ইউনিট ৮

সমতলীয় বল জোট

ভূমিকা ঃ *পূর্ববর্তী ইউনিটে এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বল অর্থাৎ যে সকল বলের ক্রিয়ারেখাগুলো এক বিন্দুতে মিলিত হয় তাদের বিষয়গুলো আলোচিত হয়েছে। এ সকল ক্ষেত্রে বলের মান ও দিক নির্দিষ্ট, কিন্তু ক্রিয়ারেখা নির্দিষ্ট নাও হতে পারে। সমান্তরাল বলের মান, দিক ও ক্রিয়ারেখা নির্দিষ্ট। তবে বলের ক্রিয়ারেখার যে কোন বিন্দুকে বলের ক্রিয়াবিন্দু কল্পনা করা যেতে পারে এবং ইতিপূর্বে অর্জিত জ্ঞান সমান্তরাল বল সম্পর্কীয় সমস্যা সমাধানে প্রয়োগ করা যেতে পারে। বর্তমান ইউনিটে সমান্তরাল বল, বলের ভ্রামক, যুগল এবং জড়বস্তুর ভারকেন্দ্র ইত্যাদি সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হবে।*

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি–

- দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় করতে ও সমস্যা সমাধানে তা প্রয়োগ করতে পারবেন;
- দুইটি অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় করতে ও সমস্যা সমাধানে তা প্রয়োগ করতে পারবেন;
- বলের ভ্রামকের ধারণা ব্যাখ্যা ও সমস্যা সমাধানে তা প্রয়োগ করতে পারবেন;
- যুগলের ধারণা ব্যাখ্যা ও সমস্যা সমাধানে তা প্রয়োগ করতে পারবেন;
- জড়বস্তুর ভারকেন্দ্র সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

পাঠ-১
দুটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয়

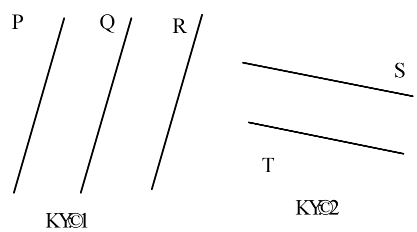
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- দুটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় করতে পারবেন এবং পর্যায়ক্রমে এ তত্ত্ব প্রয়োগ করে যে কোন সংখ্যক সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় করতে পারবেন;
- একক বলকে দুটি সদৃশ সমান্তরাল উপাংশে বিভাজন করতে পারবেন;
- সদৃশ সমান্তরাল বল সম্পর্কীয় সমস্যাগুলো সমাধানে উপরোক্ত তত্ত্ব প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন।

সমান্তরাল বল

দুই বা ততোধিক বলের নির্দিষ্ট ক্রিয়ারেখাগুলো সমান্তরাল হলে বলগুলো সমান্তরাল বল বলা হয়। যদি সমান্তরাল বলগুলো একই দিকে ক্রিয়া করে, তবে তাদেরকে সমমুখী বা সদৃশ সমান্তরাল বল বলা হয়; আর দুটি সমান্তরাল বল বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে, তবে তাদেরকে বিপরীতমুখী বা অসদৃশ সমান্তরাল বল বলা হয়।



চিত্র: ৮.১.১

চিত্র–১ এ P, Q, R বলত্রয় সদৃশ সমান্তরাল এবং চিত্র–২ এ S ও T বলদ্বয় অসদৃশ সমান্তরাল ।

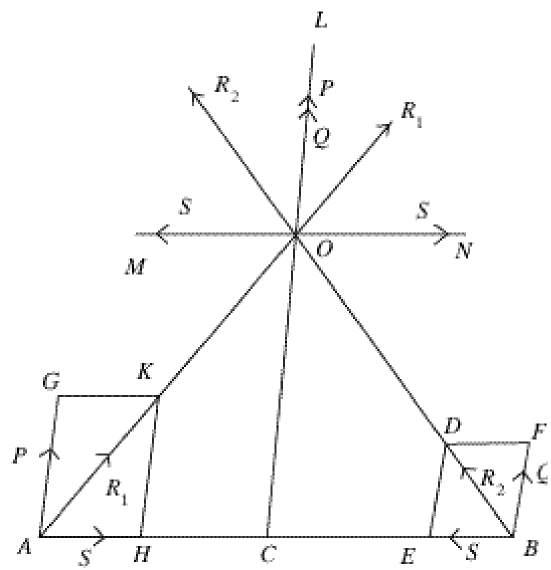
দুটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয়

মনে করুন, কোন জড় বস্তুর A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধি নির্ণয় করতে হবে।

লব্ধি নির্ণয়ের সুবিধার্থে AB ও BA বরাবর S মানের দুটি বল প্রয়োগ করুন। এরা সমান ও বিপরীতমুখী বলে পরস্পরকে নিষ্ক্রিয় করবে। তাই P ও Q এর লব্ধির উপর এদের কোন প্রভাব পড়বে না।

A বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও S বল নির্দেশক (দিকে ও মানে) রেখাকে বাহু নিয়ে $AHKG$ সামান্তরিক এবং B বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও S বল নির্দেশক রেখাকে বাহু নিয়ে $BEDF$ সামান্তরিক অঙ্কন করুন।

এক্ষেত্রে $P = \overset{\varnothing}{AG}$, $Q = \overset{\varnothing}{BF}$ ও $S = \overset{\varnothing}{AH}$, তাহলে $-S = \overset{\varnothing}{BE}$ এবং A বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও S বলদ্বয়ের লব্ধি $R_1 = \overset{\varnothing}{AK}$ ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও S বলদ্বয়ের লব্ধি $R_2 = \overset{\varnothing}{BD}$ ।



চিত্রঃ ৮.১.২

R_1 ও R_2 এর ক্রিয়ারেখাকে বর্ধিত করায় এরা O বিন্দুতে মিলিত হলো। AB এর সমান্তরাল MON এবং HK এর সমান্তরাল COL রেখা অঙ্কন করে R_1 এর ক্রিয়াবিন্দু A এর পরিবর্তে O বিবেচনা করে R_1 কে বিভাজন করলে, ON বরাবর S ও COL বরাবর P উপাংশ পাওয়া যায় এবং R_2 এর ক্রিয়াবিন্দু B এর পরিবর্তে O বিবেচনা করে R_2কে বিভাজন করলে, OM বরাবর S ও COL বরাবর Q উপাংশ পাওয়া যায়।

O বিন্দুতে ক্রিয়ারত S মানের উপাংশদ্বয় সমান ও বিপরীত বলে পরস্পরকে নিষ্ক্রিয় করে এবং COL বরাবর P ও Q উপাংশদ্বয় অবশিষ্ট থাকে। অতএব লব্ধি $R=P+Q$, যা COL বরাবর ক্রিয়ারত।

এবার R এর ক্রিয়াবিন্দু O এর পরিবর্তে AB রেখার C বিন্দু বিবেচনা করুন এবং A ও B সাপেক্ষে C এর অবস্থান নির্ণয় করুন।

$\because CO \parallel HK, \ \therefore \Delta AHK$ ও ΔACO সদৃশ

$$\therefore \frac{AC}{AH} = \frac{CO}{HK} = \frac{CO}{AG}$$

বা, $\dfrac{CO}{AC} = \dfrac{AG}{AH} = \dfrac{P}{S}$

$$\therefore P.AC = S.CO \ .... \ \text{(i)}$$

আবার, $CO \parallel ED$, অতএব $-\Delta BDE$ ও ΔBCO সদৃশ,

তাই $\dfrac{BC}{BE} = \dfrac{CO}{ED} = \dfrac{CO}{BF}$

বা, $\dfrac{CO}{BC} = \dfrac{BF}{BE} = \dfrac{Q}{S}$

$$\therefore Q.BC = S.CO \ .... \ \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) হতে পাই–

$$P.AC = Q.BC$$

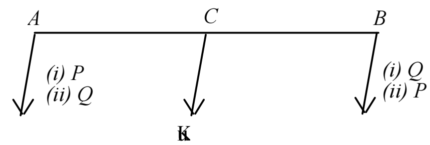
বা, $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{BC}{AC}$

অর্থাৎ C বিন্দু AB রেখাকে তার প্রান্তীয় বলদ্বয়ের ব্যস্ত অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

- এক্ষেত্রে P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ে লব্ধি বল R। বিপরীতক্রমে বলা যায় R বলের সদৃশ সমান্তরাল উপাংশদ্বয় P ও Q বল।
- P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় সমান হলে, $AC=BC$ হবে অর্থাৎ লব্ধি AB সরলরেখার মধ্যবিন্দুতে ক্রিয়া করবে।

উদাহরণ 1 ঃ P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় ক্রিয়ারেখার অবস্থান বদল করলেও যদি তাদের লব্ধির ক্রিয়ারেখার অবস্থান অপরিবর্তিত থাকে, তবে প্রমাণ করুন যে, $P=Q$

সমাধান ঃ মনে করুন, জড়বস্তুর A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে ক্রিয়ারত P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি AB এর উপরিস্থিত C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। তাহলে,



চিত্র ৮.১.৩

$$\frac{P}{Q}=\frac{BC}{AC} \text{ .... (i)}$$

বলদ্বয় পরস্পর স্থান বদল করলেও তাদের লব্ধি যদি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে তাহলে,

$$\frac{Q}{P}=\frac{BC}{AC} \text{ ...... (ii)}$$

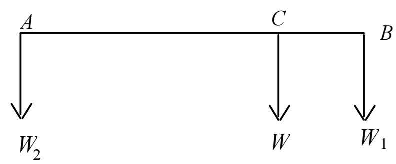
(i) ও (ii) হতে, $\frac{P}{Q}=\frac{Q}{P}$ বা, $P^2=Q^2$ $\therefore P=Q$

উদাহরণ 2 ঃ একটি হালকা দন্ড AB দুই প্রান্তে দুটি অবলম্বনের উপর অনুভূমিকভাবে স্থাপিত আছে। দন্ডটির C বিন্দুতে একটি ভারী বস্তু ঝুলানো হ'ল। যদি $AC = 3BC$ হয় এবং B বিন্দুতে অবলম্বনের উপর চাপের পরিমাণ A বিন্দুতে অবলম্বনের উপর চাপের চেয়ে 325 পাউন্ড ওজন বেশি হয়, তবে বস্তুটির ওজন নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করুন, বস্তুটির ওজন W, B ও A বিন্দুতে অবলম্বনের উপর চাপ যথাক্রমে W_1 ও W_2। তাহলে,

$W_1+W_2 = W$

ও $W_1 - W_2 = 325$ পাউন্ড ওজন



চিত্র ৮.১.৪

$$\frac{W_1}{W_2}=\frac{AC}{BC}=\frac{3.BC}{BC}=\frac{3}{1}$$

বা, $\frac{W_1+W_2}{W_1-W_2}=\frac{3+1}{3-1}=\frac{4}{2}=2$

বা, $\frac{W}{325 \text{ পাউন্ড ওজন}}=2$

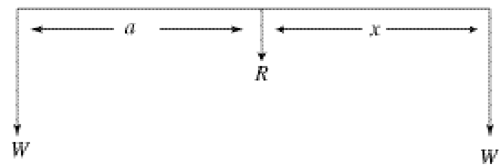
$\therefore W = 2*325$ পাউন্ড ওজন

$= 650$ পাউন্ড ওজন।

উদাহরণ 3 ঃ একজন লোক তাঁর কাঁধে অনুভূমিকভাবে l দৈর্ঘ্যের একটি হাল্‌কা লাঠি স্থাপন করে একপ্রান্তে হাতের চাপ প্রয়োগ করে অপর প্রান্তে W ওজনের একটি বস্তু বহন করছে।

(i) যদি কাঁধ হতে বস্তু ও হাতের দূরত্ব যথাক্রমে a ও x হয়, তবে দেখান যে, কাঁধের উপর চাপ $= W\left(1+\frac{a}{x}\right)$;

(ii) যদি কাঁধ হতে হাতের দূরত্ব পরিবর্তন করা হয়, তবে কাঁধের উপর চাপের পরিবর্তন কিভাবে হবে?



চিত্রঃ ৮.১.৫

সমাধান ঃ ধরুন, হাতের চাপ W'। তাহলে কাঁধের উপর চাপ $R=W+W'$ এবং $\frac{W'}{W} = \frac{a}{x}$

বা, $\frac{W+W'}{W} = \frac{x+a}{x}$

বা, $\frac{R}{W} = 1+\frac{a}{x}$

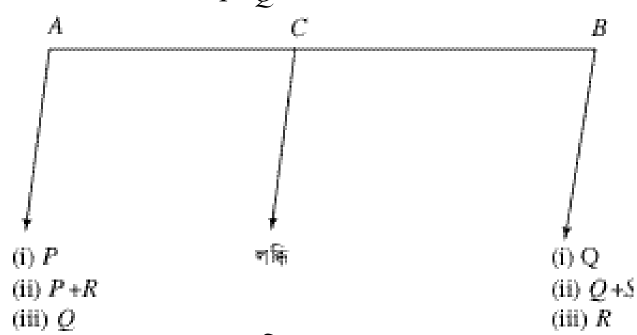
$\therefore R = W\left(1+\frac{a}{x}\right)$ .... (i)

আবার, $R = W\left(\frac{x+a}{x}\right)$

$= \frac{Wl}{x}$; [লাঠির দৈর্ঘ্য $l = x+a$]

$\because W$ ও l ধ্রুবক, $\therefore R \propto \frac{1}{x}$ অর্থাৎ কাঁধের উপর চাপ হাতের দূরত্বের ব্যস্তানুপাতিক হবে।

উদাহরণ 4 ঃ A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় ক্রিয়ারত। Pকে R ও Q কে S পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু অপরিবর্তিত থাকে। আবার A বিন্দুতে Q ও B বিন্দুতে R ক্রিয়ারত অবস্থায়ও লব্ধির ক্রিয়াবিন্দুর অবস্থানের পরিবর্তন হয় না। দেখান যে, $S = R-\frac{(Q-R)^2}{P-Q}$ ।



চিত্রঃ ৮.১.৬

সমাধান ঃ মনে করুন, লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C।

১ম ক্ষেত্রে, $\frac{BC}{AC} = \frac{P}{Q}$

২য় ক্ষেত্রে, $\frac{BC}{AC} = \frac{P+R}{Q+S}$

৩য় ক্ষেত্রে, $\frac{BC}{AC} = \frac{Q}{R}$

$\therefore \frac{P}{Q} = \frac{Q}{R} = \frac{P+R}{Q+S}$

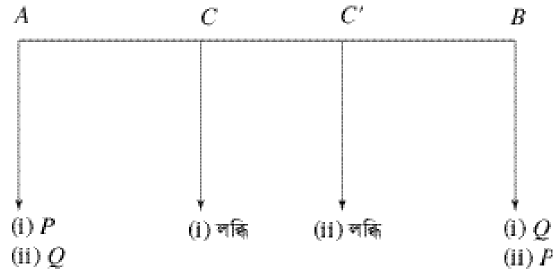
$= \frac{P+R-P}{Q+S-Q} = \frac{R}{S}$

বা, $\frac{P-Q}{Q-R} = \frac{Q-R}{R-S}$ বা, $R-S = \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$

$\therefore S = R - \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$

উদাহরণ 5 ঃ A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে P ও Q $(P>Q)$ সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় ক্রিয়ারত। বল দুটি অবস্থান বিনিময় করলে, তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর d দূরে সরে যায়। প্রমাণ করুন যে, $d = \frac{P-Q}{P+Q} . AB$

সমাধান ঃ মনে করুন, A বিন্দুতে P ও B বিন্দুতে Q ক্রিয়ারত অবস্থায় তাদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।



চিত্র: ৮.১.৭

$\therefore \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{P}{Q}$

বা, $\dfrac{BC}{AC+BC} = \dfrac{P}{P+Q}$

বা, $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{P}{P+Q}$ $\quad \therefore BC = \dfrac{P}{P+Q} \cdot AB$ .... (i)

এবার A বিন্দুতে Q ও B বিন্দুতে P ক্রিয়ারত অবস্থায় তাদের লব্ধি C' বিন্দুতে ক্রিয়া করলে–

$\dfrac{BC'}{AC'} = \dfrac{Q}{P}$ বা, $\dfrac{BC'}{AC'+BC'} = \dfrac{Q}{P+Q}$

বা, $\dfrac{BC'}{AB} = \dfrac{Q}{P+Q}$ $\quad \therefore BC' = \dfrac{Q}{P+Q} \cdot AB$ .... (ii)

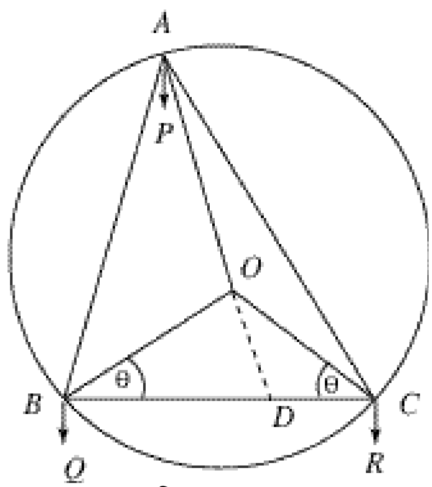
এখন $d = CC' = BC\text{-}BC' = \dfrac{P}{P+Q} \cdot AB - \dfrac{Q}{P+Q} \cdot AB = \dfrac{P\text{-}Q}{P+Q} \cdot AB$

উদাহরণ 6 ঃ ABC ত্রিভুজের A, B, C বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R সদৃশ সমান্তরাল বলত্রয় ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রগামী হলে, দেখান যে,

(i) $\dfrac{P}{\sin 2A} = \dfrac{Q}{\sin 2B} = \dfrac{R}{\sin 2C}$

(ii) $\dfrac{P}{a \cos A} = \dfrac{Q}{b \cos B} = \dfrac{R}{c \cos C}$

সমাধান ঃ Q ও R সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি $Q+R$, BC এর D বিন্দুতে ক্রিয়া করলে $\dfrac{Q}{R} = \dfrac{CD}{BD}$ হবে। শর্ত অনুযায়ী A বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও D বিন্দুতে ক্রিয়ারত $Q + R$ সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধির অর্থাৎ P, Q ও R এর লব্ধির ক্রিয়ারেখা ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O বিন্দুগামী। তাই AD এর উপর O অবস্থিত হবে।



চিত্র: ৮.১.৮

$\because OB =$ ব্যাসার্ধ $= OC$

$\therefore \angle OBC = \angle OCB = \theta$ (ধরুন)

এখন ΔOCD হতে $\dfrac{OD}{\sin\theta} = \dfrac{CD}{\sin COD}$, কারণ ত্রিভুজের বাহুগুলো বিপরীত কোণের sine-এর সমানুপাতিক।

