}{dx}(\sin x) =\cos x$ $\therefore\ f^{iv}(0)=1$

$f^{v}(x)=\frac{d}{dx}(\cos x) =-\sin x=\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)$ $\therefore\ f^{v}(x)=\cos\frac{5\pi}{2}=0$

অনুরূপভাবে $f^n(x)=\cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$ $\therefore f^n(0)=\cos\frac{n\pi}{2}$

এখন ম্যাকলরিনের ধারা অনুযায়ী−

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}\ f''(0)+\frac{x^3}{3!}\ f'''(0)+\frac{x^4}{4!}\ f^{iv}(0)+\frac{x^5}{5!}\ f^{v}(0)+........+\frac{x^n}{n!}\ f^n(0)+\ ......$$

$$=1+x.0+\frac{x^2}{2!}(-1)+\frac{x^3}{3!}\ .0+\frac{x^4}{4!}\ .1+\frac{x^5}{5!}\ .0+....+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}+....$$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-.........+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}+....$$

উদাহরণ 1 ঃ ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে e^{mx} কে বিস্তৃত করুন।

সমাধান: ধরুন $f(x) = e^{mx}$ $\qquad \therefore f(0) = e^{o}=1$

$f'(x) = \dfrac{d}{dx}(e^{mx}) = me^{mx} \qquad \therefore f'(0)=me^{o}=m$

$f''(x) = \dfrac{d}{dx}(me^{mx}) = m^2e^{mx} \qquad \therefore f''(0)=m^2e^{o}=m^2$

$f'''(x)=m^2\dfrac{d}{dx}(e^{mx}) = m^3e^{mx} \qquad \therefore f'''(0)=m^3e^{o}=m^3$

অনুরূপভাবে $f^n(x)=m^ne^{mx} \qquad \therefore f^n(0)=m^ne^{o}=m^n$

এখন ম্যাকলরিনের ধারা অনুসারে– $f(x)=f(0)+xf'(0)+\dfrac{x^2}{2!}f''(0)+\dfrac{x^3}{3!}f'''(0)+....+\dfrac{x^n}{n!}f^n(0)+....$□

অর্থাৎ $e^{mx} = 1+x.m+\dfrac{x^2}{2!}.m^2+\dfrac{x^3}{3!}m^3+.....+\dfrac{x^n}{x!}m^n+.....$□

$= 1+mx+\dfrac{m^2x^2}{2!}+\dfrac{m^3x^3}{3!}+.....+\dfrac{m^nx^n}{n!}+....$ □

উদাহরণ 2 ঃ ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে $\dfrac{1}{1+x}$ কে বিস্তৃত করুন ।

সমাধান ঃ ধরুন $f(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \qquad \therefore f(0)=1$

$f'(x)=\dfrac{d}{dx}\{(1+x)^{-1}\}=-1.(1+x)^{-2} \qquad \therefore f'(0)=-1$

$f''(x) = \dfrac{d}{dx}\{(-1.(1+x)^{-2}\} \qquad \therefore f''(0)=(-1)^2\,2!.1$

$=-1(-2)(1+x)^{-3}=(-1)^2\,2!(1+x)^{-3}$

$f'''(x)=\dfrac{d}{dx}\{(-1)^2.2!\,(1+x)^{-3}\} \qquad \therefore f'''(0) = (-1)^3.\,3!$

$= (-1)^3.\,3!\,(1+x)^{-4}$

অনুরূপভাবে $f^n(x) = (-1)^n\,n!(1+x)^{-n+1} \qquad \therefore f(0)=)(-1)^n.\,n!$

ম্যাকলরিনের ধারা অনুসারে– $f(x)=f(0)+xf'(0)+\dfrac{x^2}{2!}f''(0)+\dfrac{x^3}{3!}f'''(0)+....+\dfrac{x^n}{x!}f^n(0)+....$□

অর্থাৎ $\dfrac{1}{1+x} = 1+x(-1)+\dfrac{x^2}{2!}.(-1)^2.2!+\dfrac{x^3}{3!}(-1)^3.3!+.....+\dfrac{x^n}{x!}(-1)^n n!+...$□

$= 1-x+x^2-x^3+.....+(-1)^nx^n+......$□

অনুশীলনী–৩.২

ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে নিম্নের ফাংশনগুলো বিস্তৃত করুন ।

1. $\cos 3x$
2. $\sin mx$

পাঠ-৪
অন্তরকের জ্যামিতিক প্রয়োগ (স্পর্শক নির্ণয়)

উদ্দেশ্য

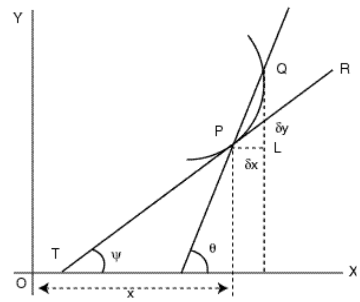
এই পাঠ শেষে আপনি–

- $\frac{dy}{dx}$ এর জ্যামিতিক প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন;
- যে কোন রেখার স্পর্শক নির্ণয় করতে পারবেন।

