ইউনিট 12

সম্ভাব্যতা

ভূমিকা

কোন ঘটনা ভবিষ্যতে ঘটকে কিনা এ প্রশ্নের উত্তর তিনভাবে দেয়া যায় ঃ (ক) ঘটবে, (খ) ঘটবে না এবং (গ) ঘটতে পারে, নাও ঘটতে পারে। প্রথম ও দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ঘটনাটির ভবিষ্যৎ সম্পর্কে নিশ্চিতভাবে জানা যায়, কিন্তু তৃতীয় ক্ষেত্রে তা অনিশ্চিত। তবে এ অনিশ্চয়তার মাত্রা কতখানি তা বিভিন্ন বিষয়ের ভিত্তিতে সর্বদাই নির্ধারণ করা যায়। অনিশ্চয়তার মাত্রা খুব বেশি হলে ধরা হয় ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা ক্ষীণ। পক্ষান্তরে ঘটনাটি ঘটার নিশ্চয়তার মাত্রা বেশি হলে বলা হয় তা ঘটার সম্ভাবনা অনেক। গণিতে কোন ঘটনা ঘটার নিশ্চয়তার মাত্রাকেই তার সম্ভাব্যতা বলা হয়। এই ইউনিটে সম্ভাব্যতার ধারণা, সম্ভাব্যতার বিভিন্ন সূত্র সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- সম্ভাব্যতার ধারণা বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- ঘটন জগত ও ঘটনা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- সম্ভাব্যতার পরিমাপক ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- সম্ভাব্যতার বিভিন্ন সূত্র প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন
- শর্তাদীন সম্ভাব্যতার সূত্র বর্ণনা ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- বায়েস সূত্র প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

পাঠ-১
সম্ভাব্যতার ধারণা

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- সম্ভাব্যতা সম্পর্কে ধারণা পাবেন;
- কোন ঘটনা ঘটার তিনটি অবস্থা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

সম্ভাব্যতার ধারণা

কোন ঘটনা ভবিষ্যতে ঘটকে কিনা এ প্রশ্নের উত্তর তিনভাবে দেয়া যায় ঃ (ক) ঘটবে, (খ) ঘটবে না এবং (গ) ঘটতে পারে, নাও ঘটতে পারে। প্রথম ও দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ঘটনাটির ভবিষ্যৎ সম্পর্কে নিশ্চিতভাবে জানা যায়, কিন্তু তৃতীয় ক্ষেত্রে তা অনিশ্চিত। তবে এ অনিশ্চয়তার মাত্রা কতখানি তা বিভিন্ন বিষয়ের ভিত্তিতে সর্বদাই নির্ধারণ করা যায়। অনিশ্চয়তার মাত্রা খুব বেশি হলে ধরা হয় ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা ক্ষীণ। পক্ষান্তরে ঘটনাটি ঘটার নিশ্চয়তার মাত্রা বেশি হলে বলা হয় তা ঘটার সম্ভাবনা অনেক। গণিতে কোন ঘটনা ঘটার নিশ্চয়তার মাত্রাকেই তার সম্ভাব্যতা বলা হয়।

একটি ছক্কার গুটি নিরপেক্ষভাবে নিক্ষেপ করলে গুটি স্থিরাবস্থায় আসার পর উপরের পিঠে $1,2,3,4,5,6$ এর যে কোন একটি থাকবেই অর্থাৎ যে কোন একটি সংখ্যা থাকার ঘটনা নিশ্চিত। কিন্ত উপরের পিঠে 1 বা 2 বা যে কোন কাঙ্ক্ষিত সংখ্যা থাকবেই এমন কোন কথা সত্য নয়। যদি কাঙ্ক্ষিত সংখ্যা 5 হয়, তাহলে 5 থাকতেও পারে, আবার নাও থাকতে পারে। অর্থাৎ উপরের পিঠে 5 থাকার ঘটনাটি অনিশ্চিত। এই অনিশ্চয়তা হতেই সম্ভাব্যতার ধারণা করা হয়। ছক্কার গুটির উপরের পিঠে যে কোন একটি সংখ্যা থাকার সম্ভাব্যতা শতকরা 100 ভাগ। তাই এই সম্ভাব্যতা 1 মনে করা হয়। আবার মোট ছয়টি সংখ্যার মধ্যে উপরের পিঠে 5 থাকার সম্ভাব্যতা ছয় ভাগের এক ভাগ অর্থাৎ $\frac{1}{6}$ । কিন্তু এ দ্বারা এ কথা বলা যায় না যে, ছয়বার গুটি নিরপেক্ষভাবে নিক্ষেপ করলে একবার উপরে 5 থাকবে। এমনও হতে পারে 6 বার বা আরও অধিকবার গুটি নিক্ষেপ করার পর একবারও উপরের পিঠে 5 নেই বা 6 বারের মধ্যে 6 বারই 5 দেখা গেল। সুতরাং কোন একটি ঘটনার অনিশ্চয়তা হতে ঐ ঘটনার সম্ভাব্যতা ও তার পরিমাপ সম্পর্কে বিভিন্ন তত্ত্ব উদ্ভাবন করা হয়।

কোন ঘটনা অবশ্যই ঘটবে এমন হলে তার সম্ভাব্যতা 1(এক) এবং তাকে নিশ্চিত ঘটনা বলে। আবার কোন ঘটনা কখনোই ঘটবে না এমন হলে তার সম্ভাব্যতা 0(শূন্য) এবং তাকে অসম্ভব ঘটনা বলে। ঘটতেও পারে, নাও ঘটতে পারে এমন ঘটনার জন্যই শুধু সম্ভাব্যতা নির্ধারণ করা হয়। এ জাতীয় ঘটনাকে সম্ভাব্য ঘটনা বলে এবং তার সম্ভাব্যতা শূন্য থেকে এক পর্যন্ত হয়। Aএকটি নিশ্চিত ঘটনা হলে তা ঘটার সম্ভাব্যতা $P(A)=1$, কিন্তু A একটি অসম্ভব ঘটনা হলে $P(A)=0$ এবং A সম্ভাব্য ঘটনা হলে $0\leq P(A)\leq 1$.