বা, $\dfrac{OD}{\sin\theta} = \dfrac{CD}{\sin(180°\text{-}\angle AOC)} = \dfrac{CD}{\sin AOC} = \dfrac{CD}{\sin 2B}$; [একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ। তাই $\angle AOC = 2B$]

$$\therefore CD = \dfrac{OD}{\sin\theta} \cdot \sin 2B$$

$\Delta\, OBD$ হতে, $\dfrac{OD}{\sin\theta} = \dfrac{BD}{\sin BOD} = \dfrac{BD}{\sin(180°\text{-}\angle AOB)} = \dfrac{BD}{\sin AOB} = \dfrac{BD}{\sin 2C}$

$$\therefore BD = \frac{OD}{\sin\theta} \,.\, \sin 2C$$

সুতরাং $CD : BD = \frac{OD}{\sin\theta} \,.\, \sin 2B : \frac{OD}{\sin\theta} \,.\, \sin 2C = \sin 2B : \sin 2C$

এখন $\frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C}$

বা, $\frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, $\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B}$

$\therefore \frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$ .... *(i)*

বা, $\frac{P}{2\sin A \cos A} = \frac{Q}{2\sin B \cos B} = \frac{R}{2\sin C \cos C}$

বা, $\frac{P}{\frac{a}{r}\cos A} = \frac{Q}{\frac{b}{r}\cos B} = \frac{R}{\frac{c}{r}\cos C}$ $\left(\text{যেহেতু } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{C}{\sin C} = 2r\right)$

$\therefore \frac{P}{a\cos A} = \frac{Q}{b\cos B} = \frac{R}{c\cos C}$

উদাহরণ 7 ঃ ABC ত্রিভুজে A, B, C বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R সদৃশ সমান্তরাল বলত্রয় ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা ΔABC-এর লম্বকেন্দ্রগামী হলে দেখান যে,

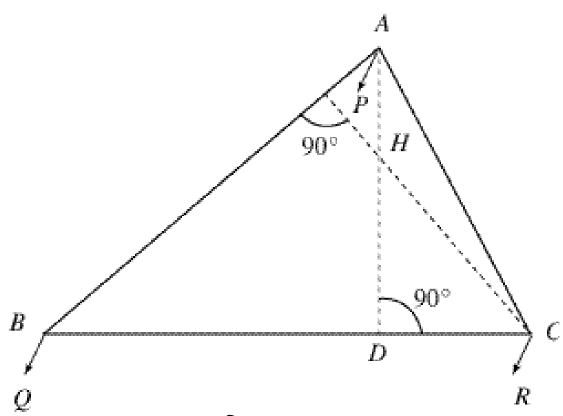
(i) $\frac{P}{\tan A} = \frac{Q}{\tan B} = \frac{R}{\tan C}$

(ii) $P\cot A = Q\cot B = R\cot C$

(iii) $P(b^2+c^2-a^2) = Q(c^2+a^2-b^2) = R(a^2+b^2-c^2)$

সমাধান : Q ও R সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি $Q+R$, BC এর D বিন্দুতে ক্রিয়া করলে, $\frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD}$ শর্ত অনুযায়ী A বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও D বিন্দুতে ক্রিয়ারত $Q+R$ সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি অর্থাৎ P, Q ও R এর লব্ধির ক্রিয়ারেখা ABC ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র H বিন্দুগামী।

তাই AD এর উপর H অবস্থিত হবে এবং BC এর উপর AD লম্ব হবে।



চিত্র: ৮.১.৯

$$\frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD} = \frac{AC.\frac{CD}{AC}}{AB.\frac{BD}{AB}} = \frac{b\cos C}{c\cos B}$$

$$= \frac{\sin B}{\sin C} * \frac{\cos C}{\cos B} \; ; \; \left(\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2\pi. \text{ তাই } \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}\right)$$

$$= \tan B \,.\, \cot C = \tan B.\, \frac{1}{\tan C}$$

$$\therefore \frac{Q}{\tan B} = \frac{R}{\tan C}$$

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, $\dfrac{P}{\tan A} = \dfrac{Q}{\tan B}$

$\therefore \dfrac{P}{\tan A} = \dfrac{Q}{\tan B} = \dfrac{R}{\tan C}$ .... (i)

$P \cot A = Q \cot B = R \cot C$ .... (ii)

বা, $P. \dfrac{\cos A}{\sin B} = Q. \dfrac{\cos B}{\sin B} = R. \dfrac{\cos C}{\sin C}$

বা, $P * \dfrac{(b^2+c^2-a^2)/2bc}{a/2r} = Q * \dfrac{(c^2+a^2-b^2)/2ca}{b/2r} = R * \dfrac{(a^2+b^2-c^2)/2ab}{c/2r}$;

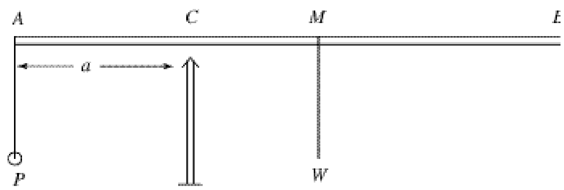
(যেহেতু $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$)

বা, $\dfrac{P(b^2+c^2-a^2)}{2abc} = \dfrac{Q(c^2+a^2-b^2)}{2abc} = \dfrac{R(a^2+b^2-c^2)}{2abc}$

$\therefore P(b^2+c^2-a^2) = Q(c^2+a^2-b^2) = R(a^2+b^2-c^2)$ .... (iii)

উদাহরণ 8 ঃ একটি সমরূপ তক্তার এক প্রান্তে P ওজনের একটি বস্তু স্থাপন করলে, তা হতে a দূরে একটি খুঁটির উপর তক্তাটি অনুভূমিকভাবে সুস্থিত থাকে এবং P এর পরিবর্তে Q ওজনের বস্তু স্থাপন করলে, তা হতে b দূরে একটি খুঁটির উপর তক্তাটি সুস্থিত থাকে। দেখান যে, তক্তার ওজন $\dfrac{Pa-Qb}{b-a}$ এবং তক্তার দৈর্ঘ্য $\dfrac{2ab(P-Q)}{Pa-Qb}$

সমাধান ঃ মনে করুন, সমরূপ তক্তা AB এর দৈর্ঘ্য = $2l$ ও ওজন = W। তক্তাটি সমরূপ, তাই তার ওজন মধ্যবিন্দু M এ ক্রিয়া করে।



চিত্র: ৮.১.১০

A প্রান্তে P ওজনের বস্তুটি ঝুলানোর পর A হতে a দূরে C বিন্দুতে স্থাপিত খুঁটি ভারসাম্য সৃষ্টি করে। এক্ষেত্রে P ও W এর লব্ধিকে খুঁটি প্রতিক্রিয়া নিষ্ক্রিয় করে। তাই C হচ্ছে P ও W এর লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু।

$AM = BM = l$, $AC = a$, তাই $CM = l-a$

$W. CM = P.AC$ বা, $W(l-a) = Pa$ .... (i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, P এর স্থলে Q ও a এর স্থলে b হবে।

তাই, অনুরূপভাবে $W(l-b) = Qb$ ....(ii)

(i) ও (ii) হতে, $\dfrac{l-a}{l-b} = \dfrac{Pa}{Qb}$

বা, $Pa(l-b) = Qb(l-a)$

বা, $P\,al - P\,ab = Q\,bl - Q\,ab$ বা, $l(Pa-Qb) = ab\,(P-Q)$

বা, $l = \dfrac{ab(P-Q)}{Pa-Qb}$

$\therefore$ তক্তার দৈর্ঘ্য = $2l = \dfrac{2ab\,(P-Q)}{Pa-Qb}$

আবার, (i) হতে (ii) বিয়োগ করে পাই–

$$W(b\text{-}a) = Pa\text{-}Qb$$

$$\therefore \text{ তক্তার ওজন } = W = \frac{Pa\text{-}Qb}{b\text{-}a}$$

উদাহরণ 9 ঃ দেখান যে, একটি ত্রিভুজের তিন কৌণিক বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি সমান ও সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি ত্রিভুজের ভারকেন্দ্রগামী।

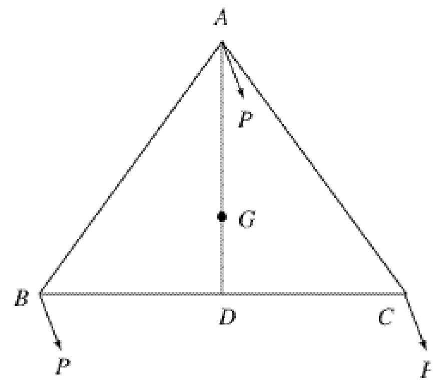
সমাধান ঃ মনে করুন, ABC ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু তিনটিতে P মানের তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত।

B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি $P+P=2P$, BC এর D বিন্দুতে ক্রিয়া করলে,

$$\frac{BD}{CD} = \frac{P}{P} = 1$$

বা, $BD = CD$

$\therefore$ D হচ্ছে BC এর মধ্যবিন্দু। তাই AD মধ্যমা।



চিত্র: ৮.১.১১

A বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও D বিন্দুতে ক্রিয়ারত $2P$ সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি অর্থাৎ আদি বলত্রয়ের লব্ধি = $P+2P = 3P$, AD এর G বিন্দুতে ক্রিয়া করলে, $\frac{DG}{AG} = \frac{P}{2P} = \frac{1}{2}$ বা, $DG : AG = 1 : 2$

$\therefore$ লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু G, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

অনুশীলনী– ৮.১

1. 100 পাউন্ড ওজনের 16 ফুট দীর্ঘ একটি সমরূপ তক্তা দুইজন লোক মাথায় করে বহন করে। একজনের এক প্রান্ত হতে 2 ফুট দূরে এবং অপরজন অপর প্রান্ত হতে 3 ফুট দূরে থাকলে, প্রত্যেকে কি পরিমাণ ওজন বহন করবে তা আলোচনা করুন।
2. 10 ফুট দীর্ঘ একটি ভারী সমরূপ বীম AC, দুটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে সুস্থিত আছে। একটি খুঁটি বীমটির এক প্রান্তে এবং অপরটি উক্ত প্রান্ত হতে 7 ফুট দূরে অবস্থিত। বীমটিকে না উল্টিয়ে দ্বিতীয় প্রান্তে যদি সর্বোচ্চ 20 পাউন্ড ওজন ঝুলানো যায়,তবে বীমটির ওজন নির্ণয় করুন।
3. দুটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে কার্যরত। এদের লব্ধির মান 16 পাউন্ড ওজন এবং এটি A হতে 3 ফুট দূরে C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। P=10 পাউন্ড ওজন হলে Q বলের মান ও A হতে B বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করুন।
4. 8 ফুট দীর্ঘ একটি হাল্কা দন্ডের একপ্রান্তে 14 পাউন্ড ওজন এবং অপর প্রান্তে 42পাউন্ড ওজন বাঁধা আছে। দন্ডটিকে অনুভূমিকভাবে বহন করতে হলে, একজন লোক কোথায় তার হাত স্থাপন করবে?
5. 7 ফুট দীর্ঘ ও 20 পাউন্ড ওজন বিশিষ্ট একটা সমরূপ দন্ডের এক প্রান্তে একজন পুরুষ এবং অপর প্রান্তে একজন বালক দন্ডটার সাহায্যে 70 পাউন্ড ওজনের একটা বস্তুকে বহন করে। বস্তুটাকে কোথায় স্থাপন করলে, লোকটি বালকের দ্বিগুণ পরিমাণ ওজন বহন করবে?
6. একটা ভারী সুষম দন্ডের এক প্রান্তে 10 পাউন্ড ওজন ঝুলিয়ে উক্ত প্রান্ত হতে 3 ফুট দূরে একটা খুঁটি উপর একে আনুভূমিকভাবে সুস্থিত রাখা হয়েছে। খুঁটির উপর চাপের পরিমাণ 50 পাউন্ড ওজন হলে দন্ডটির ওজন ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

7. 12 পাউন্ড ওজন এবং 8 পাউন্ড ওজনের দুটি সদৃশ সমান্তরাল বল কোন জড় বস্তুর যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়া করছে। বল দুটি অবস্থান বিনিময় করা হলে, এদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর কতদূর সরে যাবে?
8. P ও Q দুটি সদৃশ সমান্তরাল বল। P বলের ক্রিয়ারেখাকে এর সমান্তরাল বরাবর Q বলের দিকে x দূরত্বে সরানো হলে, এদের লব্ধি d দূরত্বে সরে যায়। প্রমাণ করুন যে, $d=\frac{Px}{P+Q}$.
9. $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 2 ফুট এবং AB, BC, AD, DC বাহু বরাবর যথাক্রমে 1, 2, 3, 4 সমানুপাতিক চারটি চল ক্রিয়া করছে। এদের লব্ধিমান ও ক্রিয়ারেখা নির্ণয় করুন।
10. 20 ফুট দীর্ঘ এবং W পাউন্ড ওজন বিশিষ্ট একটি সমরূপ দন্ড C ফুট দূরত্বে অবস্থিত দুটি খুঁটির উপর আনুভূমিকভাবে সুস্থিত আছে। প্রত্যেকটি খুঁটি সর্বোচ্চ P পাউন্ড ওজনের চাপ সহ্য করতে পারে। সাম্যাবস্থায় যে কোন খুঁটি হতে বাহিরের দিকে দন্ডের বাড়তি অংশের সর্বোচ্চ দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।
11. ΔABC এর A,B,C বিন্দুতে যথাক্রমে P,Q,R সদৃশ সমান্তরাল বলত্রয় ক্রিয়ারত। দেখান যে, $P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$
12. ΔABC এর A,B,C বিন্দুতে যথাক্রমে P,Q,R সদৃশ সমান্তরাল বলত্রয় ক্রিয়ারত। P,Q,R যথাক্রমে BC, CA, AB এর সমানুপাতিক হলে, প্রমাণ করুন যে, এদের লব্ধি অন্তঃকেন্দ্রগামী হবে।
13. P,Q,R তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল কোন ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলোতে ক্রিয়ারত। যদি বলগুলোর লব্ধি ত্রিভুজটির ভারকেন্দ্রগামী হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $P=Q=R$।

পাঠ-২
দুটি অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয়

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

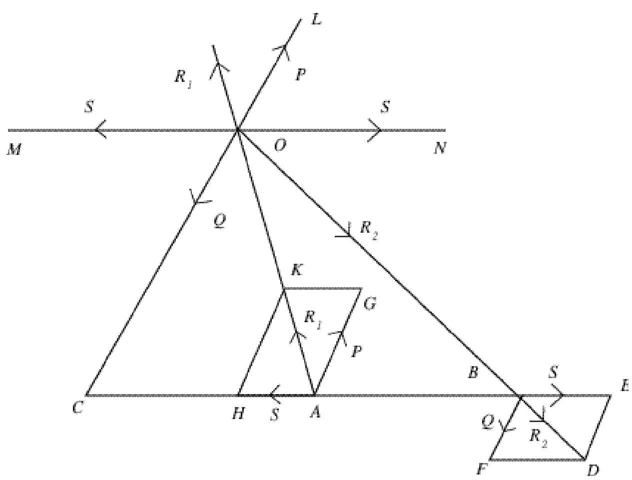
- দুটি অসদৃশ ও অসমান সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় করতে পারবেন,
- উপরোক্ত তত্ত্ব প্রয়োগে সমান্তরাল বল সম্পর্কীয় সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

দুটি অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয়

মনে করুন, কোন জড় বস্তুর A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে P ও Q $(P>Q)$ অসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধি নির্ণয় করতে হবে।

লব্ধি নির্ণয়ের সুবিধার্থে A বিন্দুতে BA বরাবর এবং B বিন্দুতে AB বরাবর S মানের দুটি বল প্রয়োগ করুন। এরা সমান ও বিপরীতমুখী বলে পরস্পরকে নিষ্ক্রিয় করবে। তাই P ও Q এর লব্ধির উপর এদের কোন প্রভাব পড়বে না।

A বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও S বল নির্দেশক (দিকে ও মানে) রেখাকে বাহু নিয়ে $AHKG$ সামান্তরিক এবং B বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও S বল নির্দেশক রেখাকে বাহু নিয়ে $BEDF$ সামান্তরিক অঙ্কন করুন।



চিত্র: ৮.২.১

এক্ষেত্রে $P = \overset{\varnothing}{AG}$, $Q = \overset{\varnothing}{BF}$ ও $S = \overset{\varnothing}{AH}$, তাহলে $-S = \overset{\varnothing}{BE}$ এবং A বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও S বলদ্বয়ের লব্ধি $R_1 = \overset{\varnothing}{AK}$ ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও S বলদ্বয়ের লব্ধি $R_2 = \overset{\varnothing}{BD}$ ।

R_1 ও R_2 এর ক্রিয়ারেখাকে বর্ধিত করায় এরা O বিন্দুতে মিলিত হলো। AB এর সমান্তরাল MON এবং HK এর সমান্তরাল COL রেখা আঁকুন।

R_1 এর ক্রিয়াবিন্দু A এর পরিবর্তে O বিবেচনা করে R_1 কে বিভাজন করলে, OM বরাবর S ও COL বরাবর P উপাংশ পাওয়া যায় এবং R_2 এর ক্রিয়াবিন্দু B এর পরিবর্তে O বিবেচনা করে R_2 কে বিভাজন করলে, ON বরাবর S ও LOC বরাবর Q উপাংশ পাওয়া যায়।

O বিন্দুতে ক্রিয়ারত S মানের উপাংশদ্বয় সমান ও বিপরীত বলে পরস্পরকে নিষ্ক্রিয় করে এবং P ও Q $(P>Q)$ বিপরীতমুখী উপাংশদ্বয় অবশিষ্ট থাকে। অতএব, লব্ধি $R=P-Q$, যা COL বরাবর ক্রিয়ারত।

এবার R এর ক্রিয়াবিন্দু O এর পরিবর্তে BA রেখার বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত C বিন্দু বিবেচনা করুন এবং A ও B সাপেক্ষে C এর অবস্থান নির্ণয় করুন।

$\because CO \parallel HK$, $\therefore \Delta AGK$ ও ΔACO সদৃশ $\therefore \dfrac{AC}{AH} = \dfrac{CO}{HK} = \dfrac{CO}{AG}$

বা, $\dfrac{CO}{AC} = \dfrac{AG}{AH} = \dfrac{P}{S}$

$\therefore P.AC = S.CO$ .... *(i)*

আবার $CO||ED$, তাই $\angle COB$ = একান্তর $\angle EDB$ ও $\angle OCB$ = একান্তর $\angle DEB$ অতএব, ΔBCO ও ΔBED সদৃশ।

$\therefore \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{CO}{DE} = \dfrac{CO}{BF}$