$\frac{dy}{dx}$ এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

ধরুন $y = f(x)$ বক্ররেখাটি PQ এর সমীকরণ। বক্ররেখাটির উপরিস্থিত কাছাকাছি দুটি বিন্দু P ও Q যাদের স্থানাংক (x, y) ও $(x+\delta x, y+\delta y)$। x এর সামান্য বৃদ্ধি δx এর জন্য y এর অনুরূপ বৃদ্ধি δy হয়।

Q এর কোনটির উপর PL লম্ব টানলে $QL = \delta y$ এবং $PL=\delta x$. যদি x অক্ষের সাথে PQ এর ছেদক θ কোণ উৎপন্ন করে তাহলে ঐ সরলরেখার ঢাল $\tan\theta = \frac{QL}{PL} = \frac{\delta y}{\delta x}$ ।



চিত্র ৩.৪.১

এখন যদি $\delta x \varnothing 0$ হয় তাহলে Q বিন্দুটি ক্রমশ P বিন্দুর দিকে অগ্রসর হয়ে প্রায় P এর সাথে মিশে যায় এবং বর্ধিত PQ ছেদকটি P বিন্দুতে স্পর্শক হয়। অতদএব $\delta x \varnothing 0$ হলে $\frac{\delta y}{\delta x}$ যে মানের দিকে অগ্রসর হয় তাহাই P বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্দেশ করে। অর্থাৎ x অক্ষের যোগবোধক দিকের সাথে P বিন্দুতে স্পর্শকের নতি ψ হলে ঐ স্পর্শকের ঢাল হবে $\tan\psi = \lim_{\delta x \varnothing 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$

ইহা x অক্ষের সাপেক্ষে y -এর পরিবর্তনের হার প্রকাশ করে।

সুতরাং x-এর যে কোন মানের জন্য অন্তরক সহগ $\frac{dy}{dx}$ এর মান এবং $y = f(x)$ বক্ররেখার P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের নতি সমান।

তাই $y = f(x)$ রেখা দ্বারা সূচিত বক্ররেখাস্থ কোন (x,y) বিন্দুতে স্পর্শক যদি x অক্ষের সাথে ψ কোণ উৎপন্ন করতে হবে $\frac{dy}{dx} = \tan\psi = (x,y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল বা নতি।

স্পর্শকের বিভিন্ন অবস্থান

$y = f(x)$ বক্ররেখার উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x,y)তে

i) যদি $\frac{dy}{dx} = 1$ হয় তাহলে রেখাটির ঐ বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

ii) যদি $\frac{dy}{dx}=0$ হয় তাহলে রেখাটির ঐ বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সাথে সমান্তরাল।

iii) যদি $\frac{dy}{dx} = \square$ হয় তাহলে রেখাটির ঐ বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের উপর লম্ব হয়।

iv) যদি $\frac{dy}{dx}$ ঋণাত্মক হয় তাহলে রেখাটির ঐ বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থুলকোণ উৎপন্ন করে।

স্পর্শকের সমীকরণ

ধরুন $y=f(x)$ সমীকরণটি একটি বক্ররেখার সমীকরণ নির্দেশ করে। ধরুন $P(x,y)$ বক্ররেখায় উপরিস্থিত একটি বিন্দু। P বিন্দুর খুব নিকটবর্তী একটি বিন্দু Q যার স্থানাংক $Q(x+\delta x, y+\delta y)$। যদি (x,y) চলমান একটি বিন্দু হয় তবে PQ এর ছেদকের সমীকরণ–

$$Y-y = \frac{y+\delta y-y}{x+\delta x-x}(X-x)$$

বা, $Y-y = \frac{\delta x}{\delta y}(X-x)$

সুতরাং P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ–

$$Y-y = \lim_{\delta x \varnothing 0} \frac{\delta y}{\delta x}(X-x)$$

বা, $Y-y = \frac{dy}{dx}(X-x)$

অভিলম্বের সমীকরণ

বক্ররেখার কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর লম্ব সরলরেখাকে ঐ বক্ররেখার ঐ বিন্দুতে অভিলম্ব বলা হয়। ধরুন (x,y) বিন্দুগামী একটি রেখায় (অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল নয়) সমীকরণ $Y-y=m(X-x)$

এই রেখাটি (x,y) বিন্দুতে $y=f(x)$ বক্ররেখায় স্পর্শক (অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল নয়) $Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$ এর উপর লম্ব হবে যদি

$m.\frac{dy}{dx} = -1$ হয়

অর্থাৎ যদি $m = -\frac{dx}{dy}$ হয়।

উপরোক্ত সমীকরণে m এর মান বসিয়ে পাই–

$$Y-y = -\frac{dx}{dy}(X-x)$$

বা, $(Y-y)\,dy = -\,dx(X-x)$

বা, $(Y-y)\frac{dy}{dx} + (X-x) = 0$

ইহা $y=f(x)$ বক্ররেখার উপর (x,y) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ যা অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল নয়।

উদাহরণ 1 ঃ $y=\frac{1}{x}$ বক্ররেখার যে বিন্দুতে $x=2$ সেই বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

যেহেতু $x=2$, $\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$

$\therefore$ স্পর্শকের ঢাল = – **Error!**)

উদাহরণ 2 ঃ x এর কোন মানের জন্য $y = x(x^2-27)$ বক্ররেখাটির ঢাল শূন্য হবে।

সমাধান ঃ $y = x(x^2-27) = x^3-27x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3-27x) = 3x^2-27$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore 3x^2-27 = 0$