অনুশীলনী ১২.১

1. সম্ভাব্যতার ধারণা ব্যাখ্যা করুন।
2. নিশ্চিত ঘটনা, অসম্ভব ঘটনা ও সম্ভাব্য ঘটনার সংজ্ঞা দিন।
3. $P(A)=0$ এবং $P(A)=1$ সম্ভাবনার কি অর্থ বহন করে?

4. সম্ভাব্য ঘটনার ক্ষেত্রে $O \leq P(A) \leq 1$ কি অর্থ প্রকাশ করে?
5. সম্ভাব্যতা বলতে কি বুঝেন? উদাহরণসহ লিখুন।

পাঠ-২
ঘটনা ও ঘটন জগত

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- ঘটনা কি ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- ঘটন জগত সম্পর্কে ধারণা পাবেন;
- বিভিন্ন ধরনের ঘটনার সংজ্ঞা দিতে পারবেন।

ঘটনা ও ঘটন জগত

সম্ভাব্যতার আলোচনায় পরীক্ষণ এবং ঘটনা এর ধারণা থাকা অতি জরুরী। নিম্নে এগুলো আলোচনা করা হলো–

পরীক্ষণ ঃ একটি নির্দিষ্ট অবস্থায় কতগুলো নির্দিষ্ট শর্তের অধীনে কোন কাজ পুনরাবৃত্তি করা হলে উহাকে পরীক্ষণ বলা হয়। পরীক্ষণ হল এমন একটি উপায় বা ব্যবস্থা যার মাধ্যমে একটি ঘটনার সম্ভাব্যতা বা নিশ্চয়তা পরিমাপ করা হয়। পরক্ষিণ সম্পাদনের মাধ্যমেই ভবিষ্যতে ঘটতে পারে এরূপ ঘটনার উপর উপসংহার টানা যায় এবং মন্তব্য করা যায়।

একটি ছক্কার ছয়টি পিঠ থাকে। ছক্কাটির ছয়টি পিঠ সুষম অর্থাৎ ছক্কাটি নিরপেক্ষ এ শর্তাধীনে ছক্কাটিতে বেশ কয়েকবার নিক্ষেপ করে এর উপরের পিঠ কোন্ সংখ্যা $(1,2,3,4,5$ বা $6)$ নির্দেশ করে তা বের করার প্রক্রিয়া একটি পরীক্ষণ।

ঘটনা ঃ পরীক্ষণের ফলাফল দ্বারা ঘটনা প্রকাশ করা হয়। কোন পরীক্ষণের প্রাপ্ত একটি নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের অনুকূলে ফলাফলের সেটকে ঘটনা বলা হয়।

যেমন– একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় প্রাপ্ত জোড় সংখ্যার ঘটনা হবে নিম্নরূপ–

$$A = \{2,4,6\}$$

ঘটন জগত ঃ যে সকল ক্ষেত্রে ঘটনা ঘটতে পারে তাকেই ঘটনজগত বলা হয়। কিছু কিছু এমন ঘটনা আছে যার একটি ঘটলে অপরটি ঘটতে পারে না। যেমন কেউ পাস করলে সে ফেল করতে পারে না, ছক্কার গুটিতে জোড় সংখ্যা উঠলে বেজোড় সংখ্যা উঠতে পারে না ইত্যাদি। এরূপ ঘটনাকে বর্জনশীল ঘটনা বলা হয়। এক্ষেত্রে একটি গৃহীত হলে অপরটি বর্জিত হয়।

বর্জনশীল ঘটনা ঃ দুই বা ততোধিক ঘটনাকে তখনই বর্জনশীল ঘটনা বলা হয় যখন এদের যে কোন একটি ঘটনা ঘটলে অপর ঘটনা বা ঘটনাগুলো কোনক্রমেই ঘটা সম্ভব হয় না। উদাহরণস্বরূপ একটি মুদ্রা নিক্ষেপ করলে এর যে কোন পিঠ উপরে উঠলে একই সময়ে অপর পিঠ কখনোই উপরে উঠতে পারে না অর্থাৎ মুদ্রার হেড উপরে আসলে টেল উপরে আসতে পারবে না। কোন সময়েই একত্রে দুটি পিঠ উপরে আসে না। এরূপ অবস্থায় হেড ও টেল পড়বার ঘটনা দুটিকে পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা বলে।

অবর্জনশীল ঘটনা ঃ দুটি ঘটনাকে তখনই অবর্জনশীল ঘটনা বলা হয় যখন এদের একটি ঘটলে অপরটি ঘটতে পারে অর্থাৎ অপরটি ঘটবার সম্ভাব্যতা সম্পূর্ণরূপে লোপ পায় না। উদাহরণস্বরূপ 52 তাসের একটি প্যাকেট হতে 1টি তাস টানা হল। ঘটনা A দ্বারা তাসটি কালো এবং B দ্বারা তাসটি রাজা হবার ঘটনা প্রকাশ করে। যদি A ঘটনা ঘটে তবে কালো রাজা আসতে পারে। সেক্ষেত্রে একই সাথে B ঘটনা ঘটে যাবে এবং A ও B পরস্পর