বা, $\dfrac{CO}{BC} = \dfrac{BF}{BE} = \dfrac{Q}{S}$

$\therefore Q.\ BC = S.CO$ .... (ii)

(i) ও *(ii)* হতে পাই,

$P.AC = Q.BC$

বা, $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{BC}{AC}$

অর্থাৎ C বিন্দু AB রেখাকে তার প্রান্তীয় বলদ্বয়ের ব্যস্ত অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে, কারণ C বিন্দু AB রেখার বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত।

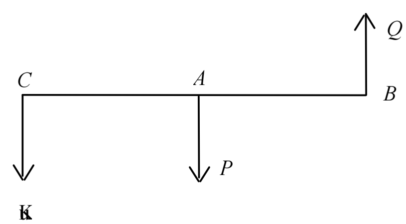
- ❒ এক্ষেত্রে লব্ধিটি বৃহত্তর বল P এর সমান্তরাল ও সমমুখী এবং লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C, BA এর বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত।
- ❒ এক্ষেত্রে $P=Q$ বা, $P-Q = 0$ হলে, লব্ধি $R=0$ হবে। তাই বস্তুটির সরলরৈখিক গতি সৃষ্টি হবে না। তবে ঘূর্ণন গতির সৃষ্টি হবে, যা ভ্রামক অংশে আলোচিত হবে।

উদাহরণ 1 ঃ P ও Q $(P>Q)$ অসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় যথাক্রমে পরস্পর 6 ফুট ব্যবধানে অবস্থিত A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত। এদের লব্ধি BA রেখার বর্ধিতাংশের উপর A হতে 6 ফুট দূরে C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। $P=6$ পাউন্ড ওজন হলে, Q এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ P ও Q $(P>Q)$ অসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় পরস্পর যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত; এদের লব্ধি BA এর বর্ধিতাংশের C বিন্দুতে ক্রিয়ারত। তাই-

$\dfrac{Q}{P} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AC}{AC+AB} = \dfrac{6}{6+6} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore Q = \dfrac{1}{2}P = \dfrac{1}{2}.\ 6$ পাউন্ড ওজন = 3 পাউন্ড ওজন।

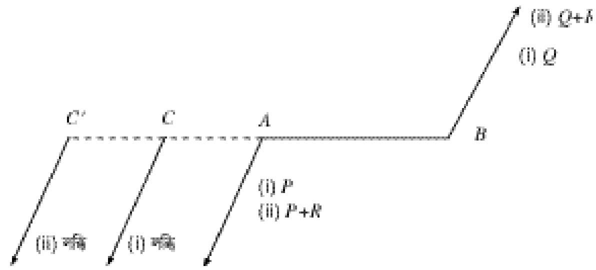


চিত্র ৮.২.২

উদাহরণ 2ঃ A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে P ও Q $(P<Q)$ অসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় ক্রিয়ারত। উভয় বলকে R পরিমাণে বৃদ্ধি করায় লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু BA বরাবর d দূর সরে যায়। প্রমাণ করুন যে, $d = \dfrac{R}{P-Q}\ .\ AB$

সমাধান ঃ A বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q অসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি BA এর বহিঃস্থ C বিন্দুতে ক্রিয়া করলে,

$\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{Q}{P}$



চিত্র: ৮.২.৩

বা, $\dfrac{AC}{BC\text{-}AC} = \dfrac{Q}{P\text{-}Q}$

বা, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{Q}{P\text{-}Q}$

$\therefore AC = \dfrac{Q}{P\text{-}Q} \, . \, AB \ldots \text{(i)}$

আবার A বিন্দুতে $P+R$ ও B বিন্দুতে $Q+R$ ক্রিয়ারত অবস্থায় এদের লব্ধি BA এর বহিঃস্থ C' বিন্দুতে ক্রিয়া করলে,

$\dfrac{AC'}{BC'} = \dfrac{Q+R}{P+R}$

বা, $\dfrac{AC'}{BC' - AC'} = \dfrac{Q+R}{P\text{-}Q}$ বা, $\dfrac{AC'}{AB} = \dfrac{Q+R}{P\text{-}Q}$

$\therefore AC' = \dfrac{Q+R}{P\text{-}Q} \, . \, AB$

$= \dfrac{Q}{P\text{-}Q} \, .AB + \dfrac{R}{P\text{-}Q} \, . \, AB \ldots\ldots\ldots (ii)$

এখন, $d = CC'$

$= AC' - AC$

$= \dfrac{R}{P\text{-}Q} \, . \, AB$ [(i) ও (ii) হতে]

অনুশীলনী–৮.২

1. দুটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি 2 পাউন্ড ওজন, এদের ক্রিয়াবিন্দু হতে 6 ইঞ্চি ও 8 ইঞ্চি দূরত্বে কার্যরত। বলদুটির মান নির্ণয় করুন।
2. A বিন্দুতে স্থাপিত একটা কিলকের নিচে দিয়ে এবং B বিন্দুতে স্থাপিত একটা কিলকের উপর দিয়ে একটা সরল শক্ত হাল্কা দন্ড ABC অনুভূমিকভাবে স্থির আছে। AB=3 ফুট এবং AC=5 ফুট হলে, C বিন্দুতে ঝুলন্ত W ওজনের জন্য কিলক দুটিতে প্রতিক্রিয়া নির্ণয় করুন।
3. 10 ফুট দীর্ঘ ও 50 পাউন্ড ওজনের AB সমরূপ তক্তাটি A বিন্দুতে একটা এবং B বিন্দু হতে 2 ফুট ভিতরে অপর একটা অবলম্বনের উপর সুস্থিত আছে। 160 পাঃ ওজনের একটা লোক A হতে 3 ফুট দূরে তক্তাটির উপর দাঁড়ালে, অবলম্বনদ্বয়ের উপর চাপের পরিমাণ কত হবে?
4. দুটি অদৃশ সমান্তরাল বল P এবং Q যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়া করে। P,Q উভয় বলকেই R পরিমাণে বৃদ্ধি করা হলে, এদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু BA রেখা বরাবর x দূরত্বে সরে যায়। $P>Q$ হলে, দেখান যে, $x = \frac{R}{P-Q} \cdot AB$
5. P,Q দুটি সদৃশ সমান্তরাল বল কোন একটি বস্তুর উপর কার্যরত আছে। এদের ক্রিয়া রেখার সমান্তরাল বরাবর একই সমতলে পরস্পর b দূরত্বে S মানের দুটি সমান ও অসদৃশ সমান্তরাল বল প্রয়োগ করা হলে, এদের লব্ধি d দূরে সরে যায়। দেখান যে, $d = \frac{bS}{P+Q}$

পাঠ-৩
বলের ভ্রামকের ধারণা, ব্যাখ্যা ও তত্ত্বসমূহ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- বলের ভ্রামকের ধারণা পাবেন এবং তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- সমস্যা সমাধানে তত্ত্বসমূহ প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন।

বলের ভ্রামক বা মোমেন্ট

কোন জড় বস্তুকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে বা সরলরেখায় এমনভাবে আটকানো হল যেন বস্তুটি বিন্দু বা রেখাটির চতুর্দিকে ঘুরতে পারে। এবার ঐ বিন্দু বাদে অন্য কোন বিন্দুতে বা রেখার বহি:স্থ (রেখার বর্ধিতাংশের উপরিস্থিত কোন বিন্দুগামী নয়) কোন রেখা বরাবর বল প্রযুক্ত হলে, বিন্দু বা রেখাটির চতুর্দিকে বস্তুটির ঘুর্ণন সৃষ্টি হবে। সৃষ্ট ঘুর্ণন প্রবণতার পরিমাপকে ঐ বিন্দু বা রেখা সাপেক্ষে প্রযুক্ত বলের ভ্রামক বা মোমেন্ট বলা হয়। প্রযুক্ত বলটি যত বড় হবে, ঘূর্ণন প্রবণতা তত বেশি হবে। আবার নির্দিষ্ট বিন্দু বা রেখা হতে প্রযুক্ত বলের ক্রিয়ারেখার দূরত্ব যত বেশি হবে, ঘুর্ণন প্রবণতা তত বেশি হবে। তাই ভ্রামক প্রযুক্ত বল ও নির্দিষ্ট বিন্দু বা রেখা হতে প্রযুক্ত বলের ক্রিয়ারেখার দূরত্বের সমানুপাতিক। প্রযুক্ত বলটির ক্রিয়ারেখা নির্দিষ্ট বিন্দু বা রেখা দিয়ে অতিক্রম করলে, বস্তুটির ঘুর্ণন প্রবণতা সৃষ্টি হবে না অর্থাৎ প্রযুক্ত বলের ভ্রামক শূন্য হবে। প্রযুক্ত বল ও নির্দিষ্ট বিন্দু বা রেখা হতে বলটির ক্রিয়ারেখার লম্ব-দূরত্বের গুণফলই ঐ বিন্দু বা রেখা সাপেক্ষে প্রযুক্ত বলটির ভ্রামকের পরিমাপ নির্দেশ করে। সৃষ্ট ঘুর্ণন ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে হলে, ভ্রামক যোগবোধক এবং ঘড়ির কাটার দিকে হলে, ভ্রামক বিয়োগবোধক হবে। নির্দিষ্ট বিন্দু বা রেখা হতে প্রযুক্ত বলের ক্রিয়ারেখার লম্ব-দূরত্বকে মোমেন্টের বাহু বলা হয়।

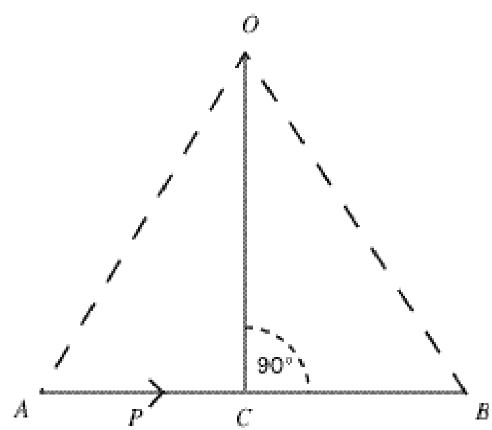
মনে করুন, কোন জড় বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল P দিকে, মানে ও অবস্থানে AB দ্বারা সূচিত এবং O একটি স্থির বিন্দু; $OC \perp AB$.

O বিন্দু সাপেক্ষে অথবা O বিন্দুর চতুর্দিকে P বলের ভ্রামক $= P*OC = AB*OC$

[$\because AB$ এর দৈর্ঘ্য P বলের মান নির্দেশ করে]

$= 2.\frac{1}{2}\ AB * OC = 2\Delta OAB$

অতএব, কোন নির্দিষ্ট বিন্দু সাপেক্ষে কোন বলের ভ্রামকের পরিমাপ ঐ বিন্দু ও বল নির্দেশক সরলরেখা প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা দ্বারা সৃষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের পরিমাপের সমান।



চিত্র: ৮.৩.১

অনুসিদ্ধান্ত ১ ঃ $P = K.\frac{\varnothing}{AB}$ হলে, ভ্রামক $= K.AB*OC = 2K.\frac{1}{2}AB*OC = 2K.\ \Delta OAB$

বলের যে ক্ষমতার ফলে বস্তু কোন নির্দিষ্ট বিন্দু বা রেখার চারিদিকে আবর্তিত হয় বা ঘুরতে থাকে তাকে ঐ বিন্দু বা রেখার সাপেক্ষে বলের ভ্রামক বা মোমেন্ট বলা হয়।

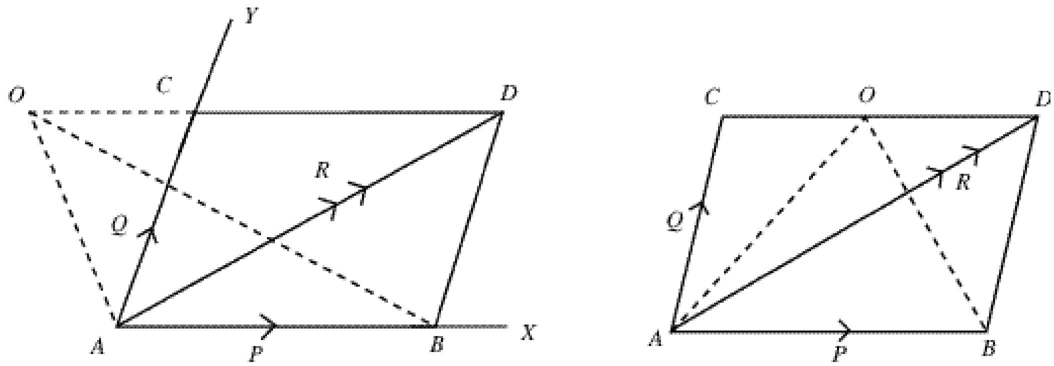
ভেরিগ্ননের উপপাদ্য (Varignon's theorem)

দুটি বলের সাথে একই সমতলে অবস্থিত কোন বিন্দুর চতুর্দিকে তাদের মোমেন্টের বীজগাণিতিক যোগফল, ঐ বিন্দুর চতুর্দিকে বল দুটির লব্ধির ভ্রামকের সমান হবে।

দুইটি অবস্থার সৃস্টি হতে পারে-

প্রথম অবস্থা : একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি বলের ক্ষেত্রে

মনে করুন, P ও Q বল দুটি যথাক্রমে AX ও AY বরাবর ক্রিয়ারত এবং তাদের সমতলে O যে কোন বিন্দু। AX এর সমান্তরাল O বিন্দুগামী সরলরেখা AY কে C বিন্দুতে এবং P ও Q এর লব্ধি R এর ক্রিয়ারেখাকে D বিন্দুতে ছেদ করে। $ABCD$ সামান্তরিক পূর্ণ করুন।



১ম চিত্র ২য় চিত্র

চিত্র ৮.৩.২

$Q = \overset{\varnothing}{\mathrm{AC}}$ হলে $P = \overset{\varnothing}{\mathrm{AB}}$ ও $R = \overset{\varnothing}{\mathrm{AD}}$ হবে।

১ম চিত্রে, P, Q ও R এর ভ্রামক যোগবোধক এবং ২য় চিত্রে, P ও R এর ভ্রামক যোগবোধক এবং Q এর ভ্রামক বিয়োগবোধক।

১ম চিত্রে, O বিন্দুর সাপেক্ষে

P এর ভ্রামক + Q এর ভ্রামক

$= 2\,\Delta OAB + 2\,\Delta OAC = 2(\Delta ABD + \Delta OAC)$; [একই ভূমি AB এবং উচ্চতা সমান, তাই $\Delta OAB = \Delta ABD$]

$= 2(\Delta OAC + \Delta ACD)$; [কর্ণ সামান্তরিককে সমদ্বিখন্ডিত করে, তাই $\Delta ABD = \Delta ACD$]

$= 2\Delta\, OAD$

$= O$ বিন্দুর সাপেক্ষে R এর ভ্রামক।

২য় চিত্রে, O বিন্দুর সাপেক্ষে

P এর ভ্রামক + Q এর ভ্রামক

$= 2\Delta OAB + (-2\Delta OAC)$

$= 2(\Delta OAB - \Delta OAC)$

$= 2(\Delta ABD - \Delta OAC)$

$= 2(\Delta ACD - \Delta OAC)$

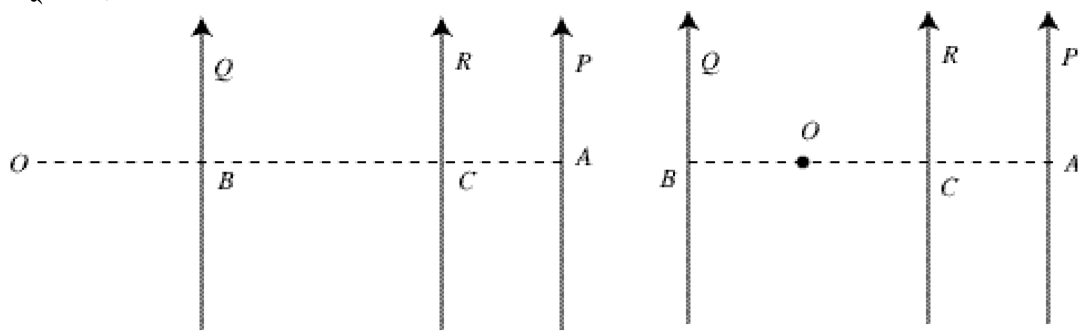
$= 2\,\Delta\, OAD$

$= O$ বিন্দুর সাপেক্ষে R এর ভ্রামক।

দ্বিতীয় অবস্থা : যখন বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল

(i) দুটি সদৃশ সমান্তরাল বলের ক্ষেত্রে

মনে করুন, P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি R এবং তাদের সমতলে O যে কোন বিন্দু।
O বিন্দু হতে সমান্তরাল বলগুলোর ক্রিয়ারেখার উপর অঙ্কিত লম্ব P, Q ও R এর ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।



১ম চিত্র ২য় চিত্র

চিত্র ৮.৩.৩

১ম চিত্রে, O বিন্দুর সাপেক্ষে P এর ভ্রামক + Q এর ভ্রামক

$= P.OA + Q.OB$

$= P\ (OC+AC) + Q.(OC-BC)$

$= (P+Q).\ OC+P.AC-Q.BC$

$= R.OC$ [P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি R।

তাই $R=P+Q$ এবং $P.AC = Q.BC$ বা $P.AC-Q.BC=0$]

$=O$ বিন্দুর সাপেক্ষে R এর ভ্রামক

২য় চিত্রে, O বিন্দুর সাপেক্ষে

P এর ভ্রামক + Q এর ভ্রামক

$= P.OA + (-Q.OB)$

$= P.OA - Q.OB$

$= P(OC+AC) - Q(BC-OC)$

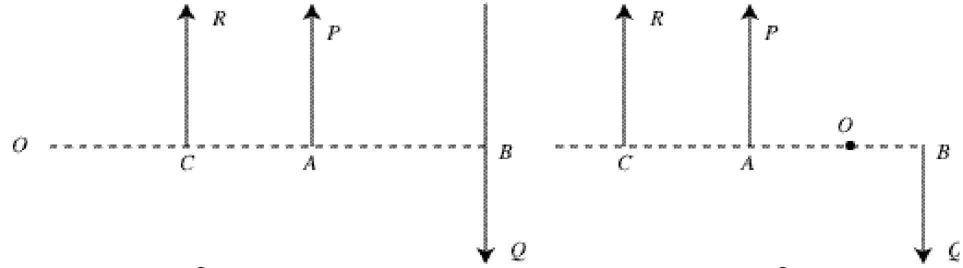
$= (P+Q).OC+P.AC-Q.BC$

$= R.OC$

$= O$ বিন্দুর সাপেক্ষে R এর ভ্রামক।

(ii) দুটি অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বলের ক্ষেত্রে

মনে করুন, PওQ $(P>Q)$ অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি R এবং তাদের সমতলে O যে কোন বিন্দু।
O বিন্দু হতে সমান্তরাল বলগুলোর ক্রিয়ারেখার উপর অংকিত লম্ব P, Q ও R এর ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।