বা, $3x^2=27$

বা, $x^2=9$

$\therefore x = \pm 3$

উদাহরণ 3 ঃ $y = x^3-3x+2$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলো x অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাংক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $y = x^3-3x+2$ ——————————(i)

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3-3x+2)$

$= 3x^2-3$

যেহেতু স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল অতএব উহার ঢাল শূন্য অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} = 0$

অর্থাৎ $3x^2-3=0$

বা, $3x^2=3$

$\therefore x^2=1$

$\therefore x = \pm 1$

এখন x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাওয়া যায়–

$x=1$ হলে $y = 1-3+2=0$

$x=-1$ হলে $y = -1+3+2=4$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুগুলো $(1,0)$, $(-1,4)$

উদাহরণ 4 ঃ $x^3+xy^2-3x^2+4x+5y+2=0$ বক্ররেখার $(1,-1)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x^3+xy^2-3x^2+4x+5y+2=0$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করলে

$$3x^2+1.y^2+x.2y\frac{dy}{dx}-6x+4+5\frac{dy}{dx}=0$$

বা, $(2xy+5)\frac{dy}{dx}=-3x^2-y^2+6x-4$

বা, $\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2+y^2-6x+4}{2xy+5}$

$(1, -1)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=-\frac{3.1+1-6+4}{2.1.(-1)+5}=-\frac{3+1-6+4}{-2+5}=-\frac{2}{3}$

$(1,-1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y-(-1)=-\frac{2}{3}(x-1)$

বা, $y+1=-\frac{2}{3}(x-1)$

বা, $3(y+1)=-2(x-1)$

বা, $3y+3=-2x+2$

বা, $3y+3+2x-2=0$

বা, $2x+3y+1=0$

এবং $(1,-1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $(x-1)+\left(-\frac{2}{3}\right)\{y-(-1)\}=0$

বা, $(x-1)-\frac{2}{3}(y+1)=0$

বা, $3(x-1)-2(y+1)=0$

বা, $3x-3-2y-2=0$

বা, $3x-2y-5=0$

উদাহরণ 5ঃ a এর মান কত হলে $y=ax(1-x)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শকটি x অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে।

সমাধান ঃ $y=ax(1-x)=ax-ax^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(ax-ax^2)=a-2ax$

যেহেতু স্পর্শকটি বক্ররেখার মূল বিন্দুতে গঠিত হয়।

$\therefore \frac{dy}{dx}=a-2a.0=a$

আবার যেহেতু স্পর্শকটি x অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \frac{dy}{dx}=\tan 60°$

বা, $a=\sqrt{3}$

উদাহরণ 6 ঃ $x^2+2ax+y^2=0$ বক্ররেখাটির উপর কোন কোন বিন্দুতে স্পর্শক সমূহ x অক্ষের উপর লম্ব হয়।

সমাধান ঃ $x^2+2ax+y^2=0$————————(i)

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে

$\frac{d}{dx}(x^2+2ax+y^2) = 0$

বা, $2x+2a+2y\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $2y\frac{dy}{dx} = -2x-2a$

বা, $\frac{dy}{dx} = -\frac{2(x+a)}{2y} = -\frac{x+a}{y}$

যেহেতু স্পর্শসমূহ নির্ণেয় বিন্দুগুলোতে x অক্ষের উপর লম্ব সেহেতু

$\frac{dy}{dx} = \infty$

বা, $-\frac{x+a}{y} = \infty$

$\therefore y = 0$

এখন y এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে–

$x^2+2ax=0$

বা, $x(x+2a) = 0$

$\therefore x=0, -2a$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুগুলো $(0,0), (-2a, 0)$

উদাহরণ 7 ঃ $y = x^3-3x^2-2x+1$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলো অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাদের ভূজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $y = x^3-3x^2-2x+1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3-3x^2-2x+1)$

$= 3x^2-6x-2$

যেহেতু স্পর্শকগুলো অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে

$\therefore \frac{dy}{dx} = \tan(\pm 45°) = \pm 1$

বা, $3x^2-6x-2 = \pm 1$

বা, $3x^2-6x-3=0$ অথবা $3x^2-6x-1=0$

বা, $x^2-2x-1=0$ বা, $x=\frac{6\pm\sqrt{36+12}}{6}$

বা, $x = \frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}$ $= \frac{6\pm\sqrt{48}}{6}$

বা, $\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}$ $= \frac{6\pm 4\sqrt{3}}{6}$

বা, $\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}$ $= 1\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

বা, $1\pm\sqrt{2}$ $= 1\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ নির্ণেয় ভুজ $1\pm\sqrt{2}$, $1\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

উদাহরণ ৪ ঃ $y^3=x^2(2a-x)$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল সেই সমস্ত বিন্দু নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $y^3=x^2(2a-x)$

বা, $y^3=2ax^2-x^3$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে

$\dfrac{d}{dx}(y^3) = \dfrac{d}{dx}(2ax^2-x^3)$

বা, $3y^2\dfrac{dy}{dx} = 2a.2x-3x^2$

বা, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4ax-3x^2}{3y^2}$

যেহেতু স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল অতএব তার ঢাল শূণ্য।