অবর্জনশীল ঘটনা হবে।

অনুশীলনী–১২.২

1. ঘটনা ও ঘটনজগত এর সংজ্ঞা দিন।
2. উপযুক্ত উদাহরণ সহকারে পরস্পর নির্ভরশীল ঘটনা ব্যাখ্যা করুন।
3. অবর্জনশীল ঘটনা বলতে কি বোঝেন?
4. পরীক্ষণ কি? ছক্কা নিক্ষেপের মাধ্যমে এর ব্যাখ্যা দিন।

পাঠ-৩
সম্ভাব্যতার পরিমাপক

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- সম্ভাব্যতার পরিমাপক কি বলতে পারবেন;
- সম্ভাব্যতা কিভাবে পরিমাপ করা হয় ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

সম্ভাব্যতার পরিমাপক

সম্ভাব্যতার পরিমাপক আলোচনা করার পূর্বে আমরা সম সম্ভাব্য ঘটনা, নমুনা ক্ষেত্র এবং নমুনা বিন্দু নিয়ে আলোচনা করব।

সম সম্ভাব্য ঘটনা ঃ যদি দুই বা ততোধিক ঘটনা এরূপ হয় যে, এদের ঘটবার সময় একটি অপর যে কোনটি অপেক্ষা কম বা বেশি পরিমাণ আশা করা যায় না, তবে এদেরকে সম-সম্ভাব্য ঘটনা বলা হয়। অর্থাৎ প্রতিটি ঘটনার সম্ভাব্যতা সমান হলে তারা সম-সম্ভাব্য ঘটনা।

উদাহরণ ঃ ছক্কা নিক্ষেপের পরীক্ষায় প্রতিটি নিক্ষেপ $1, 2, 3, 4, 5, 6$ এর যে কোনটি আসতে পারে এবং প্রত্যেক পিঠ সমানভাবে আশা করা যায়। তাই এ ঘটনাটি সম-সম্ভাব্য ঘটনা।

আবার নিরপেক্ষ মুদ্রা নিক্ষেপের পরীক্ষায় হেড ও টেল পড়ার ঘটনা সম-সম্ভাব্য ঘটনা।

নমুনা ক্ষেত্র ঃ কোন পরীক্ষায় প্রাপ্ত ফলাফলগুলোর প্রত্যেকটিকে মাত্র একবার লিখে যে সেট পাওয়া যায় তাকে ঐ পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র বলে।

যেমন– 1টি মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করলে পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র হবে ঃ

$S = \{H,T\}$ এখানে $H =$ হেড, $T =$ টেল।

আবার একটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপ করলে নমুনা ক্ষেত্র হবে ঃ

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

নমুনাবিন্দু ঃ কোন নমুনা ক্ষেত্রে যে কয়টি উপাদান থাকে তার প্রত্যেকটিকে এক একটি নমুনা বিন্দু বলে।

যেমন– 1টি মুদ্রা নিক্ষেপ করলে নমুনা বিন্দু হবে 2টি। এরা হল H, T । আবার একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে নমুনা বিন্দু হবে 6টি। এরা হল ঃ $1, 2, 3, 4, 5, 6$।

নিম্নে সম্ভাব্যতার পরিমাপক নিয়ে আলোচনা করা হল ঃ

সম্ভাব্যতা একটি এককবিহীন সংখ্যা যার মাধ্যমে কোন ঘটনার নিশ্চয়তা পূর্ণ গাণিতিক উপায়ে নির্ণয় করা যায়। সাধারণভাবে কোন ঘটনা ঘটবার উপায় সংখ্যা এবং ঐ ঘটনা যে দৈব পরীক্ষার সাথে সংশ্লিষ্ট তা সংঘটিত হবার উপায় সংখ্যার অনুপাতকে সম্ভাব্যতা বলা হয়।

অতএব, $\text{সম্ভাব্যতা} = \dfrac{\text{ঘটনা সংঘটিত হবার উপায়}}{\text{পরীক্ষা সংঘটিত হবার উপায়}}$

তবে এক্ষেত্রে শর্ত হল যে, ঘটনাগুলো অবশ্যই বর্জনশীল এবং সমসম্ভাব্য হবে।

নমুনা ক্ষেত্রের দ্বারা ঘটনার সম্ভাব্যতাকে প্রকাশ করা যায়। কোন ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা এবং

নমুনাক্ষেত্রের মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যার অনুপাতই হল সম্ভাব্যতা।

সুতরাং সম্ভাব্যতা $= \dfrac{\text{ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা}}{\text{নমুনাক্ষেত্রের মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা}}$

কোন নমুনাক্ষেত্র S এর মোট ফলাফল সংখ্যা n অর্থাৎ $n(S)=n$ এবং এর কোন ঘটনা A এর অনুকূল ফলাফল সংখ্যা m অর্থাৎ $n(A)=m$ হলে, A ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা হবে ঃ $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{m}{n}$

যেমন ঃ একটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$ এবং এর জোড়সংখ্যার ঘটনা

$A = \{2,4,6\}$ হলে $n(S)=n=6,\ n(A)=m=3$

সুতরাং A ঘটনাটি ঘটার সম্ভাব্যতা, $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

উদাহরণ 1 ঃ একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হল। উপরের পিঠে 2 এবং 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আসার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান: একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র, $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

মেসাট নমুনাবিন্দু $n(S)=6$

2 এবং 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যার অনুকূল ফলাফল একটি। এটি হল $\{6\}$ $\therefore\ n(A)=1$

