

ভূমিকা

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম এক প্রকার আধুনিক বৈজ্ঞানিক পদ্ধতি যার সাহায্যে গাণিতিক প্রক্রিয়ায় সঠিক পরিকল্পনার মাধ্যমে সর্বনিম্ন বিনিয়োগ করে সর্বোচ্চ মুনাফা অর্জন করা যায়। এর সাহায্যে কতিপয় সমীকরণ বা অসমতার মাধ্যমে প্রদত্ত শর্তাধীনে একটি যোগাশ্রয়ী ফাংশনের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করা সম্ভব। এই কারণে আধুনিক উৎপাদন ও বন্টন ব্যবস্থায় যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম একটি গুরুত্বপূর্ণ হাতিয়ার।


উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি—

- যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন,
- বিভিন্ন সমস্যাকে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামে প্রকাশ করার দক্ষতা অর্জন করবেন,
- দ্বিমাত্রিক যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের লৈখিক সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

পাঠ-১

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের মৌলিক ধারণা

 উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম কি বলতে পারবেন;
- যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের বিভিন্ন উপাদান সম্পর্কে বলতে পারবেন।

 মৌলিক ধারণা

দ্বিতীয় বিশ্বযুদ্ধের সময় সেনাবাহিনীর রসদ ও অস্ত্র ক্রয়, দায়িত্ব বন্টন ও পরিবহন ব্যবস্থাপনা কাজে সর্বোচ্চ সুবিধা লাভের উদ্দেশ্যে প্রত্যেকটি বিষয়ে সুপরিকল্পিত প্রোগ্রামের প্রয়োজন অনুভূত হয়। নির্দিষ্ট সুবিধা বাস্তবায়নের জন্য প্রয়োজনীয় বিভিন্ন প্রকার উপাদানের সবচেয়ে সুবিধাজনক পরিমাণ নির্দিষ্ট পণ্য উৎপাদনের জন্য প্রয়োজনীয় সম্পাদ (ভূমি, শ্রম, পুঁজি, যন্ত্রসরঞ্জাম, কাঁচামাল ইত্যাদি) ব্যবহারের পরিমাণ বিভিন্ন প্রকারে হতে পারে। কিন্তু সর্বোচ্চ পরিমাণ মুনাফা অর্জনের জন্য কিংবা উৎপাদন ব্যয় সর্বনিম্ন পরিমাণ রাখার জন্য এসব সম্পদের পরিমাণের একটি নির্দিষ্ট সমাবেশ ব্যবহার প্রয়োজন। সর্বনিম্ন পরিশ্রম বা বিনিয়োগের বিনিময়ে সম্ভাব্য সর্বোচ্চ পরিমাণ মুনাফা প্রাপ্তি সকল মানুষেরই আকাঙ্ক্ষা। বর্তমান যুগে শিল্প কারখানায় উৎপাদন ব্যবস্থায় কাঁচামাল, শ্রমিক ও অন্যান্য দ্রব্য সামগ্রীর কি পরিমাণ ব্যবহারের মাধ্যমে সর্বোচ্চ উৎপাদন সম্ভব হতে পারে, তা একটি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ গবেষণার বিষয়। সর্বনিম্ন বিনিয়োগ করে সর্বোচ্চ মুনাফা অর্জনই গবেষণার মূল প্রতিপাদ্য। যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম এক প্রকার আধুনিক বৈজ্ঞানিক পদ্ধতি যার সাহায্যে গাণিতিক প্রক্রিয়ায় সঠিক পরিকল্পনার মাধ্যমে সর্বনিম্ন বিনিয়োগ করে সর্বোচ্চ মুনাফা অর্জন করা যায়।

আধুনিক উৎপাদন ও বন্টন ব্যবস্থায় যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম একটি অতি গুরুত্বপূর্ণ হাতিয়ার। এর সাহায্যে কতিপয় সমীকরণ বা অসমতার মাধ্যমে প্রদত্ত শর্তাধীনে একটি যোগাশ্রয়ী ফাংশনের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করা সম্ভব।