অর্থাৎ $\dfrac{dy}{dx} = 0$

বা, $\dfrac{4ax-3x^2}{3y^2} = 0$

বা, $4ax-3x^2=0$

বা, $x(3x-4a)=0$

$\therefore x=0, \dfrac{4a}{3}$

x এর মান প্রদত্ত সমীকরণে বসিয়ে–

যখন $x = 0$ $y=0$

যখন $x=\dfrac{4}{3}a$ তখন $y^3 = 2a.\left(\dfrac{4}{3}a\right)^2 - \left(\dfrac{4}{3}a\right)^3$

$= 2a.\dfrac{16}{9}a^2 - \dfrac{64}{27}a^3$

$= a^3\left(\dfrac{32}{9} - \dfrac{64}{27}\right) = a^3\left(\dfrac{96-64}{27}\right)$

বা, $y^3 = a^3\dfrac{32}{27}$

বা, $y^3 = a^3.\dfrac{2^3.4}{3^3}$

$\therefore y = \dfrac{2\sqrt[3]{4}}{3}a$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $\left(\dfrac{4}{3}a;\ \dfrac{2\sqrt[3]{4}}{3}a\right)$

অনুশীলনী– ৩.৩

1. $y=\dfrac{2}{x}$ বক্ররেখার যে বিন্দুতে $x=\dfrac{1}{2}$ সেই বিন্দুতে তার ঢাল নির্ণয় করুন।
2. $y=\dfrac{1}{3}x^3+2$ বক্ররেখাটির উপর এমন সব বিন্দু নির্ণয় করুন যেখানে স্পর্শকগুলো x অক্ষের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।
3. $y=\sqrt{x}$ বক্ররেখার কোন্ বিন্দুতে স্পর্শক x–অক্ষের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।
4. $x^2+2ax+y^2=0$ বক্ররেখায় যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক y অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাংক নির্ণয় করুন।
5. $x^2-5xy+y^2-5x+6y+9=0$ বক্ররেখার $(2,1)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
6. $x^2+y^2-2x-3=0$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলো x অক্ষের সমান্তরাল, তাদের স্থানাংক নির্ণয় করুন।
7. $y=(x+1)(x-1)(x-3)$ বক্ররেখাটির যে সমস্ত বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুগুলোতে তার ঢাল নির্ণয় করুন।
8. c এর মান কত হলে $y=cx(1+x)$ বক্ররেখার এবং x-অক্ষের ছেদ বিন্দুতে অঙ্কিত বক্ররেখার স্পর্শক x অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে।
9. $y=ax^2+bx+c$ বক্ররেখাটি মূলবিন্দু ও $(1,1)$ বিন্দুগামী, যদি মূল বিন্দুতে বক্ররেখাটির ঢাল 2 হয়, তবে a, b ও c এর মান নির্ণয় করুন।

পাঠ-৫
অন্তরকের সাহায্যে পরিবর্তনের হার নির্ণয়

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- অন্তরকের সাহায্যে পরিবর্তনের হার প্রকাশ ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

অন্তরকের সাহায্যে বেগ ও ত্বরণ নির্ণয়

ধরুন একটি চলমান কণা সরলপথে অবিরাম গতিতে চলছে। আবার ধরুন কণাটি t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে। যেহেতু কণাটি অবিরাম গতিতে চলছে অতএব t এর প্রত্যেকটি মানের জন্য s এর একটি নির্দিষ্ট মান থাকবে। সুতরাং s,t এর এটি ফাংশন অর্থাৎ $s=f(t)$.

যদি সময়ের অতি ক্ষুদ্র বৃদ্ধি δt এর জন্য অতিক্রান্ত দূরত্ব δs হয়, তাহলে $\frac{\delta s}{\delta t}$, δt সময়ের ব্যবধানে গড় গতিবেগ নির্দেশ করে। δt খুব ক্ষুদ্র হলে এই ক্ষুদ্র সময়ের ব্যবধানে গতিবেগ v এর মানের বেশি পরিবর্তন ঘটে না এবং t সেকেন্ডে গতিবেগ v প্রায় $\frac{\delta s}{\delta t}$ এর সমান হবে। সুতরাং $\delta t \varnothing 0$ হলে $\frac{\delta s}{\delta t}$ অনুপাতটি যে মানের দিকে অগ্রসর হয় তাই গতিবেগ v এর মান নির্দেশ করে।

অর্থাৎ $v = \underset{\delta t \varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{ds}{dt}$

ইহা দ্বারা t এর সম্পর্কে দূরত্ব s এর পরিবর্তনের হার প্রকাশ করে। সময় t এর সাপেক্ষে বেগ v এর পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলে। যদি কণাটির ত্বরণ a হয় তবে–

$$a = \underset{\delta t \varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

ত্বরণ a এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে কোন প্রকার হতে পারে। ত্বরণ a এর মান ধনাত্মক হলে বেগ বাড়ছে এবং a এর মান ঋণাত্মক হলে বেগ কমছে বুঝতে হবে। দ্বিতীয় ক্ষেত্রকে কণাটির মন্দন বুঝায়।

উদাহরণ 1 ঃ কোন গতিশীল বস্তুকণা t সেকেন্ড সময়ে s ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে। 10 সেকেন্ড পর তার গতিবেগ ও ত্বরণ নির্ণয় করুন। যখন–

(i) $s = 6t^2+7t+3$
(ii) $s=10t+5t^2+t^3$

সমাধান ঃ i) গতিবেগ $v = \frac{ds}{dt}$

$$= \frac{d}{dt}(6t^2+7t+3)$$

$$= 6.2t+7=12t+7$$

$\therefore$ 10 সেকেন্ড পর কণাটির গতিবেগ = 12*10+7=120+7=127ফুট/সে.