সুতরাং নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $= \dfrac{1}{6}$

উদাহরণ 2 ঃ প্রান্তিক রাশিদ্বয়কে অন্তর্ভুক্ত করে 50 হতে 70 পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর মধ্য হতে ইচ্ছামতো যে কোন একটিকে নির্বাচন করলে (ক) মৌলিক (খ) 8 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান: প্রান্তিক রাশিদ্বয়কে গণনা করে 50 হতে 70 পর্যন্ত মোট 21টি সংখ্যা আছে।

অতএব, $n(S)=21$

(ক) 21টি সংখ্যার মধ্যে 53, 59, 61, 67 এই চারটি মৌলিক সংখ্যা।

অতএব, $n(A)=4$

অতএব, প্রতিটানে মৌলিক সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাব্যতা,

$$P(A) = \frac{4}{21}$$

(খ) আবার উপরোক্ত 21 টি সংখ্যার মধ্যে 56 এবং 64 এই দুটি সংখ্যা 8 এর গুণিতক।

সুতরাং $n(B) = 2$

অতএব, ইচ্ছামতো প্রতিটানে 8 এর গুণিতক সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাব্যতা, $P(B) = \dfrac{2}{21}$

অনুশীলনী–১২.৩

1. নমুনাবিন্দু এবং নমুনাক্ষেত্রের উদাহরণসহ সংজ্ঞা লিখুন।
2. সম-সম্ভাব্য ঘটনা কি? ব্যাখ্যা করুন।
3. কিভাবে সম্ভাব্যতা পরিমাপ করা হয়? উদাহরণসহ লিখুন।

4. প্রান্তিক সংখ্যাদ্বয়সহ 50 এবং 60 এর মধ্যবর্তী সংখ্যাগুলো হতে নিরপেক্ষভাবে যে কোন একটি সংখ্যা বাছাই করলে সেটা (ক) মৌলিক, এবং (খ) 8 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন।
5. একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হল। উপরের পিঠে বিজোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবতা কত?

পাঠ-৪

সম্ভাব্যতার সংযোগ সূত্র, পূরক সূত্র এবং পূরণ সূত্র

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- সম্ভাব্যতার সংযোগসূত্র কি জানতে পারবেন;
- সম্ভাব্যতার পূরক ও পূরণ সূত্র ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- উপরোক্ত সূত্রগুলো প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন।

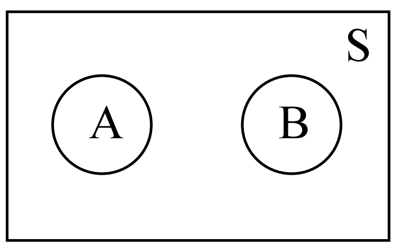
সম্ভাব্যতার সংযোগ সূত্র

বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে ঃ দুটি বর্জনশীল ঘটনার যে কোন একটি ঘটার সম্ভাব্যতা এদের প্রত্যেকটির পৃথক পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাব্যতার যোগফলের সমান।

অর্থাৎ A ও B দুটি বর্জনশীল ঘটনা হলে

$P(A$ অথবা $B) = P(A \approx B) = P(A)+P(B)$

প্রমাণ ঃ ধরা যাক, E দৈব পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র S, S নমুনাক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট দুটি ঘটনা A এবং B, A এবং B ঘটনাদ্বয় বর্জনশীল। এদেরকে নিম্নে ভেনচিত্রে দেখানো হল ঃ



চিত্র: ১২.৪.১

ধরা যাক, S নমুনাক্ষেত্রের মোট উপাদান সংখ্যা= $n(S)$

A ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা = $n(A)$

B ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা = $n(B)$

অতএব, A ঘটনার সম্ভাবনা, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

B ঘটনার সম্ভাবনা, $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)}$

A ও B বর্জনশীল ঘটনা বলে এদের মধ্যে কোন সাধারণ বিন্দু নাই। সুতরাং A ও B এর সংযোগ $(A \approx B)$ ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দু হবে A এবং B ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর যোগফল।

$A \approx B$ এর অনুকূল নমুনাবিন্দু = $n(A \approx B) = n(A)+n(B)$

যেহেতু $A \approx B$ দ্বারা A অথবা B ঘটনা নির্দেশিত হয়, তাই

$P(A$ অথবা $B) = \dfrac{n(A \approx B)}{n(S)} = \dfrac{n(A)+n(B)}{n(S)}$

বা, $P(A \approx B) = \dfrac{n(A)}{n(S)} + \dfrac{n(B)}{n(S)}$

অতএব, $P(A \approx B) = P(A)+P(B)$

উল্লেখ্য, দুটির অধিক বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রেও উপরের উপপাদ্যটি সত্য। যদি A,B,C তিনটি বর্জনশীল ঘটনা হয় তবে $P(A \approx B \approx C) = P(A)+P(B)+P(C)$

অনুরূপে, $P(A_1 \approx A_2 \approx A_3 \approx \text{------} \approx A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\text{-----}+P(An)$

উদাহরণ 1 ঃ 10 থেকে 30 পর্যন্ত সংখ্যা হতে যে কোন একটিকে ইচ্ছামতো নিলে সেই সংখ্যাটি মৌলিক বা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে নমুনাক্ষেত্র $S = \{10,11,12,13,14,\text{------},28,29,30\}$

অতএব, $n(S)=21$

মৌলিক সংখ্যার সেট, $A= \{11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

অতএব, $n(A)=6$

5 এর গুণিতক সংখ্যার সেট, $B = \{10,15,20,25,30\}$

অতএব $n(B)=5$

ঘটনা দুটির অনুকূল সেট = $A \approx B$, কারণ, $A \approx B$ সেটের যে কোন উপাদান A সেটে থাকবে, B সেটে থাকবে অথবা উভয় সেটে থাকবে।