১ম চিত্র ২য় চিত্র

চিত্র ৮.৩.৪

১ম চিত্রে O বিন্দুর সাপেক্ষে P এর ভ্রামক + Q এর ভ্রামক

$= P.OA + (-Q.OB) = P.OA-Q.OB$
$= P(OC+AC) - Q(OC+BC)$
$= (P-Q) . OC + P.AC- Q.BC$
$= R.OC$ [P ও Q $(P>Q)$ অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি R। তাই $R=P-Q$ এবং $P.AC=Q.BC$ বা, $P.AC-Q.BC=0$]

$=$ O বিন্দুর সাপেক্ষে R -এর ভ্রামক।

২য় চিত্রে, O বিন্দুর সাপেক্ষে

P এর ভ্রামক + Q-এর ভ্রামক

$= -P.OA + Q.OB$
$= - P(OC-AC) - Q(BC-OC)$
$= - (P-Q).OC+ P.AC-Q.BC$
$= -R.OC$
$=$ O বিন্দুর সাপেক্ষে R এর ভ্রামক।

ভ্রামকের সাধারণ সূত্র (ভেরিগ্ননের সূত্রের সম্প্রসারণ)

কোন স্থির বস্তুর উপর ক্রিয়ারত যে কোন সংখ্যক একতলীয় বলের একটি লব্ধি থাকলে, তাদের সমতলে যে কোন বিন্দুর চতুর্দিকে ঐ বলগুলোর ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল ঐ বিন্দুর চতুর্দিকে তাদের লব্ধির ভ্রামকের সমান হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ১ : যে কোন সংখ্যক একতলীয় বলের লব্ধির ক্রিয়ারেখাস্থ যে কোন বিন্দুর চতুর্দিকে তাদের ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল শূণ্য হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ২ : কতকগুলো একতলীয় বলের সমতলে যে কোন বিন্দুর চতুর্দিকে তাদের ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল শূণ্য হলে, বলগুলো ভারসাম্য রক্ষা করবে অথবা তাদের লব্ধিটি ঐ বিন্দুর মধ্য দিয়ে যাবে।

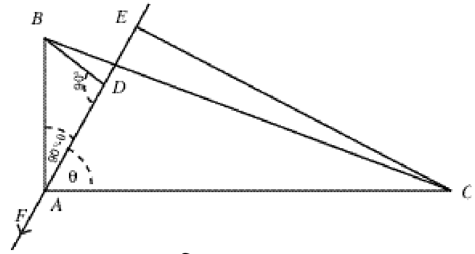
অনুসিদ্ধান্ত ৩ : কতকগুলো একতলীয় বল ভারসাম্য সৃষ্টি করলে, তাদের সমতলে যে কোন বিন্দুর চতুর্দিকে বলগুলোর ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল শূণ্য হবে, কিন্তু এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা সব সময় সত্য নয়।

অনুসিদ্ধান্ত ৪ : তিনটি অসমরেখ বিন্দুর চতুর্দিকে কতকগুলো একতলীয় বলের ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল পৃথক পৃথকভাবে শূণ্য হলে, ঐ বলগুলো ভারসাম্য সৃষ্টি করবে।

উদাহরণ 1 ঃ ABC সমকোণী ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 13, 12 ও 5 একক। A, B ও C বিন্দুর সাপেক্ষে F বলের ভ্রামক যথাক্রমে 0, -25 ও 144 একক হলে, F বলের মান ও দিক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ABC ত্রিভুজের □BAC=90°।

যেহেতু A বিন্দুর সাপেক্ষে F এর ভ্রামক শূন্য, সেহেতু F বলের ক্রিয়ারেখা A বিন্দুগামী হবে। B ও C বিন্দুর সাপেক্ষে F বলের ভ্রামক বিপরীত চিহ্নযুক্ত তাই বিন্দুদ্বয় F বলের ক্রিয়ারেখার বিপরীত পাশে অবস্থিত হবে।



চিত্র: ৮.৩.৫

F বলের ক্রিয়ারেখার উপর BD ও CE লম্ব অঙ্কন করুন। ধরুন, □CAD=θ

এখন $-F.\ BD = B$ বিন্দু সাপেক্ষে F বলের ভ্রামক = -25

বা, $F.BD = 25$

বা, $25 = F.AB.\ \dfrac{BD}{AB}$

$= F.5.\ \sin(90°-\theta) = 5\ F\cos\theta$

$\therefore\ F\cos\theta = 5$ ...(i)

আবার $144 = C$ বিন্দু সাপেক্ষে F বলের ভ্রামক

$= F.CE = F.AC.\ \dfrac{CE}{AC}$

$= F.\ 12.\ \sin\theta$

$\therefore\ F\sin\theta = 12$...(ii)

(i) ও (ii) হতে,

$F^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = 5^2+12^2=25+144=169$

বা, $F^2=13^2$

$\therefore\ F = 13$ একক

এবং $\tan\theta = \dfrac{F\sin\theta}{F\cos\theta} = \dfrac{12}{5} = \tan B$, ABC সমকোণী ত্রিভুজ হতে।

$\therefore\ \theta =$ □B

$\because$ □$A = 90°$

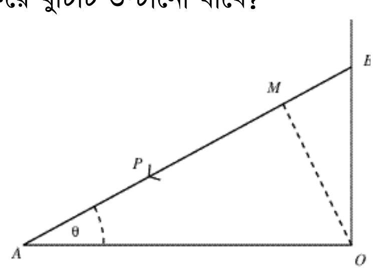
$\therefore$ □B+□$C = 90°$

বা, θ+□$C = 90°$

তাই CE রেখা CB রেখার সাথে মিশে যাবে এবং F বলের ক্রিয়ারেখা BC বাহুর উপর লম্ব হবে।

উদাহরণ 2 ঃ 20 ফুট দীর্ঘ একটি রশির এক প্রান্ত একটি খাড়া খুঁটিতে বেঁধে একজন লোক রাশিটির অপর প্রান্ত ধরে টানছে। খুঁটিটির কোন স্থানে বাঁধলে সবচেয়ে কম বল প্রয়োগ করে খুঁটিটি উল্টানো যাবে?

সমাধান ঃ মনে করুন, খুঁটিটির B বিন্দুতে রশিটি বেধে রশিটির A প্রান্তে রশি বরাবর লোকটি P বল প্রয়োগ করছে। ধরুন, খুঁটিটির পাদবিন্দু O, AB এর উপর OM লম্ব এবং □OAB=θ।



চিত্র: ৮.৩.৬

O বিন্দু সাপেক্ষে P বলের ভ্রামক=$P.OM$

$= P.\dfrac{OM}{OA}\ .\ \dfrac{OA}{AB}\ .\ AB$

$= P.\sin\theta.\ \cos\theta.\ 20 = 10P.\ 2\sin\theta\cos\theta = 10P\sin 2\theta$

যেহেতু P ধ্রুবক, সেহেতু বৃহত্তম ভ্রামকের জন্য $\sin 2\theta$ এর মান বৃহত্তম হতে হবে অর্থাৎ $\sin 2\theta = 1 = \sin 90°$

বা, $2\theta = 90°$

বা, $\theta = 45°$ হতে হবে।

এ অবস্থায় $OB = AB.\dfrac{OB}{AB}$

$= 20.\ \sin 45°$

$= 20.\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= 10\sqrt{2}$

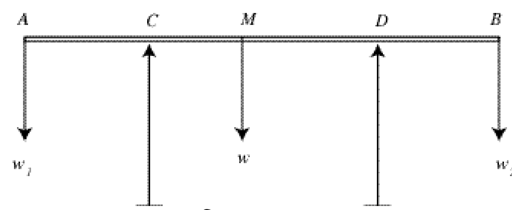
অতএব খুঁটিটির $10\sqrt{2}$ ফুট উঁচুতে রশিটি বাঁধতে হবে।

উদাহরণ 3 ঃ পরস্পর b ব্যবধানে স্থাপিত দুটি খাড়া খুঁটির উপর $2a$ দীর্ঘ ও w ওজন বিশিষ্ট একটি সমরূপ তক্তা অনুভূমিকভাবে স্থাপিত আছে। তক্তাটি না উল্টিয়ে দুই প্রান্তে পর্যায়ক্রমে সর্বোচ্চ w_1 ও w_2 ওজন ঝুলানো যায়। দেখান যে, $\dfrac{w_1}{w+w_1} + \dfrac{w_2}{w+w_2} = \dfrac{b}{a}$

সমাধান ঃ সমরূপ তক্তা $AB = 2a$ এর মধ্যবিন্দু M তে w ক্রিয়ারত। ধরুন C ও D খুঁটিদ্বয়ের অবস্থান।

তাহলে $CD=b$ ও $AM=BM=a$

A বিন্দুতে সর্বোচ্চ ওজন w_1 ঝুলানো অবস্থায় D বিন্দুতে খুঁটির উপর কোন চাপ থাকবে না এবং C বিন্দু সাপেক্ষে w_1 ও w এর ভ্রামক সমান ও বিপরীতমুখী হবে।



চিত্র: ৮.৩.৭

$\therefore w_1.AC = w.MC$

বা, $\dfrac{w_1}{w} = \dfrac{MC}{AC}$

বা, $\dfrac{w_1}{w+w} = \dfrac{MC}{AC+MC} = \dfrac{MC}{AM} = \dfrac{MC}{a}$ .... *(i)*

B বিন্দুতে সর্বোচ্চ ওজন ঝুলানো অবস্থায় C বিন্দুতে খুঁটির উপর কোন চাপ থাকবে না এবং D বিন্দু সাপেক্ষে w_2 ও w এর ভ্রামক সমানও বিপরীতমুখী হবে।

$\therefore w_2.\ BD = w.MD$

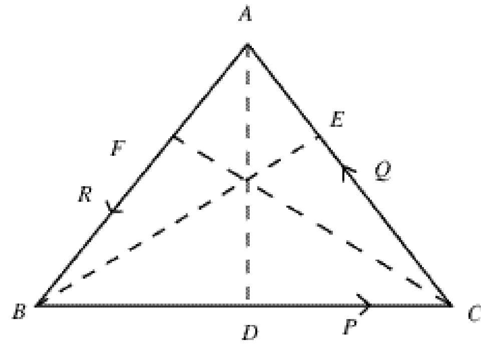
বা, $\dfrac{w_2}{w} = \dfrac{MD}{BD}$

বা, $\dfrac{w_2}{w+w_2} = \dfrac{MD}{BD+MD} = \dfrac{MD}{BM} = \dfrac{MD}{a}$ .... *(ii)*

(i) ও *(ii)* হতে পাই–

$$\frac{w_1}{w+w_1} + \frac{w_2}{w+w_2} = \frac{MC}{a} + \frac{MD}{a} = \frac{MC+MD}{a} = \frac{CD}{a} = \frac{b}{a}$$

উদাহরণ 4 ঃ ABC ত্রিভুজের বাহু BC, CA ও AB বরাবর যথাক্রমে P, Q ও R বলত্রয় ক্রিয়াশীল। যদি A, B ও C বিন্দু সাপেক্ষে বলত্রয়ের ভ্রামকের সমষ্টি যথাক্রমে L, M ও N হয়, তবে দেখাও যে, $P : Q : R = aL : bM : cN$



চিত্র: ৮.৩.৮

সমাধান ঃ ABC ত্রিভুজের বাহুর উপর AD, BE ও CF লম্ব টানুন।

$P.AD + Q.0 + R.0 = A$ বিন্দু সাপেক্ষে বলত্রয়ের ভ্রামকের সমষ্টি

বা, $P.AD = L$

$$\therefore P = \frac{L}{AD} = \frac{BC.L}{\frac{2BC.AD}{2}} = \frac{aL}{2\Delta ABC} \text{ .... (i)}$$

$P.0 + Q.BE + R.0 = B$ বিন্দু সাপেক্ষে বলত্রয়ের ভ্রামকের সমষ্টি

বা, $Q.BE = M$

$$\therefore Q = \frac{M}{BE} = \frac{CA.M}{\frac{2.CA.BE}{2}} = \frac{bM}{2\Delta ABC} \text{ .... (ii)}$$

$P.0 + Q.0 + R.CF = C$ বিন্দু সাপেক্ষে বলত্রয়ের ভ্রামকের সমষ্টি

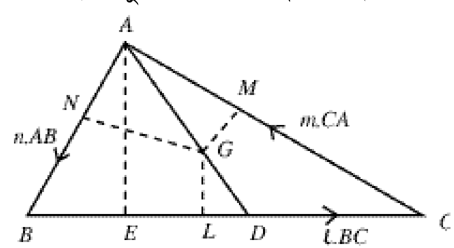
বা, $R.CF = N$

$$\therefore R = \frac{N}{CF} = \frac{AB.N}{\frac{2.AB.CF}{2}} = \frac{CN}{2\Delta ABC} \text{ .... (iii)}$$

$$\therefore P : Q : R = \frac{aL}{2\Delta ABC} : \frac{bM}{2\Delta ABC} : \frac{cN}{2\Delta ABC}$$

$$= aL : bM : cN$$

উদাহরণ 5 ঃ ABC ত্রিভুজের বাহু BC, CA ও AB বরাবর যথাক্রমে $l.BC$, $m.CA$ ও $n.AB$ মানের তিনটি বল ক্রিয়ারত। যদি $l + m + n = 0$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, বলত্রয়ের লব্ধি ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রগামী হবে।



চিত্র: ৮.৩.৯

সমাধান ঃ মনে করুন, ABC ত্রিভুজের মধ্যমা AD ও G ভরকেন্দ্র।

BC, CA, AB এর উপর যথাক্রমে GL, GM, GN লম্ব এবং BC এর উপর AE লম্ব টানুন।

BC এর উপর GL ও AE উভয়েই লম্ব বলে তারা পরস্পর সমান্তরাল।

$\therefore \frac{GL}{AE} = \frac{DG}{AD} = \frac{1}{3}$, কারণ G ভরকেন্দ্র।

বা, $GL = \frac{1}{3} AE = \frac{2}{3BC} \cdot \frac{BC.AE}{2} = \frac{2}{3BC} \cdot \Delta ABC$

অনুরূপভাবে, $GM = \frac{2}{3CA} \cdot \Delta ABC$

ও $GN = \frac{2}{3AB} \cdot \Delta ABC$

G বিন্দু সাপেক্ষে লব্ধির ভ্রামক = বলত্রয়ের ভ্রামকের বীজগণিতীয় সমষ্টি

$$= l.BC * GL + m.CA * GM + n.AB * GN$$

$$= l.BC * \frac{2}{3BC} \cdot \Delta ABC + m.CA * \frac{2}{3CA} \cdot \Delta ABC + n.AB * \frac{2}{3AB} \cdot \Delta ABC$$

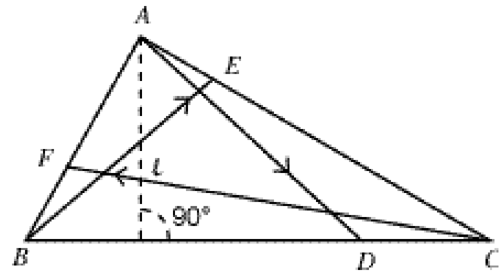
$$= \frac{2}{3} \Delta ABC (l + m + n)$$

$= \frac{2}{3}\ \Delta ABC * O$; যেহেতু $l+m+n = 0$

$= 0$

সুতরাং লব্ধির ক্রিয়ারেখা G বিন্দুগামী হবে।

উদাহরণ 6 ঃ ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর উপর D, E, F এমনভাবে অবস্থিত যেন, $\frac{BD}{CD} = \frac{CE}{AE} = \frac{AF}{BF}$ । প্রমাণ করুন যে, A, B, C বিন্দু সাপেক্ষে $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ বলত্রয়ের ভ্রামকের বীজগণিতীয় সমষ্টি পরস্পর সমান।



চিত্র: ৮.৩.১০

সমাধান ঃ $\frac{BD}{CD} = \frac{CE}{AE} = \frac{AF}{BF} = k$ (ধরুন)

মনে করুন, A হতে BC এর লম্ব দূরত্ব $= 1$

$$\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD} = \frac{\frac{1}{2} BD.1}{\frac{1}{2}. CD. 1}$$

$$= \frac{BD}{CD} = k$$

বা, $\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD+\Delta ABD} = \frac{k}{1+k}$ বা, $\frac{\Delta ABD}{\Delta ABC} = \frac{k}{1+k}$

$\therefore\ \Delta ABD = \frac{k}{1+k} . \Delta ABC$

তাই $\Delta ACD = \Delta ABC - \Delta ABD = \Delta ABC - \frac{k}{1+k}. \Delta ABC = \frac{1}{1+k}. \Delta ABC$

অনুরূপভাবে $\Delta BCE = \frac{k}{1+k}\ \Delta ABC, \Delta BAE = \frac{1}{1+k}. \Delta ABC$

$\Delta CAF = \frac{k}{1+k}\ \Delta ABC, \Delta CBF = \frac{1}{1+k}\ . \Delta ABC$

A বিন্দু সাপেক্ষে বলত্রয়ের ভ্রামকের বীজগণিতীয় সমষ্টি $= 0+2\Delta BAE-2\Delta CAF$

$= 2\left(\frac{1}{1+k}\Delta ABC - \frac{k}{1+k}\ \Delta ABC\right) = 2\ \frac{1-k}{1+k}. \Delta ABC$ .... (i)

B বিন্দু সাপেক্ষে বলত্রয়ের ভ্রামকের বীজগণিতীয় সমষ্টি $= -2\Delta ABD+0+2\Delta CBF$

$= 2\left(\frac{1}{1+k}\Delta ABC - \frac{k}{1+k}\ \Delta ABC\right) = 2\ \frac{1-k}{1+k}. \Delta ABC$ .... (ii)

C বিন্দু সাপেক্ষে বলত্রয়ের ভ্রামকের বীজগণিতীয় সমষ্টি $= 2\Delta ACD-2\Delta BCE+0$

$= 2\left(\frac{1}{1+k}\Delta ABC - \frac{k}{1+k}\ \Delta ABC\right) = 2\ \frac{1-k}{1+k}. \Delta ABC$ .... (iii)

(i), (ii), (iii) মতে প্রতীয়মান হয় যে, A, B, C বিন্দু সাপেক্ষে বলত্রয়ের ভ্রামকের বীজগতীয় সমষ্টি পর□র সমান।

উদাহরণ 7 ঃ W ওজন ও r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি চাকাকে তার কেন্দ্রে P বল অনুভূমিকভাবে প্রয়োগ করে h উচ্চতা বিশিষ্ট একটি প্রতিবন্ধকের উপর দিয়ে টেনে নিতে হবে। দেখান যে, ইহা সম্ভব হবে যদি $P>W \frac{\sqrt{2rh-h^2}}{r-h}$ হয়।