আবার ত্বরণ $a=\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(12t+7) = 12$

যেহেতু ত্বরণের মান t নিরপেক্ষ অতএব কনাটি সমত্বরণে চলবে।

ii) গতিবেগ $v \quad = \dfrac{ds}{dt}$

$= \dfrac{d}{dt}(10t+5t^2+t^3)$

$= 10+5.2t+3t^2$

$= 10+10t+3t^2$

অতএব 10 সেকেন্ড পর কণাটির গতিবেগ $= 10+10.10+3(10)^2$

$= 10+100+3.100$

$= 10+100+300$

$= 410$ ফুট/সে.

আবার ত্বরণ $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(10+10t+3t^2)$

$= 10+3.2t$

$= 10+6t$

$\therefore$ 10 সেকেন্ড পর কণাটির ত্বরণ $= 10+6.10$

$= 10+60$

$= 70$ ফুট/সে.

উদাহরণ 2 ঃ $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সমীকরণ দ্বারা সরলরৈখিক গতিতে চলমান একটি কণার দূরত্ব প্রকাশ করে যেখানে u এবং f ধ্রুবক। প্রমাণ করুন t সময়ে তার বেগ $u+ft$ এবং ত্বরণ f হবে।

সমাধান ঃ $s = ut+\frac{1}{2}ft^2$

t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই−

$\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(ut+\frac{1}{2}ft^2\right)$

$= u + \frac{1}{2}\,2ft$

$= u+ft$

কিন্তু বেগ $v = \dfrac{ds}{dt}$

$\therefore$ বেগ $v= u+ft$

আবার ত্বরণ $a = \dfrac{dv}{dt}$

$= \dfrac{d}{dt}(u+ft)$

$= f$

$\therefore$ বেগ $= u+ft$ এবং ত্বরণ $= f$

উদাহরণ 3 ঃ একটি পাথর 112 ফুট/সেকেন্ড বেগে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। যদি তার গতি সমীকরণ $s=112t-16t^2$ দ্বারা প্রকাশিত হয় তবে যে সময়ে (i) তার বেগ 80 ফুট/সেকেন্ড এবং (ii) পাথরটি তার উচ্চতম বিন্দুতে পৌঁছে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $s = 112t - 16t^2$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(112t - 16t^2)$$
$$= 112 - 16.2t$$
$$= 112 - 32t$$

কিন্তু বেগ $v = \dfrac{ds}{dt}$

$$\therefore v = 112 - 32t$$

i) বেগ 80 ফুট/সেকেন্ড হলে

$80 = 112 - 32t$

বা, $32t = 112 - 80$

বা, $32t = 32$

$\therefore t = 1$ সেকেন্ড

ii) পাথরটি তার উচ্চতম বিন্দুতে পৌঁছিলে বেগ শূন্য হবে

$\therefore 0 = 112 - 32t$

বা, $32t = 112$

বা, $t = \dfrac{112}{32} = \dfrac{7}{2} = 3\dfrac{1}{2}$ সেকেন্ড।

$\therefore$ পাথরটি $3\frac{1}{2}$ সেকেন্ডে তার উচ্চতম বিন্দুতে পৌঁছিবে।

উদাহরণ 4 ঃ একটি গতিশীল বস্তুকণা t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে, যেখানে $s = at^2 + bt + c$ যেখানে a, b ও c ধ্রুবক। যদি t সময় পরে বস্তুটির গতিবেগ v হয় তবে দেখান যে, $4a(s-c) = v^2 - b^2$

সমাধান ঃ $s = at^2 + bt + c$

t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই–

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(at^2 + bt + c)$$
$$= a.2t + b = 2at + b$$

কিন্তু $v = \dfrac{ds}{dt} = 2at + b$

$$\therefore v^2 = (2at + b)^2$$
$$= 4a^2t^2 + 4atb + b^2$$

বা, $v^2 - b^2 = 4a^2t^2 + 4atb$

$$= 4a(at^2 + bt) = 4a(s - c)$$

$$\therefore 4a(s - c) = v^2 - b^2$$

উদাহরণ 5 ঃ যদি একটি বৃত্তের কালি সমহারে বৃদ্ধি পায় তবে প্রমাণ করুন তার পরিসীমার বৃদ্ধির হার ব্যাসার্ধের বিপরীতক্রমে বাড়ে।

সমাধান ঃ ধরুন বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= r$

বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

এখন $\frac{d}{dt}(\pi r^2) = k$(ধ্রুবক)

বা, $\pi .2r\frac{dr}{dt} = k$

বা, $\frac{dr}{dt} = \frac{k}{2\pi r}$

বৃত্তের পরিসীমা = $2\pi r$

$\therefore$ পরিসীমা বৃদ্ধির হার = $\frac{d}{dt}(2\pi r)$

$= 2\pi\frac{dr}{dt}$

$= 2\pi . \frac{k}{2\pi r}$

$= \frac{k}{r}$

$\therefore$ বৃত্তটির পরিসীমা বৃদ্ধির হার ব্যাসার্ধের বিপরীতক্রমে বাড়ে।

উদাহরণ 6 ঃ একটি বিন্দু সোজাপথে এমনভাবে চলে যে, $s=\sqrt{t}$; দেখান যে, বিন্দুর ত্বরণ বিয়োগবোধক এবং বেগের ঘনফলের সাথে সমানুপাতিক।