সুতরাং $n(A \approx B) = n(A)+n(B)$

এখন $n(A) = \dfrac{6}{21}$ এবং $n(B) = \dfrac{5}{21}$

অতএব, $n(A \approx B) = \dfrac{6}{21} + \dfrac{5}{21} = \dfrac{6+5}{21} = \dfrac{11}{21}$

সুতরাং নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $= \dfrac{11}{21}$

সম্ভাব্যতার পূরক সূত্র

দুটি বর্জনশীল ঘটনা একসাথে ঘটার সম্ভাব্যতা এদের পৃথক পৃথক সম্ভাব্যতার গুণফলের সমান।

যদি A ও B ঘটনাদ্বয় পরস্পর বর্জনশীল হয়, তবে

$P(A$ এবং $B) = P(A)\ P(B)$

অথবা $P(AB) = P(A)\ P(B)$

প্রমাণ ঃ মনে করুন E_1 এবং E_2 দুটি বর্জনশীল পরীক্ষা। E_1 পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র S_1, E_2 পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র S_2, E_1 পরীক্ষার সাথে সংশ্লিষ্ট একটি ঘটনা A এবং E_2 পরীক্ষার সাথে সংশ্লিষ্ট অপর একটি ঘটনা B এবং A ও B পরস্পর বর্জনশীল।

ধরাযাক, S_1 নমুনাক্ষেত্রের মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা, $n(S_1)=N$ এবং A ঘটনার অনুকূল মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা, $n(A)=n$

অতএব, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S_1)} = \frac{n}{N}$

আবার S_2 নমুনাক্ষেত্রের মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা, $n(S_2)=M$ এবং B ঘটনার অনুকূল মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা, $n(B)=m$

অতএব, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S_2)} = \frac{m}{M}$

E_1 ও E_2 পরীক্ষাদ্বয় বর্জনশীল। তাই S_1 ও S_2 নমুনাক্ষেত্রদ্বয়ের নমুনাবিন্দুগুলো পরস্পর বর্জনশীলভাবে যুক্ত হবে এবং E_1 ও E_2 এর সম্মিলিত নমুনাক্ষেত্রের মোট NM সংখ্যক নমুনাবিন্দু থাকবে।

আবার, A ও B ঘটনাদ্বয় বর্জনশীল বলে এদের নমুনাবিন্দুগুলো বর্জণশীলভাবে যুক্ত হয়ে সম্মিলিত নমুনাক্ষেত্রে $(A \leftrightarrow B)$ mn সংখ্যক নমুনাবিন্দু তৈরি করবে।

অতএব, $n(A \leftrightarrow B) = mn$

এখন, $P(A$ এবং $B) = P(A \leftrightarrow B)$

$= \frac{A \text{ এবং } B \text{ ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা}}{\text{সম্মিলিত পরীক্ষার মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা}}$

$= \frac{n(A \leftrightarrow B)}{NM} = \frac{nm}{NM}$

$= \frac{n}{N} * \frac{m}{M}$

$= P(A) * P(B)$

অতএব, $P(A$ এবং $B) = P(A) * P(B)$

উল্লেখ্য, দুইয়ের অধিক বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রেও উপরের সূত্রটি সত্য।

$P(A \leftrightarrow B \leftrightarrow C) = P(A)\, P(B)\, P(C)$

এবং $P(A_1 \leftrightarrow A_2 \leftrightarrow A_3 \leftrightarrow \text{-----} \leftrightarrow A_n) = P(A_1)\, P(A_2) \,.....\, P(A_n)$

উদাহরণ 2 ঃ একটি জুতা শিল্প প্রকল্প আর্থিক সহায়তা পাবার জন্য তিনটি সংস্থার বিবেচনাধীন রয়েছে। নির্দিষ্ট প্রকল্পের জন্য মাত্র একটি সংস্থা থেকে ঋণ নেয়া গেলে এবং সংস্থা তিনটির প্রথমটিতে তিনটি, দ্বিতীয়টিতে চারটি এবং তৃতীয়টিতে দুটি প্রকল্প বিবেচনাধীন থাকলে জুতা শিল্প প্রকল্পটির যেকোন একটি সংস্থা থেকে আর্থিক সহায়তা প্রাপ্তির সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান ঃ ধরা যাক, A = প্রথম সংস্থা থেকে সহায়তা পাবার ঘটনা

B = দ্বিতীয় সংস্থা থেকে সহায়তা পাবার ঘটনা

C = তৃতীয় সংস্থা থেকে সহায়তা পাবার ঘটনা।

অতএব, $P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{4}, \quad P(C) = \frac{1}{2}$

$\therefore P(\bar{A}) = \frac{2}{3}, \quad P(\bar{B}) = \frac{3}{4}, \quad P(\bar{C}) = \frac{1}{2}$

অতএব, প্রকল্পটির কোন সংস্থা থেকেই সাহায্য না পাবার সম্ভাবনা

$$=\frac{2}{3}*\frac{3}{4}*\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

সুতরাং যে কোন একটি থেকে সহায়তা পাবার সম্ভাব্যতা $=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

সম্ভাব্যতার পূরণ সূত্র

কতগুলো পরস্পর অনপেক্ষ ঘটনা ঘটার সম্ভাবতা P_1, P_2, P_3 ---- হলে এবং প্রত্যেকটি ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা অপরটির সমরূপ হলে, সকল ঘটনা একত্রে ঘটার সম্ভাব্যতা $P_1P_2P_3$-- এর সমান।

উদাহরণ 3 ঃ 52টি তাসের একটি প্যাকেট হতে যেমন খুশি টেনে ধারাবাহিকভাবে চারটি টেক্কা পাওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ 52টি তাসের মধ্যে মোট টেক্কা আছে 4টি,