সমাধান ঃ মনে করুন, O চাকাটির কেন্দ্র, AB ভূ-রেখা, $BC=h$ প্রতিবন্ধক, $OA=BD=OC=$ ব্যাসার্ধ$=r$।

প্রযুক্ত বল P দ্বারা প্রতিবন্ধকের উপর দিয়ে চাকাটিকে টেনে নিতে হলে, C বিন্দু সাপেক্ষে P এর ভ্রামক W এর ভ্রামকের চেয়ে বেশি হতে হবে। সুতরাং

$P.CD>W.CE$; CE হচ্ছে OA এর উপর লম্ব।

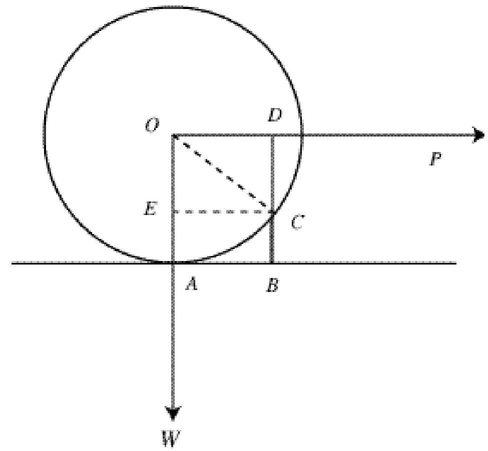
বা, $P>W.\dfrac{CE}{CD}$ .... (i)

এখন $CD=BD-BC=r-h$

এবং $OE=CD=r-h$

অতএব $CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{r^2-(r-h)^2}=\sqrt{2rh-h^2}$

সুতরাং (i) হতে পাই, $P>W\dfrac{\sqrt{2rh-h^2}}{r-h}$



চিত্র: ৮.৩.১১

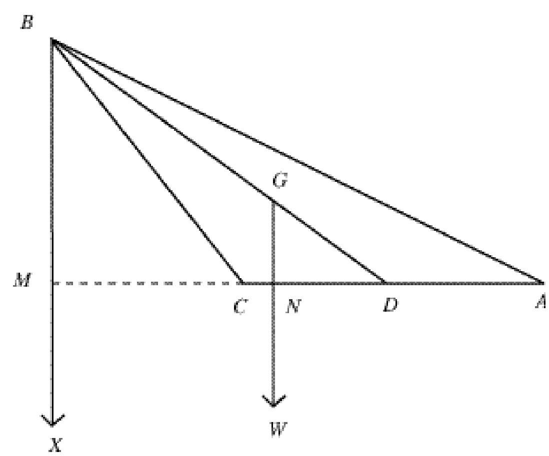
উদাহরণ ৪ ঃ W ওজন বিশিষ্ট ABC ত্রিভুজাকার পাতের □C স্থূল। পাতটি AC বাহুকে একটি অনুভূমিক টেবিলের সংস্পর্শে রেখে খাড়াভাবে সুস্থিত আছে। পাতটি না উল্টিয়ে B বিন্দুতে সর্বোচ্চ X ওজন ঝুলানো যায়। দেখান যে, $X=\dfrac{W}{3}\cdot\dfrac{a^2+3b^2-c^2}{c^2-a^2-b^2}$

সমাধান ঃ মনে করুন, ABC ত্রিভুজের মধ্যমা D ও ভরকেন্দ্র G। B বিন্দুতে X ওজন বলের ক্রিয়ারেখা AC কে M বিন্দুতে বহিঃস্থভাবে ছেদ করে এবং AC এর উপর GN লম্ব।

আমরা জানি যে, ত্রিভুজাকার সমরূপ পাতের ভারকেন্দ্র ও ত্রিভুজীয় ভরকেন্দ্র একই বিন্দু। তাই পাতটির ওজন W ভরকেন্দ্র G বিন্দুতে GN বরাবর ক্রিয়ারত।

ত্রিভুজাকার পাতটি না উল্টিয়ে সর্বোচ্চ X ওজন ঝুলানো আছে। এ অবস্থায় C বিন্দু সাপেক্ষে X ও W এর ভ্রামক সমান ও বিপরীতমুখী হবে। তাই

$X.CM=W.CN$ বা, $X=W\dfrac{CN}{CM}$ .... (i)



চিত্র: ৮.৩.১২

এখন $CM=BC.\dfrac{CM}{BC}=a\cos□BCM=a\cos(180°-C)=-a\cos C$

যেহেতু GN ও BM সমান্তরাল, সেহেতু $\dfrac{DN}{DM}=\dfrac{DG}{AD}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore DN=\dfrac{1}{3}DM$

$CN=CD-DN=CD-\dfrac{1}{3}DM=CD-\dfrac{1}{3}(CD+CM)=\dfrac{1}{3}(2CD-CM)$

$=\dfrac{1}{3}(AC-CM)=\dfrac{1}{3}\{b-(-a\cos C)\}=\dfrac{1}{3}(b+a\cos C)$ .....(ii)

(i) ও (ii) হতে

$$X = W.\frac{\frac{1}{3}(b+a\cos C)}{-a\cos C} = \frac{W}{3}\left(-\frac{b}{a\cos C}-1\right)$$

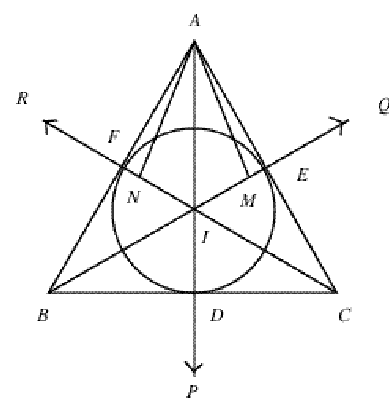
$$=\frac{W}{3}\left(\frac{-b}{a.\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}-1\right)$$

$$=\frac{W}{3}\left(\frac{-2b^2}{a^2+b^2-c^2}-1\right)$$

$$=\frac{W}{3} * \frac{-2b^2-a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2-c^2} = \frac{W}{3}\cdot\frac{c^2-a^2-3b^2}{a^2+b^2-c^2} = \frac{W}{3}\cdot\frac{a^2+3b^2-c^2}{c^2-a^2-b^2}$$

উদাহরণ 9 ঃ P,Q,R বলত্রয় যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের কোণসমূহের সমদ্বিখন্ডক AD, BE, CF বরাবর ক্রিয়ারত। তারা সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখান যে, $\dfrac{P}{\cos\frac{A}{2}} = \dfrac{Q}{\cos\frac{B}{2}} = \dfrac{R}{\cos\frac{C}{2}}$

সমাধান ঃ মনে করুন, AM ও AN যথাক্রমে BE ও CF এর উপর লম্ব।



চিত্র: ৮.৩.১৩

A বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই,

$P.0 + Q.AM + (-R.AN)$ = বলত্রয়ের লব্ধির ভ্রামক

$=0$, যেহেতু লব্ধি $= 0$

বা, $Q.AM - R.AN = 0$

বা, $Q.AM = R.AN$

বা, $Q.AB.\dfrac{AM}{AB} = R.CA.\dfrac{AN}{CA}$

বা, $Q.c\sin\dfrac{B}{2} = R.b\sin\dfrac{C}{2}$

বা, $Q.2r\sin C\sin\dfrac{B}{2} = R.2r\sin B\sin\dfrac{C}{2}$, [যেহেতু $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2r$]

বা, $Q.2r.\ 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}.\sin\dfrac{B}{2} = R.2r.\ 2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

বা, $Q.\cos\dfrac{C}{2} = R.\cos\dfrac{B}{2}$

$\therefore \dfrac{Q}{\cos\frac{B}{2}} = \dfrac{R}{\cos\frac{C}{2}}$

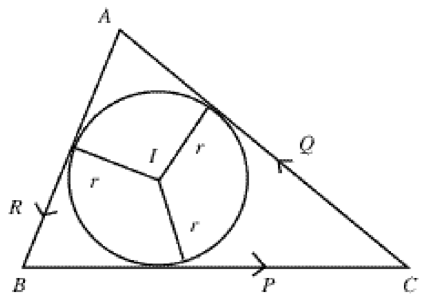
অনুরূপভাবে C বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাওয়া যায়-

$$\frac{P}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{Q}{\cos\frac{B}{2}}$$

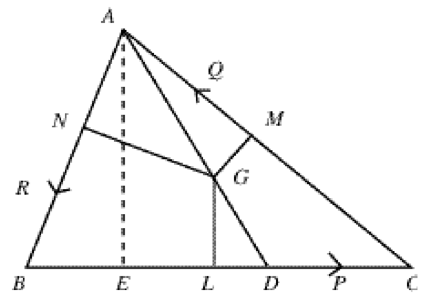
$$\therefore \quad \frac{P}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{Q}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{R}{\cos\frac{C}{2}}$$

উদাহরণ ঃ 10 P, Q, R বলত্রয় যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু বরাবর ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধি অন্তঃকেন্দ্র ও ভরকেন্দ্রগামী হলে, দেখান যে, $\frac{P}{a(b-c)} = \frac{Q}{b(c-a)} = \frac{R}{c(a-b)}$

সমাধানঃ



১ম চিত্র



২য় চিত্র

চিত্র ৮.৩.১৪ ঃ একই ত্রিভুজের দুইটি অবস্থান

১ম চিত্র অনুযায়ী-

মনে করুন, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I ও অন্তঃব্যাসার্ধ= r। এক্ষেত্রে অন্তঃকেন্দ্র হতে বাহুগুলোর লম্ব-দূরত্ব=r।
অন্ড্রঃকেন্দ্র সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই, P এর ভ্রামক + Q এর ভ্রামক + R এর ভ্রামক= লব্ধির ভ্রামক।
বা, $P.r+Q.r+R.r=0$, যেহেতু লব্ধি অন্তঃকেন্দ্রগামী।

$\therefore P+Q+R = 0$ .... (i)

২য় চিত্র অনুযায়ী

মনে করুন, ABC ত্রিভুজের মধ্যমা AD ও ভরকেন্দ্র G; BC, CA, AB এর উপর যথাক্রমে GL, GM, GN লম্ব এবং BC এর উপর AE লম্ব। BC এর উপর GL ও AE উভয়েই লম্ব। তাই এরা পরস্পর সমান্তরাল।

$\therefore \frac{GL}{AE} = \frac{GD}{AD} = \frac{1}{3}$

বা, $GL= \frac{1}{3} . AE = \frac{2}{3.BC} . \frac{BC.AE}{2} = \frac{2}{3a} \Delta ABC$

অনুরূপভাবে $GM = \frac{2}{3b} \Delta ABC$ ও $GN = \frac{2}{3c} \Delta ABC$

G বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই–

$P.GL + Q.GM + R.GN =$ লব্ধির ভ্রামক।

বা, $P.\frac{2}{3a} \Delta ABC + Q.\frac{2}{3b} \Delta ABC + R.\frac{2}{3c} \Delta ABC=0$ [যেহেতু লব্ধি G বিন্দুগামী।]

$\therefore \frac{P}{a} + \frac{Q}{b} + \frac{R}{c} = 0$ .... (ii)

(i) ও *(ii)* হতে বজ্রগুণন করে পাওয়া যায়-

$$\frac{P}{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}} = \frac{Q}{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}} = \frac{R}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$$

বা, $$\frac{P}{\frac{b-c}{bc}} = \frac{Q}{\frac{c-a}{ca}} = \frac{R}{\frac{a-b}{ab}}$$

বা, $$\frac{P}{abc.\frac{b-c}{bc}} = \frac{Q}{abc.\frac{c-a}{ca}} = \frac{R}{abc.\frac{a-b}{ab}}$$

$$\therefore \quad \frac{P}{a(b-c)} = \frac{Q}{b(c-a)} = \frac{R}{c(a-b)}$$

অনুশীলনী–৮.৩

1. 16 ফুট দীর্ঘ একটি অসমরূপ ভারী দন্ড এর মধ্যবিন্দু হতে সমদূরত্বে স্থাপিত 9 ফুট দূরবর্তী দুটি খুঁটির উপর সুস্থিত আছে। সাম্যাবস্থা ব্যাহত না করে দন্ডটির দুপ্রান্তে পর্যায়ক্রমে সর্বোচ্চ 5 পাউন্ড ওজন ও 4 পাউন্ড ওজন ঝুলানো যায়। দন্ডটির ওজন নির্ণয় করুন।
2. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। এর বাহুত্রয় BC, CA, AB এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 13, 12,5 একক। A, B, C বিন্দুগুলোর চারিদিকে কোন একটি বল F এর ভ্রামক যথাক্রমে 0, 25, 144 একক হলে, F বলের মান, দিক ও ক্রিয়ারেখা নির্ণয় করুন।
3. ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দুগুলো হতে যথাক্রমে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রমাণ করুন যে, $P : Q : R = a : b : c$
4. P, Q, R বলত্রয় যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু বরাবর ক্রিয়ারত। এদের লব্ধি যদি ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রগামী হয়, তবে দেখান যে, $P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0$।
5. P, Q, R বল তিনটি যথাক্রমে A, B, C বিন্দু হতে ΔABC-এর বাহুগুলোর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়াশীল। যদি এদের লব্ধি ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্রগামী হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $P(b\cos C - c\cos B) + Q(c\cos A - a\cos C) + R(a\cos B - b\cos A) = 0$
6. P, Q, R বল তিনটি যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু বরাবর ক্রিয়ারত। এদের লব্ধি যদি ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্রগামী হয়, তবে দেখান যে, $P\sec A + Q\sec B + R\sec C = 0$।
7. একটি সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি বাহু বরাবর P, $2P$, $3P$ মানের তিনটি বল একই ক্রমে ক্রিয়া করে। এদের লব্ধির দিক, মান এবং তা দ্বিতীয় বলের ক্রিয়ারেখাকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা নির্ণয় করুন।
8. তিনটি বল P, Q, R যথাক্রমে BC, CA, AB বাহু বরাবর কার্যরত। যদি এদের লব্ধি ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র দিয়ে গমন করে, তবে প্রমাণ করুন যে, $\frac{P}{\cos B - \cos C} = \frac{Q}{\cos C - \cos A} = \frac{R}{\cos A - \cos B}$
9. P, Q, R তিনটি বল যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু বরাবর ক্রিয়ারত। এদের লব্ধি ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও লম্বকেন্দ্রগামী হলে, দেখান যে, $\frac{P}{(b^2-c^2)\cos A} = \frac{Q}{(c^2-a^2)\cos B} = \frac{R}{(a^2-b^2)\cos C}$

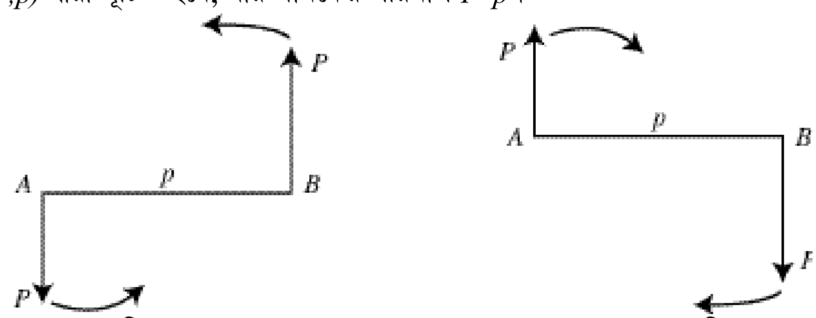
পাঠ-৪
যুগলের ধারণা ও ব্যাখ্যা

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- যুগলের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- সমস্যা সমাধানে যুগল সম্পর্কিত বিভিন্ন উপপাদ্য প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

জড় বস্তুর উপর ক্রিয়ারত দুটি সমান অসদৃশ সমান্তড়াল বলকে জোড় বা যুগল (couple) বলে। যুগল সৃষ্টিকারী বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী দূরত্বকে যুগলের বাহু এবং বলগুলোকে যুগলের অংশক বলা হয়।
যুগলের প্রভাবে বস্দুটির ঘুর্ণন প্রবণতা সৃষ্টি হবে। যুগলের একটি অংশক বল ও বাহুর গুণফলকে যুগলের ভ্রামক বলা হয়। চিত্রে P,P বলদ্বয় যুগল সৃষ্টি করে; যার বাহুর দৈর্ঘ্য AB এবং ভ্রামক $P*AB$। অংশক বল P ও বাহু p হলে, যুগলটি (P,p) দ্বারা সূচিত হবে, যার ভ্রামকের পরিমাপ $P*p$।



১ম চিত্র ২য় চিত্র

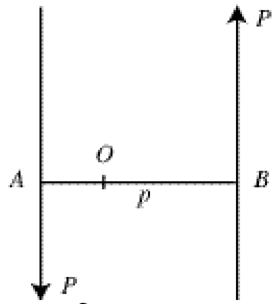
চিত্র : ৮.৪.১

কোন বস্তুর উপর জোড়ের ক্রিয়ার ফলে ঘূর্ণন প্রবণতা সৃষ্টি হয়। ঘূর্ণন প্রবণতা ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে হলে, ভ্রামক যোগবোধক (১ম চিত্র) এবং ঘূর্ণন প্রবণতা ঘড়ির কাঁটার দিকে হলে, ভ্রামক বিয়োগবোধক (২য় চিত্র) হবে।
যদি দুটি যুগলের ভ্রামকের পরিমাপ সমান, কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়, তবে সামগ্রিক লব্ধি শূন্য হবে।

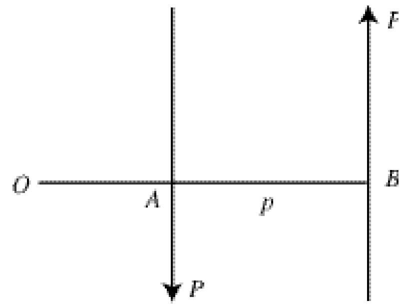
ভিন্ন ক্রিয়ারেখা বিশিষ্ট দুইটি সমান অসদৃশ সমান্তরাল বল কোন বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল হলে যুগল বা জোড় সৃষ্টি হয়। যুগল সৃষ্টিকারী বলদ্বয়ের যে কোন একটি বল ও যুগলের বাহুর গুণফলকে যুগলের ভ্রামক বলা হয়।

উপপাদ্য ঃ যুগলের সমতলে অবস্থিত যে কোন বিন্দু সাপেক্ষে অংশক বলগুলোর ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল যুগলটির ভ্রামকের সমান।

মনে করুন, (P,p) যুগলের সমতলে O যে কোন একটি বিন্দু। O বিন্দু হতে বলের ক্রিয়ারেখার উপর অংকিত লম্ব তাদেরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।