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সংজ্ঞা

অঋণাত্মক শর্তসহ দুই বা ততোধিক যোগাশ্রয়ী সীমাসর্ত (অসমতা নির্দেশক) সাপেক্ষে কোন যোগাশ্রয়ী উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষকের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান নির্ণয়ের গাণিতিক পদ্ধতিকে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম বলা হয়।

উদাহরণ : নিচে একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম দেখানো হলো-

$$\text{সর্বোচ্চকরণ } Z = 2x_1 + 5x_2$$

$$\text{সীমাসর্ত : } x_1 + 2x_2 \leq 40$$


$$x_1 + 3x_2 \leq 25$$

$$\text{অঋণাত্মক শর্ত : } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

উপরের উদাহরণে $Z=2x_1+5x_2$ হল যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষক।

সীমাসর্ত দুটি হল $x_1 + 2x_2 \leq 40$, $x_1 + 3x_2 \leq 25$

সবশেষে অঋণাত্মক শর্ত : $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

 অনুশীলনী ১১.১

1. যোগাশরী প্রোগ্রাম সম্পর্কে ধারণা দিন।
2. যোগাশরী প্রোগ্রামের উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষক, সীমাসর্ত এবং অঋণাত্মক শর্ত বলতে কি বুঝায়?
3. উদাহরণসহ যোগাশরী প্রোগ্রামের সংজ্ঞা দিন।
4. যোগাশরী প্রোগ্রামের প্রয়োজনীয়তা ব্যাখ্যা করুন।

পাঠ-২

বিভিন্ন সমস্যার যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের উপাদানসমূহ ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- আলগা চলক, সম্ভাব্য সমাধান ও কাম্য সমাধান সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন;
- বিভিন্ন সমস্যার যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন করতে পারবেন।



যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের উপাদানসমূহ

নিচে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামে ব্যবহৃত উপাদানসমূহ আলোচনা করা হলো-

- উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষক (Objective function) :** যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামে যে অপেক্ষকের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করা হয়, তাকে উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষক বলে।
- যোগাশ্রয়ী অসমতা (Linear Inequality) বা সীমা শর্ত :** প্রদত্ত উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষকের চরম মান নির্ণয় করার ক্ষেত্রে আরোপিত প্রতিবন্ধকতা (Constraints) সমূহকে সীমা শর্ত বলা হয়।
- আলগা চলক (Slack Variable) :** যোগাশ্রয়ী অসমতাসমূহের বিশ্লেষণের প্রয়োজনে যে চলক যোগ বা বিয়োগ করে যোগাশ্রয়ী সমতায় রূপান্তর করা হয়, সেই চলককে আলগা চলক বলে।
- সম্ভাব্য সমাধান (Feasible Solution) :** যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামে চলকগুলির প্রদত্ত মানসমূহ যদি প্রতিবন্ধকতাসমূহের এবং অঋণাত্মক উভয় শর্ত পালন করে তবে সেগুলোকেই সম্ভাব্য সমাধান বলা হয়।
- কাম্য সমাধান (Optimal Solution) :** সম্ভাব্য সমাধানগুলোর মধ্যে যেগুলো উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষককে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন করে সেগুলোকে কাম্য সমাধান বলে।

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের পর্যায়সমূহ

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের পদ্ধতিতে সমস্যা সমাধানের জন্য চারটি স্তর বা পর্যায় ব্যবহার করা হয়। এগুলো হলো-

- ১। সমস্যার বর্ণনা ভাষাগতভাবে দেয়া এবং বিভিন্ন শর্তাবলী আরোপ করা।
- ২। সমস্যাটি গাণিতিকভাবে সূত্রায়িত করা।
- ৩। সূত্রায়িত সমস্যার সমাধান করা। এই পর্যায়ে উপযোগী যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম পদ্ধতি ব্যবহার করে প্রকৃষ্ট সমাধানে উপনীত হওয়ার চেষ্টা করা হয়।
- ৪। বিশ্লেষণাত্মক প্রকৃষ্ট সমাধানের বিশদীকরণ এবং সমস্যা সমাধানের পদ্ধতির বর্ণনা প্রদান।