সুতরাং প্রথম সুযোগে টেক্কা পাওয়ার সম্ভাব্যতা $=\frac{4}{52}$

পরে একটি টেক্কা পাওয়ার সম্ভাব্যতা $=\frac{3}{51}$

এরপরে একটি টেক্কা পাওয়ার সম্ভাব্যতা $=\frac{2}{50}$

সর্বশেষ টেক্কা পাওয়ার সম্ভাব্যতা $=\frac{1}{49}$

পূরণ সূত্র অনুসারে 4টি টেক্কা ধারাবাহিকভাবে পাওয়ার সম্ভাব্যতা=

$$\frac{4}{52}*\frac{3}{51}*\frac{2}{50}*\frac{1}{49}=\frac{1}{270725}$$

অনুশীলনী–১২.৪

1. দুটি বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার যোগসূত্র বিবৃত করুন এবং প্রমাণ করুন।
2. দুটি বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার পূরক সূত্রটি বিবৃত করুন ও প্রমাণ করুন।
3. একটি প্যাকেট থেকে কোন একটি তাস নিলে সেটি টেক্কা বা রাজা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?
4. একটি বাক্সে 7টি লাল, 5টি নীল এবং 3টি সাদা বল আছে। বলগুলোর দিকে না তাকিয়ে একটি বল তুলে নিলে সেটি লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?
5. একটি বাক্সে 4টি লাল এবং 6টি নীল বল আছে। অপর একটি বাক্সে 6টি লাল এবং 7টি নীল বল আছে। প্রত্যেক বাক্স থেকে একটি করে বল নিলে দুটি লাল বল পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত?
6. একটি বাক্সে 10টি নীল এবং 15টি লাল মার্বেল আছে। একটি বালক যেমন খুশি টানলে প্রতিবারে দুটি ভিন্ন রংয়ের মার্কেল পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত?
7. একটি পরীক্ষায় 10জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে ঠিক তিনজন পাশ করার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন। সকলেই সমান মেধাবী ধর্তব্য।

পাঠ-৫
শর্তাধীন সম্ভাব্যতার সূত্র

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- শর্তাধীন সম্ভাব্যতা কি বলতে পারবেন;
- শর্তাধীন সম্ভাব্যতার সূত্র বর্ণনা করতে পারবেন;
- শর্তাধীন সম্ভাব্যতার সূত্র প্রয়োগ করার দক্ষতা অর্জন করবেন।

শর্তাধীন সম্ভাব্যতা

যদি একটি ঘটনা পূর্বে সংঘটিত একটি ঘটনা ঘটার উপর নির্ভর করে তবে ঘটনাটিকে পূর্বের ঘটনার সাপেক্ষে অধীন ঘটনা বলা হয়। তখন পূর্বের ঘটনা ঘটে গেছে এ শর্তাধীনে পরবর্তী ঘটনা ঘটবার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করলে প্রাপ্ত সম্ভাব্যতাকে পূর্ববর্তী ঘটনার সাপেক্ষে শর্তাধীন সম্ভাব্যতা বলা হয়।

ধরা যাক, A ও B দুটি অধীন ঘটনা। A ঘটনা ঘটেছে এ শর্তাধীনে B ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতাকে A এর সাপেক্ষে B এর শর্তাধীন সম্ভাব্যতা বলা হয় এবং উহাকে $P\left(\frac{B}{A}\right)$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং পড়া হয় $P(A \text{ given } B)$।

B ঘটনার সাপেক্ষে A ঘটনা ঘটার শর্তাধীন সম্ভাব্যতা $P\left(\frac{A}{B}\right)$ বা $P(B \text{ given } A)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

সংজ্ঞা ঃ কোন নমুনাক্ষেত্রে A এবং B দুটি ঘটনা এবং $P(B)>0$ হলে, B ঘটনাটি ঘটার শর্তাধীনে A ঘটনাটি ঘটার সম্ভাব্যতা $P\left(\frac{A}{B}\right)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সংকেতের সাহায্যে, $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \leftrightarrow B)}{P(B)},\ P(B) \neq 0$

যেমন একটি পাত্রে 4টি কালো এবং 5টি সাদা বল আছে। পুনঃস্থাপন ব্যতিরেকে 2টি বল টানা হল। প্রথম উত্তোলিত বলটি সাদা এই শর্তাধীনে দ্বিতীয় উত্তোলিত বলটি কালো হবার সম্ভাবনা নির্ণয় করলে তাকে শর্তাধীন সম্ভাব্যতা বলা হবে।

উদাহরণ 1 ঃ কোন কারখানায় 100 জন শ্রমিকের একটি জরিপের তথ্য নিম্নরূপ–

	পুরুষ	মহিলা	মোট
বিবাহিত	40	20	60
অবিবাহিত	10	30	40
মোট	50	50	100

নিরপেক্ষভাবে একজনকে বাছাই করলে–

(ক) বিবাহিত পুরুষ

(খ) অবিবাহিত মহিলা হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ (ক) ধরা যাক,

E_1 = বিবাহিত নির্বাচিত হওয়ার ঘটনা

এবং E_2 = পুরুষ নির্বাচিত হওয়ার ঘটনা

অতএব, $P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{P(E_1 \leftrightarrow E_2)}{P(E_1)} = \frac{\frac{40}{100}}{\frac{40+20}{100}} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$

(খ) আবার ধরা যাক,

E_3 = অবিবাহিত নির্বাচিত হওয়ার ঘটনা

এবং E_4 = মহিলা নির্বাচিত হওয়ার ঘটনা।

অতএব, $P\left(\frac{E_4}{E_3}\right) = \frac{P(E_3 \leftrightarrow E_4)}{P(E_3)} = \frac{\frac{30}{100}}{\frac{10+30}{100}} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