সমাধান ঃ $s = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

কিন্তু বেগ $v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

এখন ত্বরণ = $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\ t^{-\frac{1}{2}-1}$

$= -\frac{1}{4}\ t^{-\frac{3}{2}}$

$= -2\left(\frac{1}{8}t^{-\frac{3}{2}}\right)$

$= -2\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right)^3$

$= -2\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^3$

$= -2\ (v)^3$

$\therefore$ ত্বরণ বিয়োগবোধক এবং বেগের ঘনমূলের সাথে সমানুপাতিক।

উদাহরণ 7 ঃ কোন সরলরেখার একটি গতিশীল কণার t সেকেন্ড সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব s কে $s = 63t - 6t^2 - t^3$ দ্বারা প্রকাশ করা হল। 2 সেকেন্ডের শেষে কণাটির বেগ কত? কণাটি কত সময় পরে থেমে যাবে?

সমাধান ঃ $s = 63t - 6t^2 - t^3$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(63t - 6t^2 - t^3)$$
$$= 63 - 6.2t - 3t^2$$
$$= 63 - 12t - 3t^2$$

কিন্তু বেগ $v = \dfrac{ds}{dt} = 63 - 12t - 3t^2$

2 সেকেন্ড শেষে কণাটির বেগ $v = 63 - 12.2 - 3.(2)^2$
$$= 63 - 24 - 3.4$$
$$= 63 - 24 - 12$$
$$= 63 - 36$$
$= 27$ ফুট/সে.

যখন কণাটি থেমে যাবে তখন বেগ শূন্য হবে অর্থাৎ $v = 0$

$\therefore\ 0 = 63 - 12t - 3t^2$

বা, $t^2 + 4t - 21 = 0$

বা, $t^2 + 7t - 3t - 21 = 0$

বা, $t(t+7) - 3(t+7) = 0$

বা, $(t+7)(t-3)$

বা, $(t-3)\ \ [\because t \neq -7]$

$\therefore\ t = 3$

$\therefore$ কণাটি 3 সেকেন্ড পরে থেমে যাবে।

উদাহরণ 8 ঃ দেখান যে, গোলাকার সাবানের বুদবুদের আয়তনের বৃদ্ধি হার তার ব্যাসার্ধের বৃদ্ধি হারের $4\pi r^2$ গুণ।

সমাধান ঃ গোলাকার সাবানের বুদবুদের আয়তন $v = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

এখন বুদবুদের আয়তনের বৃদ্ধি হার

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$
$$= \frac{4}{3}\pi \, .\, 3r^2 \frac{dr}{dt}$$
$$= 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$\therefore$ গোলাকার সাবানের বুদবুদের আয়তনের বৃদ্ধি হার তার ব্যাসার্ধের বৃদ্ধি হারের $4\pi r^2$ গুণ।

অনুশীলনী–৩.৪

1. কোন সরলরেখার একটি কণা t সেকেন্ড সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে যেখানে $s=3.8t - 1.5t^2$ দ্বারা প্রকাশিত। প্রমাণ করুন ত্বরণ একটি স্থির রাশি। ত্বরণের মানও বাহির করুন।
2. একটি বস্তুর গতির সমীকরণ $x= t^2$। দেখান যে ইহার গতিবেগের পরিবর্তনের হার একটি ধ্রুব রাশি।
3. কোন একটি কণা u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত হল। t সময়ে কণাটির অতিক্রান্ত উচ্চতা $h=ut-\frac{1}{2}gt^2$ হলে ঐ কণার সর্বাধিক উচ্চতা এবং সেখানে যাওয়ার সময় নির্ণয় করুন।
4. কোন বস্তুকে নির্দিষ্ট গতিবেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত করা হয়। এর গতির সমীকরণ $s=174t-16t^2$ হলে–
   (i) 4 সেকেন্ড পর এর গতিবেগ কত হবে?
   (ii) এর সর্বাধিক উচ্চতার মান কত?
   (iii) সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছানোর সময় নির্ণয় করুন।
5. একটি রেলগাড়ি t সেকেন্ডে $3t+\frac{1}{8}t^2$ ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে। 5 মিনিট পরে তার বেগ কত হবে?
6. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্দিষ্ট হারে বৃদ্ধি পেতে থাকলে, প্রমাণ করুন এর ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধি হার ব্যাসার্ধের সমানুপাতিক।
7. কোন গোলকের ব্যাসার্ধ r, পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল A এবং আয়তন v হলে দেখান যে, $2\frac{dv}{dt} = r\frac{dA}{dt}$