সমস্যার যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন

মনে করুন, কোন একটি ফার্ম যথাক্রমে x_1 এবং x_2 দুটি দ্রব্য প্রস্তুত করতে পারে। এদের উৎপাদনে দুটি উপাদান প্রয়োজন। মনে করা যাক, একটি হচ্ছে শ্রম এবং অপরটি হচ্ছে মূলধন। আরও মনে করা যাক, শ্রমের প্রাপ্তব্য পরিমাণ হচ্ছে 50 একক এবং মূলধন 38 একক।

উক্ত ফার্ম যদি এক একক x_1 দ্রব্য উৎপাদন করতে চায় তবে 2 একক শ্রম এবং 1 একক মূলধন এর প্রয়োজন হয়। অপরপক্ষে উক্ত ফার্ম যদি এক একক x_2 দ্রব্য উৎপাদন করতে চায় তবে 4 একক শ্রম এবং 4 একক মূলধনের প্রয়োজন হয়।

উল্লেখ্য যে, ফার্মটি 1 একক x_1 হতে 2 টাকা এবং অপরদিকে 1 একক x_2 হতে 3 টাকা হিসেবে আয় পায়। সুতরাং x_1 এবং x_2 দ্রব্য হতে ফার্মটির প্রাপ্য মোট আয় অপেক্ষক দাঁড়ায় নিম্নরূপ-

মোট আয়, $Z = 2x_1 + 3x_2$

সীমাসর্ত হচ্ছে : $2x_1 + 4x_2 \leq 50$

$x_1 + 4x_2 \leq 38$

এছাড়া অঋণাত্মক সর্তসমূহ হচ্ছে : $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

ফার্মটির প্রধান উদ্দেশ্য হল মোট আয় (মুনাফা) সর্বাধিক করা। তাই এক্ষেত্রে উপরোক্ত Z অপেক্ষককে উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষক বলা হয়।

উপরোক্ত সমস্যায় শ্রম এবং মূলধন উভয় উপকরণ x_1 এবং x_2 দ্রব্য উৎপাদনে ব্যবহৃত হয়। x_1 এবং x_2 উৎপাদনে যে পরিমাণ শ্রমের প্রয়োজন হয় তা কোন অবস্থাতেই প্রাপ্য শ্রম সরবরাহ (এক্ষেত্রে 50) অপেক্ষা বেশি হতে পারে না। বড়জোর সমান হতে পারে।

দ্বিতীয় সীমাসর্তে বুঝানো হয়েছে যে, x_1 এবং x_2 দ্রব্যসমূহ উৎপাদনে যে পরিমাণ মূলধনের প্রয়োজন হয় তা কোন অবস্থাতেই প্রাপ্য মূলধন (এক্ষেত্রে 38) অপেক্ষা বেশি হতে পারে না। বড়জোর সমান হতে পারে। এ কারণেই উভয় ক্ষেত্রে \leq (Less than equal to) চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।

এছাড়া x_1 এবং x_2 অঋণাত্মক চলক। অর্থাৎ x_1 এবং x_2 এর উৎপাদন পরিমাণ কখনও ঋণাত্মক হবে না। বড়জোর শূন্য হতে পারে।

উদাহরণ 1 : একটি কারখানা X এবং Y দুটি পণ্য উৎপাদন করে। প্রতিটি পণ্যের উৎপাদনের জন্য A, B এবং C উপাদানের কোনটি কত পরিমাণ প্রয়োজন এবং তাদের মোট মজুত কত তার একটি তালিকা দেয়া আছে। তালিকায় প্রতিটি পণ্যের একক থেকে মুনাফার পরিমাণও দেয়া আছে-

পণ্য	পণ্যের একক প্রতি বিভিন্ন উপাদানের পরিমাণ			একক প্রতি মুনাফা
	A	B	C	
X	4	1	0	12
Y	2	1	3	9
মজুতের পরিমাণ	32	10	21	

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষক নির্ণয় করুন। সমস্যাটিকে সূত্রায়িত করুন।

সমাধান : প্রদত্ত সমস্যায় একক প্রতি মুনাফা উল্লেখ করে উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষকটি মুনাফা অপেক্ষক হিসেবে নির্দেশ করা হয়েছে।