উদাহরণ 2 ঃ বাংলাদেশ উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ে শতকরা 75 জন চাত্র এবং বাকী সবাই ছাত্রী। একজন ছাত্র বিজ্ঞান বিভাগের হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{5}$ এবং একজন ছাত্রী বিজ্ঞান বিভাগের হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{20}$ । সমস্ত ছাত্র-ছাত্রীদের মধ্য থেকে একজনকে দৈবায়িত চয়ন করা হলে, সে বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান ঃ ধরুন, মোট ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা x

অতএব, ছাত্রসংখ্যা $= \frac{75x}{100}$

ছাত্রীসংখ্যা $= \frac{25x}{100}$

আবার, ধরুন, ঘটনা A = নির্বাচিত ব্যক্তি ছাত্র হওয়ার ঘটনা

ঘটনা B = নির্বাচিত ব্যক্তি বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র হওয়ার ঘটনা

ঘটনা $\frac{B}{A}$ = একজন ছাত্র বিজ্ঞান বিভাগের হওয়ার ঘটনা।

এখন P(নির্বাচিত ব্যক্তি বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র)

$= P(A \leftrightarrow B)$

$= P(A)\, P\left(\frac{B}{A}\right)$ যেহেতু $P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \leftrightarrow B)}{P(A)}$

$= \frac{\frac{75x}{100}}{x} * \frac{1}{5}$

$= \frac{75}{100} * \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$

পাঠ-৬

বায়েস সূত্র

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- বায়েসের সূত্র সম্পর্কে ধারনা পাবেন;
- বায়েসের সূত্র প্রমাণ করতে পারবেন;
- বায়েসের সূত্র প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন।

বায়েস সূত্র (Boyes law)

একটি পরীক্ষণের ফলাফল জানার পর অবলোকিত ফল অনেকগুলো কারণের যে কোন একটি হতে উদ্ভূত হয়েছে কিনা যদি কেউ তার সম্ভাব্যতা বের করতে চান, তাহলে সেক্ষেত্রে বায়েস সূত্রের প্রয়োগ দরকার হবে।

উদাহরণস্বরূপ মনে করুন, একটি পাত্রে সম আকৃতির 5 টি লাল এবং 2 টি কালো বল আছে। অপর একটি অনুরূপ পাত্রে শুধু 6টি সম আকৃতির বল আছে। একটি পাত্র দৈব চয়ন পদ্ধতিতে নির্বাচন করা হল এবং একটি বল তোলা হল। যদি উত্তোলিত বলটি লাল হয় তাহলে প্রথম পাত্রটি যে নির্বাচিত হয়েছে তার সম্ভাব্যতা কত? এরূপ সমস্যার সমাধান পাওয়া যাবে বায়েস সূত্র প্রয়োগ করে।

বায়েস সূত্রের বর্ণনা

$A_1, A_2,$ ------ A_n পরস্পর বর্জিত n সংখ্যক ঘটনা যেখানে $A_i>0$ এবং এদের মিলনে একটি পরীক্ষণের নমুনাক্ষেত্র S তৈরি হয়। যদি E, নমুনাক্ষেত্র S এর যে কোন একটি ঘটনা এবং $P(E) \neq 0$ হয় তবে,

$$P\left(\frac{A_i}{E}\right) = \frac{P(A_i)\, P\left(\frac{E}{A_i}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)\, P\left(\frac{E}{A_i}\right)}, \quad i=1,2, -----, n$$

প্রমাণ : যেহেতু $P(A_i)>0,\ i=1, 2, 3, ----, n$ এবং $P(E)>0$

সুতরাং $P(A_i \leftrightarrow E) = P(A_i)\, P\left(\frac{E}{A_i}\right)$

এবং $P(A_i \leftrightarrow E) = P(E)\, P\left(\frac{A_i}{E}\right)$

সুতরাং $P(E)\, P\left(\frac{A_i}{E}\right) = P(A_i)\, P\left(\frac{E}{A_i}\right)$

বা, $P\left(\frac{A_i}{E}\right) = \frac{P(A_i)\, P\left(\frac{E}{A_i}\right)}{P(E)}$ -------- (i)

আবার, $E = E \leftrightarrow S$

$$= E \leftrightarrow \left(\Box A_i \right)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} (E \leftrightarrow A_i)$$

অতএব $P(E) \quad = P\left[\Box (E \leftrightarrow A_i) \right]$

$$= {}_{i=1}^{n} P(E \leftrightarrow A_i)$$

$$= {}_{i=1}^{n} P(A_i)\, P\left(\frac{E}{A_i}\right) \text{ -------- (ii)}$$

এখন (ii) নং হতে $P(E)$ এর মান (i) নং এ ব্যবহার করে পাওয়া যায়–

$$P\left(\frac{A_i}{E}\right) = \frac{P(A_i)\, P\left(\frac{E}{A_i}\right)}{{}_{i=1}^{n} P(A_i)\, P\left(\frac{E}{A_i}\right)}$$

উদাহরণ 1 ঃ কোন একটি কারখানায় মেশিন A এবং B তে উৎপাদিত পণ্যের পরিমাণ 55% এবং 45%. A মেশিনে উৎপাদিত পণ্যের 5% খারাপ এবং B মেশিনে উৎপাদিত পণ্যের 6% খারাপ। একটি খারাপ পণ্য নেয়া হলে তা A মেশিনের হওয়ায় সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান ঃ এখানে $n=2$, কারণ কেবলমাত্র 2টি মেশিন বিদ্যমান