১ম চিত্র



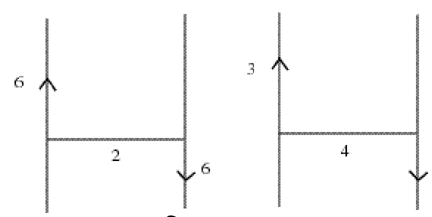
২য় চিত্র

চিত্র : ৮.৪.২

১ম চিত্রে O বিন্দু সাপেক্ষে অংশক বলদ্বয়ের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল = $P.OA+P.OB$
$= P(OA+OB) = P.AB = P.p$
= যুগলের ভ্রামক।
২য় চিত্রে O বিন্দু সাপেক্ষে অংশক বলদ্বয়ের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল
$= -P.OA + P.OB = P(OB-OA) = P.AB = P.p$
= যুগলের ভ্রামক।

সমতুল্য যুগল ঃ একই সমতলে ক্রিয়ারত দুটি যুগলের ভ্রামকের পরিমাপ ও চিহ্ন একই হলে, যুগলদ্বয়কে পরস্পরের সমতুল্য বলা হয়।

চিত্র অনুযায়ী,
$(6,2)$ এর ভ্রামক = $-6.2= -12$
$(3,4)$ এর ভ্রামক = $-3.4 = -12$
যুগলদ্বয় সমতুল্য। ইহা $(6,2)+(3,4)$ দ্বারা প্রকাশিত হয়।



চিত্র: ৮.৪.৩

একই সমতলে ক্রিয়ারত দুটি যুগলের ভ্রামকের পরিমাপ ও চিহ্ন একই হলে, যুগলদ্বয়কে পরস্পরের সমতুল্য বলা হয়।

সমতুল্য যুগলসমূহের লব্ধি নির্ণয়

কোন জড় বস্তুর উপর একই সমতলে ক্রিয়ারত যে কোন সংখ্যক যুগল একটি মাত্র যুগলের সমান এবং এই যুগলের ভ্রামক প্রদত্ত যুগলসমূহের ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফলের সমান।

মনে করুন, (P,p), (Q,q), (R,r), (S,s) যুগলগুলো একটি জড় বস্তুর উপর ক্রিয়ারত। (P,p) এর অংশক বলের ক্রিয়ারেখা AX ও BY এবং বাহু $p=AB$। অন্য যুগলগুলোকে p বাহুবিশিষ্ট সমতুল্য যুগলে রূপান্তর করুন এবং তাদের অংশক বলগুলোকে AX ও BY সরলরেখায় স্থাপন করুন।

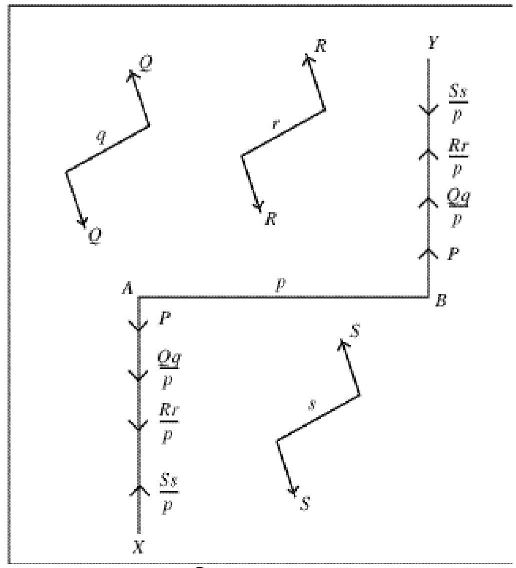
$(Q,q) + \left(\frac{Qq}{p}.\ p\right)$ -এর ভ্রামক Qq

$(R,r)+ \left(\frac{Rr}{p}.p\right)$ -এর ভ্রামক Rr

$(S,s) + \left(\frac{Ss}{p}.p\right)$ এর ভ্রামক Ss

অংশক বলসমূহকে AX ও BY রেখায় স্থাপনের পর প্রতিটি রেখায় বলের পরিমাপ দাঁড়ায়, $P+\frac{Q.q}{p} + \frac{Rr}{p} - \frac{Ss}{p}$

এরা $\left(P+\frac{Q.q}{p} + \frac{Rr}{p} - \frac{Ss}{p}.\ p\right)$ যুগল গঠন করে।



চিত্র : ৮.৪.৪

এই লব্ধি যুগলের ভ্রামক $= \left(P+\frac{Q.q}{p} + \frac{Rr}{p} - \frac{Ss}{p}\right) p = Pp + Qq + Rr - Ss =$ যুগল চারটির ভ্রামকের বীজগণিতীয় সমষ্টি।

উপপাদ্য ঃ একই সমতলে ক্রিয়ারত একটি যুগল ও একটি বল, একটি একক বলের সমতুল্য; যা প্রদত্ত বলের সমান ও সমান্তরাল।

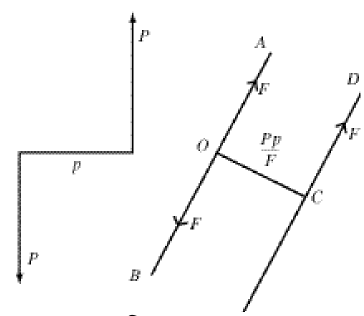
মনে করুন, একই সমতলে ক্রিয়ারত একটি যুগল (P,p) এবং একটি বল F, OA বরাবর ক্রিয়ারত।

$(P,p) + (F,x)$ হলে,

$F.x = Pp$

বা, $x = \frac{Pp}{F}$

$\therefore (P,p) + \left(F\ \ \frac{Pp}{F}\right)$



চিত্র: ৮.৪.৫

রূপান্তরিত যুগলের একটি অংশক বলকে AOB সরলরেখা বরাবর এবং অপর অংশক বলকে ইহা হতে $OC = \frac{Pp}{F}$ পরিমাণ দূরে সমান্তরাল সরলরেখা CD বরাবর স্থাপন করুন।

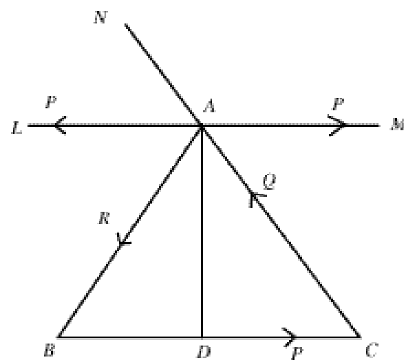
এবার BOA বরাবর আদি বল F এবং AOB বরাবর অংশক বল F পরস্পরকে নিষ্ক্রিয় করবে; আর CD বরাবর ক্রিয়ারত F অবশিষ্ট থাকবে। ইহাই (P,p) যুগল ও আদি বল F এর লব্ধি।

উপপাদ্য ঃ যুগলের ত্রিভুজ সূত্র

কোন ত্রিভুজের তিন বাহু দ্বারা দিকে, মানে, ক্রমে ও অবস্থানে সূচিত বলত্রয় একটি যুগল সৃষ্টি করে, যার ভ্রামকের পরিমাণ উক্ত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

মনে করুন, একটি বস্তুতে ক্রিয়ারত P, Q, R বল তিনটি যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের বাহু BC, CA, AB দ্বারা দিকে, মানে ও অবস্থানে সূচিত।

BC এর সমান্তরাল LAM সরলরেখা এবং BC এর উপর AD লম্ব টানুন। CA কে N পর্যন্ত বর্ধিত করুন। AM ও AL বরাবর P মানের দুটি বল প্রয়োগ করুন। এরা সমান ও বিপরীতমুখী, তাই পরস্পরকে নিষ্ক্রিয় করবে এবং আদি বলত্রয়ের লব্ধির উপর কোন প্রভাব ফেলবে না। এবার A বিন্দুতে ক্রিয়ারত AM বরাবর P বল, CAN বরাবর Q বল ও AB বরাবর R বল ত্রিভুজ সূত্র অনুযায়ী সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে এবং BC বরাবর P ও AL বরাবর P বল অবশিষ্ট থাকে। এই অসদৃশ সমান বলদ্বয় যুগল গঠন করে এবং তার ভ্রামক $= P.AD$



চিত্র: ৮.৪.৬

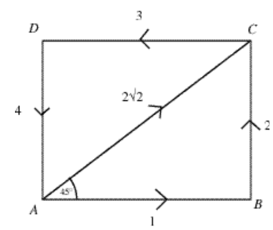
$$= BC.\,AD \qquad \left[\because P=\frac{}{BC}\right]$$

$$= 2.\frac{1}{2}.\,BC.\,AD$$

$$= 2\Delta\, ABC$$

উদাহরণ 1 ঃ $1, 2, 3, 4$ ও $2\sqrt{2}$ মানের বলগুলো যথাক্রমে a বাহু বিশিষ্ট $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের AB, BC, CD, DA বাহু ও AC কর্ণ বরাবর ক্রিয়ারত। দেখান যে, তারা একটি যুগল সৃষ্টি করে এবং উক্ত লব্ধি যুগলের ভ্রামক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ কর্ণ AC বরাবর ক্রিয়ারত $2\sqrt{2}$ মানের বলকে AB ও AD বরাবর বিভাজন করে যথাক্রমে উপাংশ পাই, $2\sqrt{2}\ \cos 45° = 2\sqrt{2}\ .\ \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$ ও $2\sqrt{2}\ \ \sin 45° = 2\sqrt{2}\ .\frac{1}{\sqrt{2}} = 2$



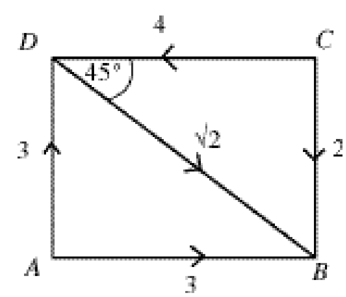
চিত্র: ৮.৪.৭

এবার AB বরাবর বলের পরিমাণ $= 1+2 = 3$ এবং DA বরাবর বলের পরিমাণ $= 4-2=2$। AB ও CD বরাবর ক্রিয়ারত প্রতিটি 3 মানের বলদ্বয় যুগল গঠন করে, যার ভ্রামক $= +3a$ এবং BC ও DA বরাবর ক্রিয়ারত প্রতিটি 2 মানের বলদ্বয় যুগল গঠন করে, যার ভ্রামক $= +2a$।

অতএব, বলসমূহ যুগল গঠন করে, যার ভ্রামক $= +5a$।

উদাহরণ 2 ঃ $3, 2, 4, 3$ ও $\sqrt{2}$ পা. ওজন মানের বলগুলো যথাক্রমে 5 ফুট বাহু বিশিষ্ট $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের AB, CB, CD, AD বাহু ও DB কর্ণ বরাবর ক্রিয়ারত। দেখান যে, তারা একটি যুগল সৃষ্টি করে এবং উক্ত লব্ধি যুগলের ভ্রামক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ কর্ণ DB বরাবর ক্রিয়ারত $\sqrt{2}$ পাউন্ড ওজন বলকে DC ও DA বরাবর বিভাজন করে যথাক্রমে উপাংশ পাই, $\sqrt{2}\ \cos 45° = \sqrt{2}\,.\,\frac{1}{\sqrt{2}}$ $= 1$ ও $\sqrt{2}\ \sin 45° = \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$



চিত্র: ৮.৪.৮

এবার CD বরাবর বলের পরিমাণ $= 4-1=3$ পাউন্ড ওজন এবং AD বরাবর বলের পরিমাণ $=3-1=2$ পাউন্ড ওজন।

AD ও CB বরাবর ক্রিয়ারত প্রতিটি 2 পাউন্ড ওজন মানের বলদ্বয় যুগল সৃষ্টি করে, যার ভ্রামক = -2 পাউন্ড ওজন * 5 ফুট = -10 ফুট-পাউন্ড এবং AB ও CD বরাবর ক্রিয়ারত প্রতিটি 3 পাউন্ড ওজন মানের বলদ্বয় যুগল সৃষ্টি করে, যার ভ্রামক = +3 পাউন্ড ওজন *5 ফুট = +15 ফুট-পাউন্ড।

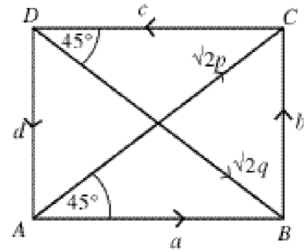
অতএব বলসমূহ যুগল সৃষ্টি করে, যার ভ্রামক = (-10 ফুট-পাউন্ড)+(+15 ফুট-পাউন্ড) = +5 ফুট-পাউন্ড।

উদাহরণ 3 ঃ 2একক দীর্ঘ বাহু বিশিষ্ট $ABCD$ বর্গের AB, BC, CD, DA বাহু বরাবর যথাক্রমে a, b, c, d মানের চারটি বল এবং কর্ণ AC, কর্ণ DB বরাবর যথাক্রমে $\sqrt{2}\,p, \sqrt{2}\,q$ মানের দুটি বল ক্রিয়ারত। $p+q=c-a$ এবং $p-q=d-b$ হলে, দেখান যে, এরা একটি যুগলের সমতুল্য যার ভ্রামক $a+b+c+d$.

সমাধান ঃ $p+q=c-a$ ও $p-q=d-b$

সুতরাং $p=\dfrac{c-a+d-b}{2}$ এবং $q=\dfrac{c-a-d+b}{2}$

কর্ণ AC বরাবর ক্রিয়ারত $\sqrt{2}\,p$ মানের বলকে AB ও AD বরাবর বিভাজন করে যথাক্রমে পাই, $\sqrt{2}\,p.\cos45°=\sqrt{2}\,p\dfrac{1}{\sqrt{2}}=p$ ও $\sqrt{2}\,p\sin45°=\sqrt{2}\,p\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}=p$।



চিত্র: ৮.৪.৯

আবার কর্ণ DB বরাবর ক্রিয়ারত $\sqrt{2}\,q$ মানের বলকে DC ও DA বরাবর বিভাজন করে যথাক্রমে পাই, $\sqrt{2}\,q.\cos 45°=\sqrt{2}\,q.\dfrac{1}{\sqrt{2}}=q$ ও $\sqrt{2q}\;\sin 45°=\sqrt{2q}.\dfrac{1}{\sqrt{2}}=q$।

এবার AB বরাবর বল $= a+p=a+\dfrac{c-a+d-b}{2}=\dfrac{a-b+c+d}{2}$

CD বরাবর বল $= c-q=c-\dfrac{c-a+d-b}{2}=\dfrac{a-b+c+d}{2}$

DA বরাবর বল $= d-p+q=d-(p-q)=d-(d-b)=b$

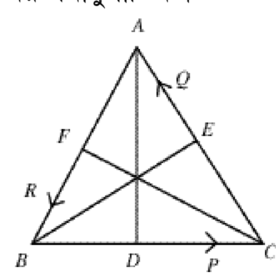
BC বরাবর বল $= b$

AB ও CD বরাবর বলদ্বয় যুগল গঠন করে, যার ভ্রামক $=\dfrac{a-b+c+d}{2} * 2=a-b+c+d$ এবং BC ও DA বরাবর বলদ্বয় যুগল গঠন করে, যার ভ্রামক$=b.2=2b$। সুতরাং বলসমূহ একক যুগলের সমতুল্য, যার ভ্রামক $=a-b+c+d+2b=a+b+c+d.$

উদাহরণ 4 ঃ ত্রিভুজের তিন বাহু বরাবর একই ক্রমে ক্রিয়ারত তিনটি বল একটি যুগলের সমতুল্য হলে দেখান যে, বলগুলো অনুষঙ্গী বাহুর দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক অথবা বিপরীত কোণের sine-এর সমানুপাতিক।

সমাধান ঃ মনে করুন, ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বরাবর যথাক্রমে ক্রিয়ারত P,Q,R বলত্রয় একটি যুগলের সমতুল্য এবং উক্ত যুগলের ভ্রামক$=M$।

ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দু হতে বিপরীত বাহুর উপর AD, BE, CF লম্ব টানুন। যেহেতু বলত্রয় একটি যুগলের সমতুল্য, সেহেতু একই তলের যে কোন বিন্দু সাপেক্ষে বলত্রয়ের ভ্রামকের বীজগণিতীয় সমষ্টি লব্ধি যুগলের ভ্রামকের সমান হবে।



চিত্র: ৮.৪.১০

A বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই, $P.AD+Q.0+R.0=M$

বা, $P=\dfrac{M}{AD}$ or, $\dfrac{P}{BC}=\dfrac{M}{BC.AD}=\dfrac{M}{2.\frac{1}{2}BC.AD}$

$\therefore \dfrac{P}{a}=\dfrac{M}{2\Delta ABC}$ ------------ (i)

B বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই, $P.0+Q.BE+R.0=M$

বা, $Q=\frac{M}{BE}$ $or,$ $\frac{Q}{CA}=\frac{M}{2.\frac{1}{2}CA.BE}$

$\therefore \frac{Q}{b}=\frac{M}{2\Delta ABC}$ -------------- (ii)

C বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই, $P.0+Q.0+R.CF=M$

বা, $R=\frac{M}{CF}$ বা, $\frac{R}{AB}=\frac{M}{AB.CF}=\frac{M}{2.\frac{1}{2}AB.CF}$

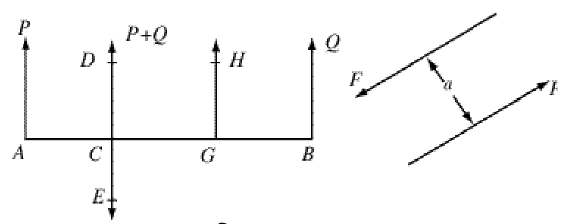
$\therefore \frac{R}{c}=\frac{M}{2\Delta ABC}$ ----------- (iii)

অতএব, $(i), (ii), (iii)$ হতে $\frac{P}{a}=\frac{Q}{b}=\frac{R}{c}$

বা, $\frac{P}{\sin A}=\frac{Q}{\sin B}=\frac{R}{\sin C}$; [ত্রিভুজের ধর্ম অনুযায়ী $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$]

উদাহরণ 5 ঃ কোন বস্তুর উপর P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় ক্রিয়ারত। একই সমতলে (F,a) যুগলকে তাদের সাথে যদি যুক্ত করা হয়, তবে দেখান যে, লব্ধিটি $\frac{Fa}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যায়।

সমাধান ঃ মনে করুন, কোন বস্তুর A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে ক্রিয়ারত P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি $P+Q$, AB রেখার C বিন্দুতে CD বরাবর ক্রিয়া করে।



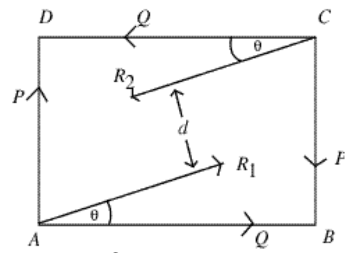
চিত্র: ৮.৪.১১

প্রদত্ত যুগল $(F,a)+\left(P+Q \quad \frac{Fa}{P+Q}\right)$

এবার $\left(P+Q \quad \frac{Fa}{P+Q}\right)$ যুগলের একটি অংশক বলকে DCE রেখা বরাবর এবং আরেকটি অংশক বলকে $CG=\frac{Fa}{P+Q}$ দূরত্বে CD এর সমান্তরাল GH রেখা বরাবর স্থাপন করুন।