যেহেতু কারখানার লক্ষ্য তার মুনাফার পরিমাণ সর্বোচ্চ করা তাই সমস্যার উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষকটি হবে সর্বোচ্চ মুনাফার জন্য X এবং Y পণ্যের উৎপাদনের পরিমাণ নির্ণয়।

শর্ত থেকে মোট মুনাফার পরিমাণ Z হলে $Z=12X+9Y$ অর্থাৎ উদ্দেশ্যমূলক আপেক্ষক হবে $Z=12x + 9y$ এর সর্বোচ্চ মানের জন্য X ও Y এর মান নির্ণয় করা।

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সমস্যার সীমাবদ্ধতাসমূহের জন্য-

$$A \text{ উপাদান প্রয়োজন : } 4X + 2Y$$

$$B \text{ উপাদান প্রয়োজন : } X + Y$$

$$C \text{ উপাদান প্রয়োজন : } 3Y$$

কিন্তু A, B এবং C এর মোট মজুদ যথাক্রমে 32, 10 এবং 21 একক।

অতএব, সীমাবদ্ধতাসমূহ হবে :

$$4X + 2Y \leq 32$$

$$X + Y \leq 10$$

$$3Y \leq 21$$

এছাড়া অঋণাত্মকতার শর্ত $X \geq 0, Y \geq 0$, কারণ কারখানার উৎপাদিত পণ্যসমূহের পরিমাণ ঋণাত্মক হতে পারে না।

সুতরাং যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমস্যাটি হচ্ছে

X এর Y এর এমন মান নির্ণয় করুন যেন, $Z = 12X+9Y$ এর মান সর্বোচ্চ হয়,

$$\text{যখন } 4X+2Y \leq 32$$

$$X + Y \leq 10$$

$$3Y \leq 21$$

$$X \geq 0, Y \geq 0$$

উদাহরণ ২ : একটি কারখানার মিলিং যন্ত্র, লেদ যন্ত্র এবং গ্রাইন্ডার যন্ত্র সপ্তাহে যথাক্রমে 150, 100 এবং 50 যন্ত্র ঘন্টা অব্যবহৃত থাকায় A, B এবং C তিনটি নতুন পণ্য উৎপাদনের সিদ্ধান্ত নেয়া হল। দেখা গেল যে, প্রতিটি পণ্যের এক একক উৎপাদনের জন্য যন্ত্রসমূহের প্রয়োজনীয় সময় নিম্নরূপ-

	পণ্যের এক এককের জন্য সময়		
যন্ত্র	A	B	C
মিলিং	7	2	2
লেদ	3	2	1
গ্রাইন্ডার	2	0	1

A, B এবং C এর বিক্রি থেকে একক প্রতি মুনাফা যথাক্রমে 15, 10 এবং 7 টাকা হলে সর্বোচ্চ মুনাফা প্রাপ্তির জন্য যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমস্যা সূত্রায়িত করুন।

সমাধান : মনে করুন, A পণ্যের x একক, B পণ্যের y একক এবং C পণ্যের z একক উৎপন্ন করে সর্বোচ্চ মুনাফা অর্জন করতে হবে। সেক্ষেত্রে উদ্দেশ্যমূলক আপেক্ষক হবে :

$$P = 15x + 10y + 7z \text{ এর মান সর্বোচ্চকরণ যেখানে } P = \text{মুনাফা}$$

আবার A পণ্যের x একক, B পণ্যের y একক এবং C পণ্যের z একক উৎপন্ন করতে মিলিং যন্ত্রের মোট সময় লাগবে $7x+2y+2z$, কিন্তু ব্যবহারের জন্য মিলিং যন্ত্র দিতে পারে 150 ঘন্টা।