A = একটি পণ্য A মেশিনের হওয়ার ঘটনা = A_1 (সূত্রানুসারে)

B = একটি পণ্য B মেশিনের হওয়ার ঘটনা = B_1 (সূত্রানুসারে)

E = একটি পণ্য খারাপ হওয়ার ঘটনা

$P(A) = 55\% = 0.55$

$P(B) = 45\% = 0.45$

$P\left(\frac{E}{A}\right) = A$ মেশিনের উৎপাদিত পণ্য খারাপ হওয়ার সম্ভাব্যতা

$= 5\% = 0.05$

$P\left(\frac{E}{B}\right) = B$ মেশিনের উৎপাদিত পণ্য খারাপ হওয়ার সম্ভাব্যতা = 6% = 0.06

একটি খারাপ পণ্য A মেশিনের হওয়ার সম্ভাব্যতা $= P\left(\frac{A}{E}\right)$

অতএব, $$P\left(\frac{A}{E}\right) = \frac{P(A_1)\,P\left(\frac{E}{A_1}\right)}{P(A_1)\,P\left(\frac{E}{A_1}\right)+P(A_2)\,P\left(\frac{E}{A_2}\right)} = \frac{P(A)\,P\left(\frac{E}{A}\right)}{P(A)\,P\left(\frac{E}{A}\right) + P(B)\,P\left(\frac{E}{B}\right)}$$

$$= \frac{0.55*0.05}{0.55*0.05+0.45*0.06}$$

$$= 0.0504$$

উদাহরণ 2 ঃ তিনটি পাত্র A_1, A_2 এবং A_3 তে বিভিন্ন অনুপাতে সাদা, কালো এবং লাল বল আছে। A_1 পাত্রে 1টি সাদা, 2টি কালো এবং 3টি লাল বল; A_2 পাত্রে 2টি সাদা, 1টি কালো এবং 1টি লাল বল এবং A_3 পাত্রে 4টি সাদা, 5টি কালো এবং 3টি লাল বল আছে। দৈবভাবে একটি পাত্র নির্বাচন করা হলো এবং সেখান থেকে 2টি বল তোলা হল। প্রাপ্ত বল দুটির মধ্যে একটি সাদা ও একটি লাল। বলগুলো A_3 পাত্র থেকে পাওয়া গেছে তার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান ঃ যেহেতু পাত্র তিনটি নির্বাচনের ক্ষেত্রে সমসম্ভাব্য ঘটনা।

সুতরাং $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$

ধরি, E= প্রাপ্ত বলগুলোর একটি সাদা এবং একটি লাল হবে এমন ঘটনা।

$$\therefore P\left(\frac{E}{A_1}\right) = \frac{{}^{1}C_1 * {}^{3}C_1}{{}^{6}C_2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

অনুরূপে, $P\left(\frac{E}{A_2}\right) = \frac{1}{3}$ এবং $P\left(\frac{E}{A_3}\right) = \frac{2}{11}$

$P\left(\frac{A_3}{\mathrm{E}}\right)$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

অতএব, $$P\left(\frac{A_3}{\mathrm{E}}\right) = \frac{P(A_3)\,P\left(\frac{E}{A_3}\right)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)\,P\left(\frac{E}{Ai}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}*\text{জ}f(2,11)}{\frac{1}{3}*\text{জ}f(1,5) + \frac{1}{3}*\text{জ}f(1,3) + \frac{1}{3}*\text{জ}f(2,11)}$$

$$= \frac{15}{59}$$

অনুশীলনী– ১২.৬

1. বায়েস সূত্রের বিবৃত করুন এবং প্রমাণ করুন।
2. কোন একটি বল্টু কারখানার M_1, M_2 এবং M_3 যন্ত্রে যথাক্রমে মোট উৎপাদনের 25%, 35% এবং 40% উৎপাদিত হয় এবং যন্ত্রত্রয় উৎপাদিত বল্টুগুলোর যথাক্রমে 5%, 4% এবং 2% ত্রুটিপূর্ণ। উৎপাদিত বল্টুগুলো হতে একটি বল্টু তোলা হল এবং দেখা গেল বল্টুটি ত্রুটি পূর্ণ। তোলা বল্টুটি M_2 যন্ত্রে উৎপাদিত হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন।
3. কোন কারখানার মেশিন A 30% এবং মেশিন B 70% দ্রব্য উৎপাদন করে। মেশিন A এর উৎপাদিত 1000টি দ্রব্যের মধ্যে গড়ে 20টি এবং মেশিন B এর উৎপাদিত 220টি দ্রব্যের মধ্যে গড়ে 11টি দ্রব্য ক্রটিপূর্ণ। ঐ মিলের উৎপাদিত দ্রব্যগুলোর মধ্য থেকে নির্বিচারে একটি দ্রব্য লওয়া হল এবং দেখা গেল যে সেটি ক্রটিপূর্ণ।

   সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন ঃ (ক) A মেশিনে প্রস্তুত।

   (খ) B মেশিনে প্রস্তুত।

উত্তরমালা

অনুশীলনী ১২.৩

4. $\frac{2}{11}, \frac{2}{11}$ 5. $\frac{1}{2}$

অনুশীলনী ১২.৪

3. $\frac{2}{13}$ 4. $\frac{2}{3}$ 5. $\frac{12}{65}$ 6. $\frac{1}{2}$ 7. $10_{C_3} * \left(\frac{1}{2}\right)^3 * \left(\frac{1}{2}\right)^7$

অনুশীলনী ১২.৬

2. $\frac{28}{69}$ 3. $\frac{12}{19}, \frac{7}{19}$