CD বরাবর P ও Q এর লব্ধি বল $P+Q$ এবং CE বরাবর $\left(P+Q \quad \frac{Fa}{P+Q}\right)$ যুগলের অংশক বল $P+Q$ পরস্পরকে নিষ্ক্রিয় করে। সুতরাং C বিন্দু হতে $\frac{Fa}{P+Q}$ দূরত্বে GH বরাবর ক্রিয়ারত $P+Q$ অংশক বলটিই লব্ধি হবে।

উদাহরণ 6 ঃ $ABCD$ আয়তক্ষেত্রে বাহু $AB=CD=a$ এবং $BC=DA=b$। P মানের দুটি বল AD ও CB বরাবর এবং Q মানের দুটি বল AB ও CD বরাবর ক্রিয়ারত। A বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q এর লব্ধি এবং C বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q এর লব্ধির ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব d হলে, দেখান যে, $d=\frac{Pa\sim Qb}{\sqrt{P^2+Q^2}}$



চিত্র: ৮.৪.১২

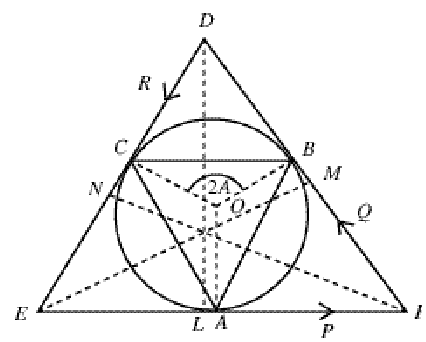
সমাধান ঃ AD ও CB বরাবর ক্রিয়ারত প্রতিটি P মানের বলদ্বয় যুগল গঠন করে, যার ভ্রামক= $-P.AB=-Pa$ এবং AB ও CD বরাবর ক্রিয়ারত প্রতিটি Q মানের বলদ্বয় যুগল গঠন করে, যার ভ্রামক= $Q.BC=Qb$।
উক্ত যুগলদ্বয় একক যুগলের সমতুল্য, যার ভ্রামক = $Qb-Pa$।
আয়তক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দুগুলো বিপরীতক্রমে হলে, লব্ধি যুগলের ভ্রামক হবে $Pa-Qb$।

A বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলদ্বয়ের লব্ধি $R_1=\sqrt{P^2+Q^2}$ এর ক্রিয়ারেখা ABএর সাথে θ কোণে নত হলে, C বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলদ্বয়ের লব্ধি $R_2=\sqrt{P^2+Q^2}$ এর ক্রিয়ারেখা CD এর সাথে θ কোণে নত হবে। সুতরাং R_1 ও R_2 এর ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল এবং $R_1=\sqrt{P^2+Q^2}=R_2$। এরা যুগল গঠন করবে, যার ভ্রামক = $\sqrt{P^2+Q^2}*d$।

$\therefore \sqrt{P^2+Q^2} * d=Pa\sim Qb$

বা, $d=\dfrac{Pa\sim Qb}{\sqrt{P^2+Q^2}}$

উদাহরণ 7 ঃ ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলিতে তার পরিবৃত্তের স্পর্শক বরাবর একই ক্রমে P,Q,R মানের তিনটি বল যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। তারা একটি যুগল গঠন করলে, প্রমাণ করুন যে, $P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$.



চিত্র: ৮.৪.১৩

সমাধান ঃ মনে করুন, ΔABC এর কৌণিক বিন্দুতে পরিবৃত্তের স্পর্শক DEF ত্রিভুজ গঠন করে এবং ΔABC এর পরিকেন্দ্র O। EF, FD, DE বরাবর যথাক্রমে ক্রিয়ারত P,Q,R বলত্রয় একটি যুগলের সমতুল্য। DL, EM, FN যথাক্রমে ΔDEF এর শীর্ষবিন্দু D, E ও F হতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব টানুন।

□$COA=2B$, কারণ একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।

$\therefore$ □$E = 180° - 2B$

একই কারণে □$D = 180°-2A$ ও □$F=180°-2C$

বলগুলো একটি যুগলের সমতুল্য বলে, যে কোন বিন্দু সাপেক্ষে এদের ভ্রামকের বীজগণিতীয় সমষ্টি তুল্য যুগলের ভ্রামকের সমান। ধরুন, লব্ধি যুগলের ভ্রামক= K

D বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই, $P.DL+Q.0+R.0=K$

বা, $P=\dfrac{K}{DL}$ বা, $\dfrac{P}{EF}=\dfrac{K}{EF.\,DL}=\dfrac{K}{2.\frac{1}{2}EF.DL}=\dfrac{K}{2\Delta DEF}$ --------- (i)

E বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই, $P.0+Q.EM+R.0=K$ বা, $Q=\dfrac{K}{EM}$

বা, $\dfrac{Q}{FD}=\dfrac{K}{FD.EM}=\dfrac{K}{2.\frac{1}{2}FD.EM}=\dfrac{K}{2\Delta DEF}$ ---------------- (ii)

F বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই, $P.0+Q.0+R.FN=K$

বা, $R.FN=K$ বা, $R=\dfrac{K}{FN}$ বা, $\dfrac{R}{DE}=\dfrac{K}{DE.FN}=\dfrac{K}{2.\frac{1}{2}DE.FN}=\dfrac{K}{2\Delta DEF}$ .... (iii)

(i), (ii), (iii) হতে, $\dfrac{P}{EF}=\dfrac{Q}{FD}=\dfrac{R}{DE}$

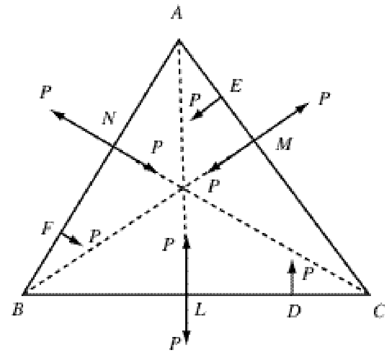
বা, $P : Q : R = EF:FD:DE$

$= \sin(180°-2A) : \sin(180°-2B) : \sin(180°-2C)$; যেহেতু $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$= \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$

উদাহরণ 8 ঃ ΔABC এর প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a। D, E, F যথাক্রমে BC, CA, AB কে 5:1 অনুপাতে বিভক্ত করে। P মানের তিনটি সমতলীয় সমান বল D,E,F বিন্দুতে অনুষঙ্গী বাহুর লম্ব বরাবর ভিতরের দিকে (বা বাইরের দিকে) ক্রিয়া করে। দেখান যে, এরা একটি যুগল গঠন করে যার ভ্রামকের মান Pa।

সমাধান ঃ ধরুন, বাহুগুলো বাহুর লম্ব বরাবর ভিতরের দিকে ক্রিয়ারত। AL, BM, CN মধ্যমা টানুন। ΔABC সমবাহু বলে মধ্যমাগুলো বাহুর উপর লম্ব হবে।



চিত্র: ৮.৪.১৪

$\frac{BD}{CD} = \frac{5}{1}$ বা, $\frac{BD}{BD+CD} = \frac{5}{5+1}$

বা, $\frac{BD}{BC} = \frac{5}{6}$ $\therefore BD = \frac{5}{6}.BC = \frac{5}{6}a$।

$LD = BD - BL = \frac{5}{6}a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{3}a$

অনুরূপভাবে $ME = \frac{1}{3}a = NF$

এবার L,M,N এর প্রতি বিন্দুতে বাহুর লম্ব বরাবর বিপরীতমুখী P মানে দুটি করে বল প্রয়োগ করুন। এরা পরস্পর সমান ও বিপরীতমুখী বলে, আদি বলত্রয়ের লব্ধির উপর কোন প্রভাব ফেলবে না।

প্রয়োগকৃত অন্তর্মুখী বলত্রয় 'বলের লম্ব ত্রিভুজের সূত্র' অনুযায়ী সাম্যাবস্থায় থাকবে। অতএব L বিন্দুতে বহির্মুখী বল P এবং D বিন্দুতে অন্তর্মুখী বল P যুগল গঠন করবে, যার ভ্রামক $= P.LD = P.\frac{1}{3}.a = \frac{1}{3}Pa$।

একইভাবে M বিন্দুতে বহির্মুখী বল P এবং E বিন্দুতে অন্তর্মুখী বল P যুগল গঠন করবে, যার ভ্রামক $P.ME = P.\frac{1}{3}a = \frac{1}{3}Pa$। আবার N বিন্দুতে বহির্মুখী বল P এবং F বিন্দুতে অন্তর্মুখী বল P যুগল গঠন করবে, যার ভ্রামক $= P.NF = P.\frac{1}{3}a = \frac{1}{3}Pa$। সুতরাং উক্ত যুগলত্রয় একটি যুগলের সমতুল্য, যার ভ্রামক$= \frac{1}{3}Pa + \frac{1}{3}Pa + \frac{1}{3}Pa = Pa$।

অনুশীলনী–৮.৪

1. 5 পাউন্ড ওজন, 3 পাউন্ড ওজন, 5 পাউন্ড ওজন ও 3 পাউন্ড ওজন বলগুলো যথাক্রমে 4 ফুট বিশিষ্ট $ABCD$ বর্গের AB, BC, CD ও DA বরাবর একই ক্রমে ক্রিয়া করে। দেখান যে, তারা একটি যুগল সৃষ্টি করে এবং উক্ত লব্ধি যুগলের ভ্রামক নির্ণয় করুন।
2. 2 ফুট বাহু বিশিষ্ট $ABCD$ একটি বর্গক্ষেত্র। 1, 2, 8, 5, $5\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ পাউন্ড ওজনের বলগুলো যথাক্রমে AB, BC, CD, DA, AC, DB রেখা বরাবর ক্রিয়া করে। এই বলগুলো দ্বারা গঠিত যুগলের ভ্রামক নির্ণয় করুন।
3. 4 পাউন্ড ওজনের দুটি সমান বল, 1 ফুট বাহু বিশিষ্ট $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের AB ও CD বরাবর ক্রিয়াশীল এবং 2 পাউন্ড ওজনের আরেকটি বল CA কর্ণ বরাবর ক্রিয়াশীল। তাদের লব্ধি নির্ণয় করুন।
4. $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের AB, BC, CD বরাবর যথাক্রমে 2, 3, 2 পাউন্ড ওজনের তিনটি বল ক্রিয়া করে। AB=5 ফুট ও BC=4 ফুট। তাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করুন এবং তা AB কে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা নির্ণয় করুন।

5. G ভ্রামক বিশিষ্ট একটি যুগলের অংশক বলদ্বয় A ও B বিন্দুতে ক্রিয়া করে। তাদের ক্রিয়ারেখাকে এক সমকোণে ঘুরানো হলে যে যুগলের সৃষ্টি হয়, তার ভ্রামক H। দেখান যে, বল দুটির ক্রিয়ারেখা AB এর উপর লম্ব হলে, $\sqrt{(G^2+H^2)}$ ভ্রামক বিশিষ্ট একটি যুগল সৃষ্টি করে।
6. 3 ফুট বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলো বরাবর একই ক্রমে 5 পাউন্ড ওজনের তিনটি সমান বল ক্রিয়াশীল। দেখান যে, তারা $\frac{15}{2}\sqrt{3}$ ফুট-পাউন্ড ভ্রামক বিশিষ্ট একটি যুগল গঠন করে।
7. ΔABC এর প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a। D,E,F যথাক্রমে BC, CA, AB কে 3ঃ 2 অনুপাতে বিভক্ত করে। P মানের তিনটি সমতলীয় সমান বল D,E,F বিন্দুতে অনুষঙ্গী বাহুর লম্ব বরাবর ভিতরের দিকে (বা বাইরের দিকে) ক্রিয়া করে। প্রমাণ করুন যে, তার একটি যুগল গঠন করে যার ভ্রামকের পরিমাণ $\frac{3}{10}\ Pa$।

পাঠ-৫
জড়বস্তুর ভারকেন্দ্র

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

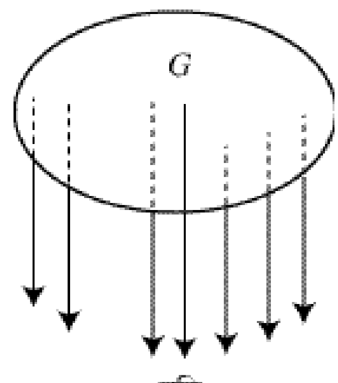
- জড় বস্তুর ভারকেন্দ্র সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন;
- ভরকেন্দ্র ও ভারকেন্দ্রের মধ্যে পার্থক্য নির্ণয় করতে পারবেন;
- বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

জড় বস্তু হচ্ছে অসংখ্য ক্ষুদ্র টুকরা বা অণুর যৌথ অবস্থান। এরা পরস্পর দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ। কোন বস্তুর অণুগুলোর কেন্দ্রবিন্দুটিকে তার ভরকেন্দ্র বলা হয়। ভরকে সাধারণ m, m_1, m_2 ইত্যাদি দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। ওজন হচ্ছে বস্তুটির উপর পৃথিবীর টান বা আকর্ষণ। ইহা প্রকৃতপক্ষে বিশেষ বল। সাধারণ বল, $F=mf$ (f হচ্ছে প্রযুক্ত বলের কারণে সৃষ্ট ত্বরণ) আকারে প্রকাশ করা হয়। পৃথিবীর আকর্ষণের কারণে সৃষ্ট ত্বরণকে f এর পরিবর্তে g দ্বারা প্রকাশ করা হয়। পৃথিবী পৃষ্ঠে g এর মান 32ফুট/ সেকেন্ড^2 বা 981 সে:মি/সে^{2} বা 9.81 মি/সে^{2}, যা অবস্থানগত কারণে অতি সামান্য তারতম্য হতে পারে। বস্তুর ওজন, $w=mg$ আকারে প্রকাশ করা হয়।

বস্তুর ওজন অর্থাৎ বস্তুটির অণুগুলোর লব্ধি ওজন যে বিন্দুতে ক্রিয়া করে, সেই বিন্দুটিই তার ভারকেন্দ্র। ওজনকে সাধারণতঃ w, w_1, w_2 ইত্যাদি দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

ওজন নিম্নমুখী ক্রিয়াশীল। তাই বস্তুর ক্ষুদ্র টুকরো বা অনুগুলোর ক্রিয়ারেখা পরস্পর সমান্তরাল। দুটি সমান টুকরার সমান ওজন দ্বয়ের লব্ধি তাদের সংযোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দুতে ক্রিয়া করবে। তাই বস্তুর সমরূপ টুকরাগুলোর দুটিকে নিয়ে ক্রমান্বয়ে লব্ধি নির্ণয় করতে থাকলে, সর্বশেষ লব্ধি (যাহাই বস্তুটির ওজন) এর ক্রিয়াবিন্দু অর্থাৎ ভারকেন্দ্র স্পষ্টত:ই ভরকেন্দ্রটি হবে। ভারকেন্দ্র বস্তুর অবস্থানের ধরনের উপর নির্ভরশীল নয়।

পৃথিবীর অভ্যন্তরস্থ কেন্দ্রে অথবা পৃথিবী পৃষ্ঠের উর্ধ্বে তার আকর্ষণ জোনের বাইরে কোন বস্তু অবস্থান করলে, আকর্ষণের অনুপস্থিতির কারণে বস্তুর ওজন থাকবে না। সে অবস্থায় বস্তুর ভারকেন্দ্রও থাকবে না।



চিত্রঃ ৮.৫.১

তাই বস্তুর ভরকেন্দ্র চিরন্তন, কিন্তু ভারকেন্দ্র চিরন্তন নয়। তবে বস্তুর ভারকেন্দ্র থাকলে, ভরকেন্দ্রটিই ভারকেন্দ্র হবে।

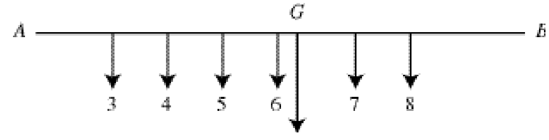
ওজন এক প্রকার বল। তাই বলের সকল সূত্রগুলো ওজনের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হবে।

ভারকেন্দ্র সম্পর্কীয় প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তসমূহ ঃ

(i) সমরূপ দন্ডের মধ্যবিন্দুটি তার ভারকেন্দ্র।
(ii) সুষম দন্ড বা পাতের তৈরি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুই তার ভারকেন্দ্র।
(iii) সুষম পাতের তৈরি ত্রিভুজের ত্রিভুজীয় ভরকেন্দ্র অর্থাৎ মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দুটিই তার ভারকেন্দ্র।
(iv) সুষম দন্ডের তৈরি ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর পরস্পর সংযোগে সৃষ্ট ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রই তার ভারকেন্দ্র।

উদাহরণ 1ঃ AB সরলরেখার উপর A হতে 1, 2, 3, 4, 5, 6 ইঞ্চি দূরত্বে যথাক্রমে 3, 4, 5, 6, 7,8 পাউন্ড ওজনের 6 টি বস্তু কে স্থাপন করা হলো। A হতে তাদের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ বস্তুসমূহের লব্ধি ওজন = 3+4+5+6+7+8
= 33 পাউন্ড ওজন।
ধরুন, লব্ধি ওজন AB এর Gবিন্দুতে ক্রিয়া করে।
A বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে ভেরিগণনের সূত্র অনুসারে পাই−



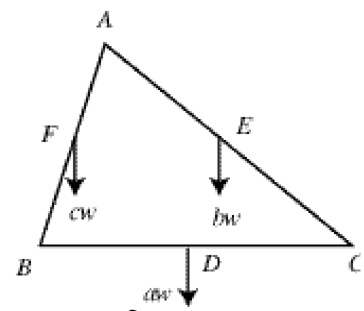
চিত্রঃ ৮.৫.২

33. AG = 3.1+4.2+5.3+6.4+7.5+8.6=133

$\therefore AG = \frac{133}{33} = 4\frac{1}{33}$ ইঞ্চি।

উদাহরণ 2 ঃ দেখান যে, A, B, C বিন্দুতে স্থাপিত যথাক্রমে $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$, $\frac{a+b}{2}$ মানের তিনটি ওজনের ভারকেন্দ্র এবং একটি সুষম তার দ্বারা গঠিত ABC ত্রিভূজের ভারকেন্দ্র সমস্থানিক।