সুতরাং মিলিং যন্ত্রের সীমাবদ্ধতা হবে :

$$7x + 2y + 2z \leq 150$$

অনুরূপভাবে লেদ ও গ্রাইন্ডার যন্ত্রের সীমাবদ্ধতা হবে :

$$3x + 2y + z \leq 100 \text{ এবং}$$

$$2x + z \leq 150$$

এছাড়া উৎপাদনের পরিমাণ $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

অতএব, যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সমস্যাটি হবে :

x, y এবং z এর এমন মান নির্ণয় করতে হবে যেন

$$P = 15x + 10y + 7z \text{ এর মান সর্বোচ্চ হয়}$$

$$\text{যখন } 7x + 2y + 2z \leq 150$$

$$3x + 2y + z \leq 100$$

$$2x + z \leq 50$$

$$\text{এবং } x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$



অনুশীলনী- ১১.২


1. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সম্ভাব্য সমাধান এবং কাম্য সমাধানের ব্যাখ্যা দিন।
2. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের পর্যায়সমূহ লিখুন।
3. কোন একটি সমস্যার যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম কিভাবে গঠন করবেন? উদাহরণসহ ব্যাখ্যা করুন।
4. এক ব্যক্তি x ও y দুই রকমের খাদ্য গ্রহণ করে। খাদ্যের মূল্য ও পুষ্টিকারকের পরিমাণ ($N=1,2,3$) নিম্নে দেওয়া হলো। নিম্নোক্ত তালিকা থেকে সর্বনিম্ন ব্যয়সূচক একটি খাদ্য সংমিশ্রণ তৈরি করুন যা প্রাত্যহিক সর্বনিম্ন পুষ্টিকারকের প্রয়োজন পূরণ করতে পারে।

দাম	x	y	প্রাত্যহিক সর্বনিম্ন প্রয়োজনীয়তা
	1.00	2.00	
N_1	5	8	40
N_2	3	4	24
N_3	1	6	12

5. মনে করুন, একজন বই বিক্রেতা 5760 টাকায় বই ক্রয় করে। x ও y লেখকের 20টি বই ক্রয় করার ক্ষেত্রে x লেখকের বইয়ের দাম প্রতিটি 360 টাকা এবং y লেখকের প্রতিটি বইয়ের দাম 240 টাকা। বই বিক্রেতা x লেখকের প্রতিটি বইতে 22 টাকা এবং y লেখকের প্রতি বইতে 18 টাকা করে মুনাফা অর্জন করতে চায়। দুটি বই কি পরিমাণে ক্রয় করলে বিক্রির পর মুনাফা সর্বোচ্চ হবে তা নির্ণয় করার জন্য প্রোগ্রামটি সূত্রায়িত করুন।

পাঠ-৩

লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিমাত্রিক সমস্যার সমাধান

 উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি—

- যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমাধান করার বিভিন্ন পদ্ধতির সাথে পরিচিত হবেন;
- দ্বিমাত্রিক সমস্যা সমাধান করতে লেখচিত্র প্রয়োগ করতে শিখবেন।



যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সমাধান

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমস্যাসমূহ সমাধানের একটি সহজ পদ্ধতি হচ্ছে লেখচিত্র পদ্ধতি। সিমপ্লেক্স পদ্ধতি (Simplex Method) নামে পরিচিত অপর একটি পদ্ধতি অধিকতর বিজ্ঞানসন্মত কারণ লেখচিত্র পদ্ধতিতে দুটি মাত্র স্বাধীন চলকের যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমস্যা সমাধান করা যায়, কিন্তু সিমপ্লেক্স পদ্ধতি প্রয়োগের ক্ষেত্র সার্বজনীন। স্বাধীন চলকের সংখ্যা দুইয়ের অধিক যত বেশিই হোক না কেন, সিমপ্লেক্স পদ্ধতিতে সমাধান পাওয়া সম্ভব। সিমপ্লেক্স পদ্ধতি মূলত: বিভিন্ন চলকের সহগসমূহের তালিকায় কৌণিক মানসমূহ পরীক্ষার একটি বিধিবদ্ধ গণনা পদ্ধতি। বর্তমান ইউনিটে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের প্রাথমিক আলোচনা উপস্থাপিত হল বলে শুধুমাত্র লেখচিত্র পদ্ধতিটিই ব্যাখ্যা করা হল।

লেখচিত্র পদ্ধতিতে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমস্যা সমাধান

লেখচিত্র পদ্ধতিতে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমস্যা সমাধানের প্রধান ধাপসমূহ নিচে আলোচনা করা হলো—

(ক) যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সমস্যাকে সূত্রায়িত করা;