পাঠ-৬
ফাংশনের চরম মান

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

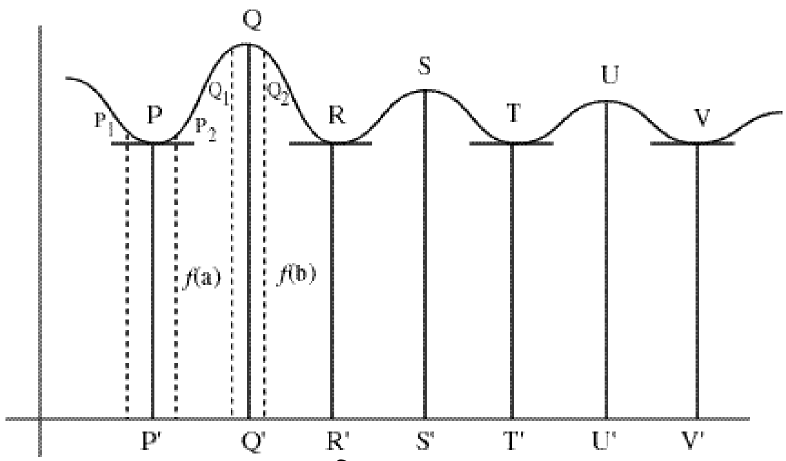
- ফাংশনের গরিষ্ঠ মান ও লগিষ্ঠ মান সম্পর্কে জানতে পারবেন;
- বিভিন্ন ফাংশনের চরমমান নির্ণয় করতে পারবেন।

ফাংশনের চরমমান

সংজ্ঞা ঃ কোন ফাংশন $f(x)$ এর মানকে $x=a$ বিন্দুতে গরিষ্ঠ (Maximum) বলা হয় যদি $x=a$ এর নিকটবর্তী x এর সকল মানের জন্য $f(a)$ এর মান $f(x)$ এর মানের তুলনায় বড় হয়।

অনুরূপভাবে, কোন ফাংশন $f(x)$ এর মানকে $x=a$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠ (Minimum) বলা হয় যদি $x=a$ এর নিকটবর্তী x এর সকল মানের জন্য $f(a)$ এর মান $f(x)$ এর মানের তুলনায় ক্ষুদ্র হয়।

উপরে বর্ণিত ফাংশনের গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মানের ধারণাকে লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিতভাবে বর্ণনা করা যায়। ধরুন $f(x)$ নির্দিষ্ট ব্যবধিতে একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন।



চিত্র–৩.৬.১

ধরুন উপরের লেখচিত্রটি $y=f(x)$ ফাংশনটি লেখচিত্র নির্দেশ করে।

লেখচিত্রটি লক্ষ করলে দেখা যায় P বিন্দু অর্থাৎ $x=a$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল। অতএব P বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল অর্থাৎ $\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)=0$। কিন্তু P এর অতি নিকটবর্তী P_1 বিন্দু অর্থাৎ $x=a-h$ বিন্দুতে (যেখানে h অতিক্ষুদ্র কিন্তু $h>0$) অঙ্কিত স্পর্শক x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে। অতএব P_1 বিন্দুতে $f'(x)<0.$। আবার $P_2(x=a+h)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে অর্থাৎ P_2 বিন্দুতে $f'(x)>0.$

লেখচিত্র হতে বুঝা যায়,

- $x=a$ বিন্দুতে $f'(x)=0$

- x এর সকল মানের জন্য (a থেকে ক্ষুদ্রতর কিন্তু a এর নিকটবর্তী) $f'(x) <0$
- x এর সকল মানের জন্য (a থেকে বৃহত্তর কিন্তু a এর নিকটবর্তী) $f'(x) > 0$

অতএব $a-h<a<a+h$ ব্যবধিতে P বিন্দু অর্থাৎ $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান ক্ষুদ্রতর এবং সেই মান $f(a)$। $f(a)$ কে বলা হয় $f(x)$ এর লঘিষ্ঠ মান (Minimum value or minima)।
অনুরূপভাবে, R, T, V বিন্দুতে $f(x)$ এর মান লঘিষ্ঠ।
অনুরূপভাবে Q বিন্দু অর্থাৎ $x=b$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল। অতএব Q বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)=0$
কিন্তু Q এর অতি নিকটবর্তী Q_1 অর্থাৎ $x=b-h$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে। সুতরাং Q_1 বিন্দুতে $f'(x)>0$। আবার Q_2 বিন্দু অর্থাৎ $x=b+h$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে। সুতরাং Q_2 বিন্দুতে $f'(x) <0$.
অতএব, লেখচিত্র হতে স্পষ্ট বুঝা যায়–

- $x=b$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$
- x এর সকল মানের জন্য (b থেকে ক্ষুদ্রতর কিন্তু b এর নিকটবর্তী) $f'(x)>0$
- x এর সকল মানের জন্য (b থেকে বৃহত্তর কিন্তু b এর নিকটবর্তী) $f'(x) <0$

অতএব $b-h<b<b+h$ ব্যবধিতে Q বিন্দু অর্থাৎ $x=b$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান বৃহত্তর এবং সেই মান $f(b)$। $f(b)$ কে বলা হয় $f(x)$ এর গরিষ্ঠ মান (maximum value or maxima)।
একইভাবে S এবং U বিন্দুতে $f(x)$ এর মান গরিষ্ঠ।