সমাধান ঃ মনে করুন, একক দীর্ঘ তারের ওজন w। BC এর ওজন aw তার মধ্যবিন্দু D-এ, CA এর ওজন bw তার মধ্যবিন্দু E-এ, AB এর ওজন cw তার মধ্যবিন্দু F-এ ক্রিয়া করবে। aw কে বিভাজন করলে, সমদূরবর্তী B ও C বিন্দুতে উপাংশের প্রতিটি $\frac{aw}{2}$;



চিত্রঃ ৮.৫.৩

bw কে বিভাজন করলে, সমদূরবর্তী C ও A বিন্দুতে উপাংশের প্রতিটি $\frac{bw}{2}$;

cw কে বিভাজন করলে, সমদূরবর্তী A ও B বিন্দুতে উপাংশের প্রতিটি $\frac{cw}{2}$ হয়।

অতএব, A বিন্দুতে উপাংশ $\frac{b+c}{2}w$, B বিন্দুতে উপাংশ $\frac{c+a}{2}$ w এবং C বিন্দুতে উপাংশ $\frac{a+b}{2}w$ হয়। তাদের সমানুপাতিক ওজন $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$, $\frac{a+b}{2}$ এর ভারকেন্দ্র একই হবে অর্থাৎ তারের তৈরি ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র এবং A,B,C বিন্দুতে যথাক্রমে স্থাপিত $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$, $\frac{a+b}{2}$ ওজন তিনটির ভারকেন্দ্র সমস্থানিক হবে।

উদাহরণ 3 ঃ একটি সুষম তার বাঁকিয়ে ABC ত্রিভুজ গঠন করা হল। এরপর A,B,C বিন্দুতে যথাক্রমে P,Q,R ওজন স্থাপন করা হল। ত্রিভুজাকৃতি তারের ভারকেন্দ্র এবং সমগ্র বস্তুজোটের ভারকেন্দ্র একই বিন্দু হলে, দেখান যে,

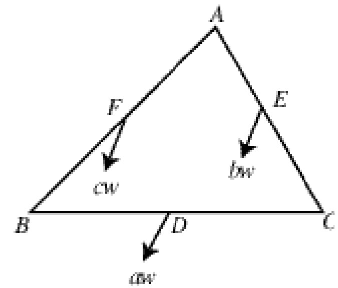
$$\frac{P}{b+c} = \frac{Q}{c+a} = \frac{R}{a+b}$$

সমাধান ঃ মনে করুন, একক দীর্ঘ তারের ওজন w। BC এর ওজন aw তার মধ্যবিন্দু D এ, CA এর ওজন bw তার মধ্যবিন্দু E এবং AB এর ওজন cw তার মধ্যবিন্দু F এ কার্যরত।
ওজনত্রয়কে বিভাজন করলে,

aw এর B ও C বিন্দুতে প্রতিটি অংশক $= \frac{aw}{2}$

bw এর C ও A বিন্দুতে প্রতিটি অংশক $= \frac{bw}{2}$

cw এর A ও B বিন্দুতে প্রতিটি অংশক $= \frac{cw}{2}$



চিত্রঃ ৮.৫.৪

অতএব, A, B, C বিন্দুতে অংশক ওজন যথাক্রমে $(b+c)\frac{w}{2}$, $(c+a)\frac{w}{2}$, $(a+b)\frac{w}{2}$ এর ভারকেন্দ্র এবং ত্রিভুজাকার তারের ভারকেন্দ্র একই।

A,B,C বিন্দুতে যথাক্রমে P,Q,R ওজন স্থাপন করলেও ভারকেন্দ্র একই থাকে। অতএব, পূর্বোক্ত ওজনগুলো এবং পরবর্তী ওজনগুলো সমানুপাতিক হবে।

$$\therefore \frac{(b+c)\frac{w}{2}+P}{(b+c)\frac{w}{2}} = \frac{(c+a)\frac{w}{2}+Q}{(c+a)\frac{w}{2}} = \frac{(a+b)\frac{w}{2}+R}{(a+b)\frac{w}{2}}$$

বা, $1+\frac{P}{(b+c)\frac{w}{2}} = 1+\frac{Q}{(c+a)\frac{w}{2}} = 1+\frac{R}{(a+b)\frac{w}{2}}$

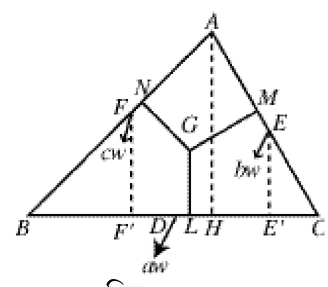
বা, $\frac{P}{(b+c)\frac{w}{2}} = \frac{Q}{(c+a)\frac{w}{2}} = \frac{R}{(a+b)\frac{w}{2}}$

$\therefore \frac{P}{b+c} = \frac{Q}{c+a} = \frac{R}{a+b}$ বা, $P : Q : R = b+c : c+a : a+b$

উদাহরণ 4 ঃ একটি সমরূপ তার বাঁকিয়ে ABC ত্রিভুজ গঠিত। প্রমাণ করুন যে, ত্রিভুজটির বাহুগুলো হতে ভারকেন্দ্রের দূরত্বের অনুপাত হবে $\frac{b+c}{a} : \frac{c+a}{b} : \frac{a+b}{c}$

সমাধান ঃ মনে করুন, একটি দীর্ঘ তারের ওজন w। BC এর ওজন aw মধ্যবিন্দু D-এ, CA এর ওজন bw মধ্যবিন্দু E-এ, AB এর ওজন cw মধ্যবিন্দু F-এ এবং ত্রিভুজটির ওজন $(a+b+c)w$ তার ভারকেন্দ্র G-এ কার্যরত।

ধরুন, G হতে বাহুগুলোর দূরত্ব যথাক্রমে GL, GM, GN। BC এর উপর AH, EE', FF' লম্ব হলে, E ও F সংশ্লিষ্ট বাহুর মধ্যবিন্দু হওয়ার জন্য $EE'=\frac{AH}{2} = FF'$ হবে।



চিত্রঃ ৮.৫.৫

BC বাহু সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে ভেরিগণনের সূত্র অনুযায়ী পাই,

$(a+b+c)w * GL = aw * 0 + bw\infty\, EE' + cw * FF'$

বা, $(a+b+c)\, GL = b.\frac{AH}{2} + c.\frac{AH}{2} = \frac{b+c}{a} * \frac{a * AH}{2} = \frac{b+c}{a}, \Delta ABC$

$\therefore GL = \frac{b+c}{a} * \frac{\Delta ABC}{a+b+c}$ ---------(i)

অনুরূপভাবে CA ও AB সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে যথাক্রমে পাই,

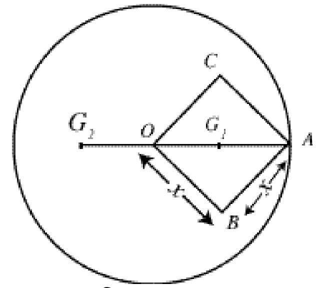
$$GM = \frac{c+a}{b} * \frac{\Delta ABC}{a+b+c} \text{ ---------- (ii)}$$

$$GN = \frac{a+b}{c} * \frac{\Delta ABC}{a+b+c} \text{ ----------- (iii)}$$

(i), (ii), (iii) হতে $GL ঃ GM ঃ GN = \frac{b+c}{a} ঃ \frac{c+a}{b} ঃ \frac{a+b}{c}$

উদাহরণ 5 ঃ একটি বৃত্তাকার সমরূপ পাতে একটি বর্গাকৃতি ছিদ্র তৈরি করা হল। বৃত্তের একটি ব্যাসার্ধ বর্গের একটি কর্ণ। বৃত্তের ব্যাস a হলে দেখান যে, কেন্দ্র হতে অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব = $\frac{a}{8\pi-4}$

সমাধান ঃ ধরুন একক ক্ষেত্র পাতের ওজন w। ছিদ্রাকৃতি বর্গের বাহু x হলে,



চিত্রঃ ৮.৫.৬

$$x^2+x^2=OA^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

বা, $x^2=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \therefore x=\frac{a}{2\sqrt{2}}$

$$OG_1 = \frac{OA}{2} = \frac{a}{4}$$

বৃত্তের ওজন= $\pi r^2. w=\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 w = \frac{\pi a^2}{4} w$ তার কেন্দ্র O বিন্দুতে কার্যরত।

$ABOC$ বর্গের ওজন = $x^2.w=\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2 w = \frac{a^2}{8} w$ কর্ণের মধ্যবিন্দু G_1 এ কার্যরত।

বর্গ $ABOC$ বাদে বাকী অংশের ওজন $\frac{\pi}{4} a^2w - \frac{a^2}{8} w = \frac{2\pi-1}{8} a^2w$, G_2 বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

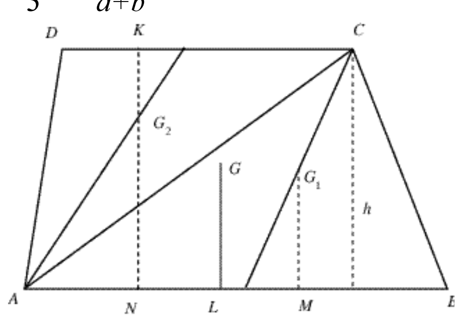
O বিন্দু সাপেক্ষে অংশদ্বয়ের ভ্রামক সমান ও বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে।

অতএব, $\frac{2\pi-1}{8} a^2w*OG_2=\frac{a^2w}{8} OG_1$ or, $(2\pi-1)OG_2 = OG_1=\frac{a}{4}$

$$\therefore OG_2 = \frac{a}{4(2\pi-1)} = \frac{a}{8\pi-4}$$

উদাহরণ 6 ঃ সমরূপ পাতের তৈরি $ABCD$ ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহু $AB=a, CD=b$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব h। প্রমাণ করুন যে, AB বাহু হতে ট্রাপেজিয়ামের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব = $\frac{1}{3} . \frac{(a+2b)h}{a+b}$ ।

সমাধান ঃ ট্রাপিজিয়ম $ABCD=\frac{a+b}{2} . h$



চিত্রঃ ৮.৫.৭

$$\Delta ABC = \frac{AB^* \text{ উচ্চতা}}{2} = \frac{ah}{2}$$

$$\Delta ACD = \frac{CD^* \text{ উচ্চতা}}{2} = \frac{bh}{2}$$

ধরুন, একক ক্ষেত্রের ওজন w।

ট্রাপিজিয়ম $ABCD$ এর ভারকেন্দ্র G,

ΔABC এর ভারকেন্দ্র G_1 এবং

ΔACD এর ভারকেন্দ্র G_2 হতে AB এর দূরত্ব যথাক্রমে GL, G_1M, G_2N ধরুন।

যেহেতু সমরূপ পাতের তৈরি ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র ও ভরকেন্দ্র একই বিন্দু, সেহেতু $G_1M=\frac{h}{3}=G_2K$

$\therefore G_2N= h-\frac{h}{3}=\frac{2h}{3}$

AB সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে, ভেরিগণনের সূত্র অনুযায়ী পাই–

$\frac{a+b}{2}\ hw * GL=\frac{ah}{2} w * G_1M+\frac{bh}{2}\ w * G_2N$

বা, $(a+b) * GL=a*G_1M+b*G_2N=a*\frac{h}{3}+b*\frac{2h}{3}=\frac{h}{3}(a+2b)$

$\therefore GL=\frac{\text{h}}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}$

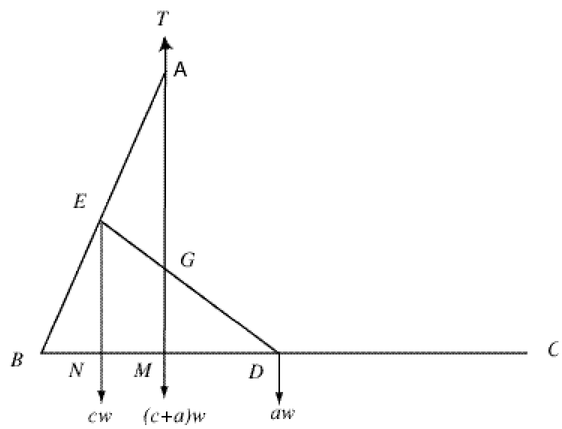
উদাহরণ 7ঃ একটি সুষম ধাতব দন্ড দ্বারা গঠিত ABC ত্রিভুজের CA বাহুকে অপসারণ করে অবশিষ্টাংশকে A বিন্দুতে ঝুলিয়ে দেওয়া হলো। সাম্যাবস্থায় BC বাহুটি অনুভূমিক থাকলে দেখান যে, (i) $sinC=\sqrt{2}\ sin\frac{B}{2}$, (ii) $b^2(c+2a)=c(c+a)^2$

সমাধান ঃ ধরুন, একক দীর্ঘ দন্ডের ওজন w। BC এর ওজন aw তার মধ্যবিন্দু D-এ, AB এর ওজন cw তার মধ্যবিন্দু E-এ BC এর লম্ব বরাবর ক্রিয়ারত ($\because BC$ অনুভূমিক)।

লব্ধি ওজন $(c+a)w$, DE এর G বিন্দুতে ক্রিয়া করলে,

$\frac{DG}{EG}=\frac{cw}{aw}=\frac{c}{a}$ ----- (i)

A বিন্দুতে ঝুলন্ড় থাকায় AM উল্লম্ব রেখার উপর G অবস্থিত হবে।



চিত্র: ৮.৫.৮

$\frac{c}{a}=\frac{DG}{EG}=\frac{MD}{MN}=\frac{BD-BM}{\frac{1}{2}BM}$

$=\frac{BD-AB.\frac{BM}{AB}}{\frac{1}{2}AB.\frac{BM}{AB}}=\frac{\frac{1}{2}a-c.\cos B}{\frac{1}{2}c.\cos B}=\frac{a-2c.\cos B}{c.\cos B}$

বা, $c^2\cos B=a^2-2ca.\cos B=a^2-2ca*\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=b^2-c^2$

বা, $\cos B=\left(\frac{b}{c}\right)^2-1$, বা, $1+\cos B=\left(\frac{b}{c}\right)^2$ বা, $2\cos^2\frac{B}{2}=\left(\frac{\sin B}{\sin C}\right)^2$

বা, $\sqrt{2}\ \cos\frac{B}{2}=\frac{\sin B}{\sin C}$ বা, $\sin C=\frac{\sin B}{\sqrt{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sqrt{2}\cos\frac{B}{2}}$

$\therefore \sin C=\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}$ ------------- (i)

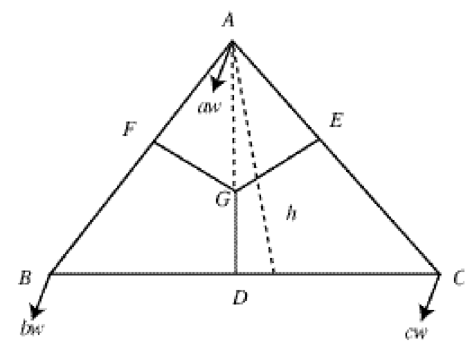
আবার, $c^2\cos B=b^2-c^2$ বা, $c^2*\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=b^2-c^2$

বা, $b^2=c^2\left(1+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)=\frac{c}{2a}\{(c+a)^2-b^2\}$

বা, $2ab=c(c+a)^2-b^2c$ বা, $b^2(c+2a)=c(c+a)^2$----------- (ii)

উদাহরণ ৪ ঃ ABC ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক ওজন বিশিষ্ট তিনটি ভারী বস্তু অনুষঙ্গী বাহুর বিপরীত কৌণিক বিন্দুতে স্থাপন করা হলো। দেখান যে, A বিন্দু হতে তাদের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{a+b+c}$

সমাধান ঃ মনে করুন, ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দুতে যথাক্রমে স্থাপিত aw, bw, cw ওজনত্রয়ের লব্ধি ওজন $(a+b+c)w$, G বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।



চিত্র: ৮.৫.৯

BC, CA, AB এর উপর যথাক্রমে GD, GE ও GF লম্ব টানুন।

A হতে BC এর লম্বদূরত্ব $= h$ ধরুন।

BC বাহু সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে ভেরিগণনের সূত্র অনুযায়ী পাই,

$(a+b+c)w* GD= aw*h+bw*0+cw*0$

$=ahw=2.\frac{ah}{2}w=2\Delta ABC.w$

$\therefore GD=\frac{2\Delta ABC}{a+b+c}$

অনুরূপভাবে CA সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই, $GE=\frac{2\Delta ABC}{a+b+c}$

এবং AB সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই, $GF=\frac{2\Delta ABC}{a+b+c}$

এখন $GD = GE=GF=r$ (ধরুন)। সুতরাং ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র G।

এখন $\frac{AG}{r}=\text{cosec}\frac{A}{2}$ বা, $AG=r.\ \text{cosec}\frac{A}{2}$

বা, $AG=\frac{2\Delta ABC}{a+b+c}*\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{2.\frac{1}{2}bc\sin A}{(a+b+c)\sin\frac{A}{2}}=\frac{bc}{a+b+c}*\frac{2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$

$=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{a+b+c}$

অনুশীলনী–৮.৫

1. একটি সমরূপ ত্রিভুজাকার পাতের তিন বাহুর দৈর্ঘ্য 2, 3, 4 ফুট। ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম বাহু হতে ইহার ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় করুন।
2. সুষম তিনটি দন্ড দ্বারা গঠিত ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর ভর যথাক্রমে $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ এর সমানুপাতিক। প্রমাণ করুন যে, ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্রই তার ভারকেন্দ্র।
3. একটি সমরূপ তার বাঁকিয়ে গঠিত ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র ও ত্রিভুজীয় ভরকেন্দ্র একই বিন্দু হলে, প্রমাণ করুন যে, তা একটি সমবাহু ত্রিভুজ।
4. একটি সমরূপ তার বাঁকিয়ে গঠিত ABC ত্রিভুজের বাহু BC, CA, AB এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6, 7, 10 একক। A,B,C বিন্দুতে যথাক্রমে P,Q,R ওজন বিশিষ্ট তিনটি বস্তুকে স্থাপন করা হলেও ভারকেন্দ্র একই থাকে। প্রমাণ করুন যে, $P:Q:R = 9:8:7$
5. 10 একক ওজনের একটি সমরূপ বর্গাকার পাত $ABCD$ এর A, B, C, D কৌণিক বিন্দুগুলোতে যথাক্রমে 20, 30, 40, 50 একক ওজনের বস্তু স্থাপন করা হল। দেখান যে, ইহাদের ভারকেন্দ্র AB ও CD বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে 19:11 ভাবে ভাগ করে।
6. সমরূপ পাতের তৈরি ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D,E,F। তা হতে DEF ত্রিভুজাকার অংশটি অপসারণ করা হল। প্রমাণ করুন যে, অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র এবং ABC ত্রিভুজাকার পাতের ভারকেন্দ্র একই।
7. সমরূপ পাতের তৈরি ABCD বর্গের কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। ΔOAB অংশটি অপসারণ করা হল। বর্গের অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় করুন।