(খ) সীমার্শর্তের অসমতাসমূহকে সমীকরণ হিসেবে বিবেচনা করা এবং তাদের প্রতিটির জন্য লেখচিত্র আঁকা। লেখচিত্রগুলো একেকটি সরলরেখা হবে।

(গ) স্বাধীন চলকসমূহের সম্ভাব্য মানসমূহের এলাকা নির্ধারণ করা। এক্ষেত্রে সীমার্শর্ত অসমতাগুলো যদি \leq চিহ্ন বিশিষ্ট হয় তবে সম্ভাব্য মানসমূহের এলাকা হবে অংকিত সরলরেখাসমূহের সবকটির নিচের প্রথম চতুর্ভাগের এলাকা অর্থাৎ এক্ষেত্রে রেখাটির দিক নির্দেশনা হবে মূলবিন্দুর দিকে। আর যদি \geq চিহ্ন বিশিষ্ট হয় তবে সম্ভাব্য মানসমূহের এলাকা হবে সরলরেখাসমূহের সবকটির উপরের প্রথম চতুর্ভাগের এলাকা অর্থাৎ এক্ষেত্রে রেখাটির দিক নির্দেশনা হবে মূলবিন্দুর উল্টোদিকে।

(ঘ) সম্ভাব্য মানসমূহের এলাকার কৌণিক বিন্দুসমূহের জন্য চলকগুলোর যে মান পাওয়া যায় সেগুলি উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষককে বসিয়ে তার সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান পরীক্ষা করা হয়। যেসব মানের জন্য উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষকের মান সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন হয় সেগুলোই হবে কাম্য সমাধান। উল্লেখ্য, কাম্য সমাধান এক বা একাধিক থাকতে পারে।

উদাহরণ 1 : একটি কারখানা A এবং B দুটি পণ্য উৎপাদন করে। A পণ্যের প্রতি একক উৎপাদনে কারখানার দুটি বিভাগের প্রথমটিতে 2 ঘন্টা এবং দ্বিতীয়টিতে 4 ঘন্টা সময় ব্যয় হয়। আর B পণ্যের প্রতি একক উৎপাদনে প্রথমটিতে 2.5 ঘন্টা এবং দ্বিতীয়টিতে 2 ঘন্টা সময় ব্যয় হয়। প্রথম ও দ্বিতীয় বিভাগে সপ্তাহে যথাক্রমে 60 এবং

70 ঘন্টা কাজ চালু থাকলে এবং A ও B পণ্যের থেকে একক প্রতি মুনাফা যথাক্রমে 4 টাকা এবং 3 টাকা হলে পণ্যদ্বয়ের কত একক করে উৎপাদন করলে কারখানাটির মুনাফা সর্বোচ্চ হবে?

সমাধান : যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সমস্যাটি সূত্রায়িত করলে আমরা পাই, x_1 এবং x_2 এর এমন মান নির্ণয় করতে হবে যেন-

$$2x_1 + 2.5x_2 \leq 60$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 70$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

এবং $Z = 4x_1 + 3x_2$ এর মান সর্বোচ্চ হয়।

এখানে x_1, x_2 হল যথাক্রমে A এবং B এর পরিমাণ। Z হল মোট মুনাফা।

সুতরাং যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটি হল-

সর্বোচ্চকরণ : $Z = 4x_1 + 3x_2$

সীমাসর্ত : $2x_1 + 2.5x_2 \leq 60$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 70$$

অঋণাত্মক সর্ত : $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

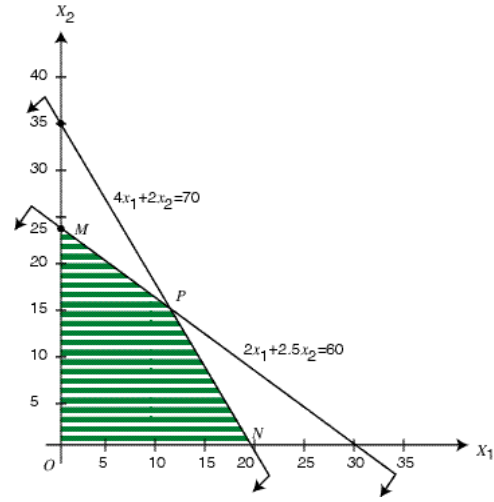
এখন $2x_1 + 2.5x_2 = 60$ এবং $4x_1 + 2x_2 = 70$ সমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্র আঁকতে হবে।