ফাংশনের চরমমান নির্ণয়ের পদ্ধতি

- প্রথমে প্রদত্ত ফাংশনকে $f(x)$ দ্বারা সূচিত করুন।
- তারপর $f(x)$ কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে $f'(x)$ নির্ণয় করুন।
- তারপর $f'(x)=0$ ধরে সমাধান করে x এর মান নির্ণয় করুন।
- $f'(x)$ কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে $f''(x)$ নির্ণয় করুন। ধরুন মানটি $x=a$
- তারপর $f''(a)$ নির্ণয় করুন।

সিদ্ধান্ত

i) $f''(a)<0$ হলে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ গরিষ্ঠ হবে।
ii) $f''(a)>0$ হলে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ লঘিষ্ঠ হবে।
iii) $f''(a)=0$ হলে $x=a$ বিন্দুতে ফাংশনটি লঘিষ্ঠ বা গরিষ্ঠ কোনটিই হবে না।

উদাহরণ 1 ঃ $2x^3-9x^2+12x-3$ ফাংশনটির লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠমান নির্ণয় করুন।
সমাধান ঃ ধরুন $f(x) = 2x^3-9x^2+12x-3$
x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই–
$f'(x) = 6x^2-18x+12$
$f(x)$ লঘিষ্ঠ বা গরিষ্ঠ হবে যখন $f'(x)=0$
অর্থাৎ $6x^2-18x+12=0$

বা, $x^2-3x+2=0$

বা, $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=1, 2.$

আবার $f''(x) = 12x-18$

যখন $x=1$ তখন $f''(x) = 12-18 = -6<0$

সুতরাং $f(x)$ মান গরিষ্ঠ যখন $x=1$

এবং গরিষ্ঠ মান $f(1) = 2.1-9.1+12.1-3=2$

যখন $x=2$ তখন $f''(x) = 24-18=6>0$

সুতরাং $f(x)$ মান লঘিষ্ঠ যখন $x=2$

এবং লঘিষ্ঠ মান $f(x)= 2.2^3-9.2^2+12.2-3$

$= 2.8-9.4+12.2-3$

$= 16-36+24-3$

$=1$

উদাহরণ 2 ঃ $4x^3+9x^2-12x+13$ ফাংশনটির লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $f(x) = 4x^3+9x^2-12x+13$

$\therefore\ f'(x)=12x^2+18x-12$

$f(x)$ গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ হবে যখন $f'(x) = 0$

অর্থাৎ $12x^2+18x-12=0$

বা, $2x^2+3x-2=0$

বা, $2x^2+4x-x-2 =0$

বা, $2x(x+2)-1(x+2)=0$

বা, $(x+2)(2x-1)=0$

$\therefore\ x = -2, \frac{1}{2}$

আবার, $f''(x) = 24x+18$

যখন $x=-2$ $f''(x) = -48+18=-30<0$

সুতরাং $f(x)$ এর মান গরিষ্ঠ যখন $x=-2$

এবং গরিষ্ঠ মান $f(-2)$ $= 4(-2)^3+9(-2)^2-12(-2)+13$

$= 4(-8) +9.4+24+13$

$= -32+36+24+13$

$= 41$

যখন $x=\frac{1}{2}$ তখন $f''(x) = 24.\frac{1}{2} + 18=30>0$

সুতরাং $f(x)$ এর মান লঘিষ্ঠ যখন $x=\frac{1}{2}$

এবং লঘিষ্ঠ মান $f\left(\frac{1}{2}\right)$ $= 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1}{2}\right)^2 -12\left(\frac{1}{2}\right) + 13$

$= 4\frac{1}{8} + 9\frac{1}{4} - 6+13$

$$= \frac{1}{2} + \frac{9}{4} - 6 + 13 =$$

$$= \frac{39}{4} = 9\frac{3}{4}$$

অনুশীলনী– ৩.৫

নিম্নলিখিত ফাংশনগুলোর লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান নির্ণয় করুন।

1. $x^3 - 3x^2 - 93$ 2. $2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ 3. $10 + 12x - 3x^2 - 2x^3$ 4. $x + \frac{1}{x}$

উত্তরমালা

অনুশীলনী - ৩.১

1. $\frac{2}{x}$

2. $\sin x$

5. $\frac{1}{2}(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x+a)^{n+1}} + \frac{1}{(x-a)^{n+1}}\right]$

6. $2^x (\log_e 2)^n$

অনুশীলনী - ৩.২

1. $1-\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^4}{4!}-\ldots\ldots\ldots$ □

2. $mx-\frac{(mx)^3}{3!}+\frac{(mx)^5}{5!}-$ ----------------------- □

অনুশীলনী-৩.৩

1. -8 2. $\left(1\ \frac{7}{3}\right)\ \left(-1\ \frac{5}{3}\right)$ 3. $\left(\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\right)$ 4. $(0,0),\ (-2a,0)$

5. $3x+y-7=0,\ x-3y+1=0$ 6. $(1,2),\ (1-2)$ 7. $8, -4, 8$

8. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (9) $a=-1,\ b=2,\ c=0$

অনুশীলনী ৩.৪

1. 3 সেমি/সে^{2} 3. $\frac{u^2}{2g}, \frac{u}{g}$ 4. (i) 40 ফুট/সে. (ii) $\frac{(87)^2}{16}$ ফুট,

(iii) $\frac{87}{10}$ সে. 5. 78 ফুট/সে.।

অনুশিলনী - ৩.৫

2. max x=1, min x=6 3. 17, –10 4. –2, 2