লেখচিত্র রেখাবৃত অংশটি হচ্ছে সম্ভাব্য সমাধানের এলাকা কেননা এ এলাকার সকল বিন্দুর জন্যই x_1 এবং x_2 এর মানের ক্ষেত্রে $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 2x_1 + 2.5x_2 \leq 60$ এবং $4x_1 + 2x_2 \leq 70$ । কিন্তু $4x_1 + 3x_2$ এর মান সর্বোচ্চ হবে সম্ভাব্য এলাকার চারটি কৌণিক বিন্দু O, M, P এবং N এর যে কোন একটিতে।

O বিন্দুতে x_1 এবং x_2 এর মান $(0,0)$

$$\therefore Z = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$$

M বিন্দুতে x_1 এবং x_2 এর মান X_2 অক্ষ এবং $2x_1 + 2.5x_2 = 60$ এর ছেদবিন্দু অর্থাৎ $(0,24)$, অতএব $Z = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 24 = 72$



চিত্র: ১১.৩.১

P বিন্দুতে x_1 এবং x_2 এর মান $4x_1 + 2x_2 = 70$ এবং $2x_1 + 2.5x_2 = 60$ এর ছেদবিন্দু অর্থাৎ $\left(\frac{55}{6}, \frac{50}{3}\right)$, অতএব

$$Z = 4 \cdot \frac{55}{6} + 3 \cdot \frac{50}{3} = 86\frac{2}{3}$$

N বিন্দুতে x_1 এবং x_2 এর মান X_1 অক্ষ এবং $4x_1 + 2x_2 = 70$ এর ছেদবিন্দু অর্থাৎ $(20,0)$, অতএব, $Z = 4 \cdot 20 + 3 \cdot 0 = 80$

কৌণিক বিন্দুসমূহ পর্যবেক্ষণ করে দেখা যায় যে, P বিন্দুতে $Z=4x_1+3x_2$ এর মান সর্বোচ্চ।

$$P \text{ বিন্দুতে } x_1 = \frac{55}{6} = 9 \text{ (আনুমানিক)}$$

$$x_2 = \frac{50}{3} = 17 \text{ (আনুমানিক)}$$

অতএব, প্রদত্ত শর্ত ও সীমাসর্তসমূহ সাপেক্ষে কারখানাটির মুনাফা সর্বোচ্চ করার জন্য A পণ্যটি উৎপাদন করতে হবে 9 একক এবং B পণ্যটি উৎপাদন করতে হবে 17 একক।

উদাহরণ 2 : নিম্নে একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের রূপ দেওয়া হলো—

$$4X+2Y \leq 32$$

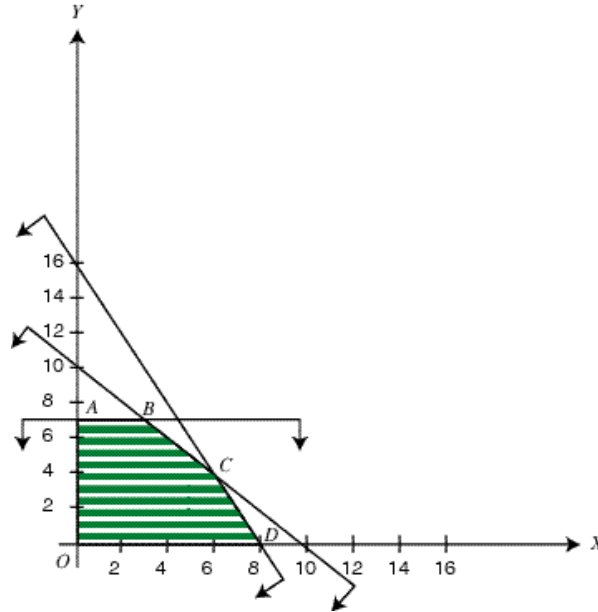
$$X+Y \leq 10$$

$$3Y \leq 21$$

$$X \geq 0, Y \geq 0$$

$P = 12X + 9Y$ এর মান সর্বোচ্চ করতে হলে X এবং Y এর মান কত?

সমাধান : প্রথমে $4X+2Y = 32$, $X+Y = 10$ এবং $3Y = 21$ এর লেখচিত্র আঁকতে হবে।



চিত্র : ১১.৩.২

রেখা দ্বারা আবৃত $OABCD$ ক্ষেত্রটি হচ্ছে সম্ভাব্য সমাধানের এলাকা।

$$O \text{ বিন্দুতে } X=0, Y=0, \quad P=12*0+9*0=0$$

$$A \text{ বিন্দুতে } X=0, Y=7, \quad P=12*0+9*7=63$$

$$B \text{ বিন্দুতে } X=3, Y=7, \quad P=12*3+9*7=99$$

$$C \text{ বিন্দুতে } X=6, Y=4, \quad P=12*6+9*4=108$$

$$D \text{ বিন্দুতে } X=8, Y=0, \quad P=12*8+9*0=96$$

অতএব, সর্বোচ্চ মুনাফার জন্য সবচেয়ে সুবিধাজনক উৎপাদন বিন্দু C যেখানে $X=6$, $Y=4$ অর্থাৎ সর্বোচ্চ মুনাফার জন্য X পণ্যের 6 একক এবং Y পণ্যের 4 একক উৎপাদন করতে হবে।


অনুশীলনী- ১১.৩

1. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সমাধান কিভাবে করা যায়? ব্যাখ্যা করুন।
2. লেখচিত্রের মাধ্যমে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমাধানের প্রক্রিয়াটি ব্যাখ্যা করুন।
3. দুই প্রকারের A ও B খাদ্যের প্রতি কেজিতে প্রোটিন ও শ্বেতসারের পরিমাণ ও তার মূল্য নিম্নরূপ :

খাদ্যের প্রকার	প্রোটিন	শ্বেতসার	প্রতি কেজির মূল্য
A	8	10	40 টাকা
B	12	6	50 টাকা

দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন 32

22

সবচেয়ে কম খরচে কিরূপে দৈনন্দিন ন্যূনতম খাদ্য প্রয়োজন মিটানো যাবে?

4. এক ব্যক্তি 500 টাকার মধ্যে কমপক্ষে 6টি গামছা এবং 4টি তোয়ালে কিনতে চায়। প্রতিটি গামছার দাম 30 টাকা এবং প্রতিটি তোয়ালের দাম 40 টাকা। প্রত্যেক প্রকারের কতটি জিনিস কিনলে সে প্রদত্ত শর্তাধীনে সর্বাপেক্ষা বেশি সংখ্যক জিনিস কিনতে পারবে?
5. একটি লোক সর্বাধিক 100 টাকা ব্যয় করে কয়েকটি খালা ও গ্লাস কিনতে চান। প্রতিটি খালা ও গ্লাসের মূল্য যথাক্রমে 12 টাকা এবং 8 টাকা। অন্তত: 1টি খালা এবং 8 টির বেশি গ্লাস তিনি কিনবেন না। উপরোক্ত টাকায় তিনি কোন্ প্রকারের কতগুলো জিনিস কিনলে একত্রে সর্বাধিক সংখ্যক জিনিস কিনতে পারবেন?

০৭ উত্তরমালা

অনুশীলনী ১১.২

3. সর্বনিম্নকরণ : $Z = x + 2y$
শর্ত সাপেক্ষে : $5x + 8y \geq 40$
 $3x + 4y \geq 24$
 $x + 6y \geq 12$
 $x \geq 0, y \geq 0$
4. সর্বোচ্চকরণ : $Z = 22x + 18y$
শর্ত সাপেক্ষে : $x + y \leq 20$
 $300x + 240y \leq 5670$
 $x \geq 0, y \geq 0$

অনুশীলনী ১১.৩

3. A প্রকারের 1 কেজি, B প্রকারের 2 কেজি, দৈনন্দিন ন্যূনতম খাদ্যের মূল্য 140 টাকা।
4. গামছা 10টি, তোয়ালে 5টি।
5. খালা 3টি, গ্যাস 8টি।