ইউনিট ১৪
ক্যালকুলাস

ভূমিকা

পাঠ্যপুস্তকের তত্ত্বীয় অংশে ইউনিট-১ থেকে ইউনিট-৫ পর্যন্ত ফাংশন, সীমা, অন্তরক, অন্তরকের প্রয়োগ, যোগজ ইত্যাদি সম্পর্কে আপনারা জ্ঞান লাভ করেছেন। তত্ত্বীয়ভাবে জ্ঞান অর্জন পরিপূর্ণ হয় না। হাতে কলমে জ্ঞান লাভ জ্ঞান অর্জনের ক্ষেত্রকে আরও প্রসারিত করে। বর্তমান ইউনিটে হাতে কলমে লেখের সাহায্যে ফাংশনের সীমা নির্ণয় ও অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা, অন্তরকের আসন্ন মান ও ভুলের মাত্রা নির্ণয়, নির্দিষ্ট ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় ইত্যাদি সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য ঃ এই ইউনিট শেষে আপনি–

- লেখের সাহায্যে ফাংশনের সীমা নির্ণয় করতে পারবেন;
- লেখের সাহায্যে ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা করতে পারবেন;
- লেখের সাহায্যে ফাংশনের অন্তরকের আসন্ন মান ও ভুলের মাত্রা নির্ণয় করতে পারবেন;
- পুনরাবৃত্তি পদ্ধতি প্রয়োগ করে $f(x)=0$ সমীকরণের মূলের আসন্ন মান নির্ণয় করতে পারবেন;
- $A \cong h\left(\frac{y_o}{2} + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_n + \frac{y_n}{2}\right)$ সূত্র প্রয়োগ করে $y = f(x)$ রেখা এবং x অক্ষরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ তলের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান নির্ণয় করতে পারবেন।

পাঠ-১
লেখের সাহায্যে ফাংশনের সীমা নির্ণয়

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- লেখের সাহায্যে ফাংশনের সীমা নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

সীমার সংজ্ঞা ঃ মনে করুন $I \wp R$ অর্থাৎ I বাস্তব সংখ্যা সেট R এর কোন ব্যবধি। করুন $x_o \square I$ এবং f, I এর উপর সংজ্ঞায়িত কোন ফাংশন। যদিও f, I এর উপর সংজ্ঞায়িত x_0 বিন্দুতে f এর মান নাও থাকতে পারে। এখন x যদি x_o এর খুব নিকটবর্তী হয়, এবং যদি $f(x)$ এর মান কোন নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা L-এর দিকে ধাবিত হয়, তবে আমরা বলতে পারি x_o বিন্দুতে ফাংশন f এর সীমা L এবং নিম্নলিখিতভাবে তা প্রকাশ করতে পারি

$$\lim_{x \varnothing x_0} f(x) = L$$

সমস্যা নং- 1	**তারিখ ঃ**

সমস্যা ঃ $y = f(x) = 2x$ ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করুনএবং চিত্র হতে $\lim_{x \varnothing 2} f(x)$ নির্ণয় করুন।

সমাধান

তত্ত্ব (*Theory*) ঃ যদি $f(x)$ ফাংশনের x-এর মান x_o-এর খুব নিকটবর্তী হয়, এবং যদি $f(x)$ এর মান কোন নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা L-এর খুব নিকটবর্তী হয়, তবে বলা যায় x_o বিন্দুতে ফাংশন $f(x)$ এর সীমা L এবং একে $\lim_{x \varnothing x_0} f(x) = L$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ পেন্সিল, স্কেল, ইরেজার, ছক কাগজ, সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

১। প্রদত্ত সমীকরণে x এর ভিন্ন ভিন্ন মান ধরে y এর ভিন্ন ভিন্ন মান নির্ণয় করুন।

২। বর্গাঙ্কিত ছক কাগজের ক্ষুদ্র বর্গের 5 বর্গ = 1 একক ধরে উপর্যুক্ত পদ্ধতিতে নির্ণীত সকল (x,y) বিন্দুকে স্থানাঙ্কায়িত করুন। স্থানাঙ্কায়িত বিন্দুগুলোকে সরু পেন্সিল দিয়ে সংযোজিত করে $y=f(x)=2x$ ফাংশনটি অঙ্কন করুন। ইহা একটি সরলরেখা হবে।

চিত্র : ১৪.১.১

৩। এখন 2 এর নিচের ও উপরের নিকটবর্তী x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $y=f(x)$ এর বিভিন্ন মান নিয়ে নিম্নোক্ত ছক তৈরি করুন।

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	2	3	6
1.5	3	2.5	5
1.9	3.8	2.1	4.2
1.99	3.98	2.01	4.02
1.9999	3.9998	2.0001	4.0002
1.9999999	3.9999998	2.0000001	4.0000002

এই মানগুলো লেখচিত্রে বসালে দেখা যায় যে,

(i) x-এর মান যখন ছোট থেকে 2 এর দিকে যায়, তখন $f(x)$ এর মান 4 এর দিকে ধাবিত হয়।

(ii) আবার x-এর মান যখন বড় থেকে 2 এর দিকে যায় $f(x)$ এর মান তখন 4 এর দিকে ধাবিত হয়।

অতএব, আমরা বলতে পারি, $\lim_{x \varnothing 2} f(x) = \lim_{x \varnothing 2} 2x = 4$

সমস্যা নং-2	**তারিখ ঃ**

সমস্যা ঃ $y=f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করুনএবং চিত্র হতে $\lim_{x \varnothing 1} f(x)$ নির্ণয় করুন।

সমাধান

তত্ত্ব ঃ যদি $f(x)$ ফাংশনের x-এর মান x_o-এর খুব নিকটবর্তী হয়, এবং যদি $f(x)$ এর মান কোন নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা L-এর খুব নিকটবর্তী হয়, তবে বলা যায় x_o বিন্দুতে ফাংশন $f(x)$ এর সীমা L এবং একে $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ পেন্সিল, স্কেল, ইরেজার, ছক কাগজ, সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি

১। প্রদত্ত সমীকরণে 1 ব্যাতীত x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য y এর ভিন্ন ভিন্ন মান নির্ণয় করুন।

২। বর্গাঙ্কিত ছক কাগজের ক্ষুদ্র বর্গের 5 বর্গ = 1 একক করে উপর্যুক্ত পদ্ধতিতে নির্ণীত সকল (x,y) বিন্দুকে স্থানাঙ্কায়িত করুন। স্থানাঙ্কায়িত বিন্দুগুলোকে সরু পেন্সিল দিয়ে সংযোজিত করে লেখচিত্রটি অঙ্কন করুন। লেখচিত্রটি $(1,2)$ বিন্দু বর্জিত একটি সরলরেখা হবে।

চিত্র : ১৪.১.২

৩। এখন 1 এর নিচের ও উপরের নিকটবর্তী x-এর বিভিন্ন মানের $y=f(x)$ এর বিভিন্ন মান নিয়ে নিম্নোক্ত ছক তৈরি করুন।

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.9	1.9	1.1	2.1
0.99	1.99	1.01	2.01
0.999	1.999	1.001	2.001
0.999999	1.999999	1.000001	2.000001

উপরোক্ত মানগুলো লেখচিত্রে বসালে দেখা যায় যে,

i) x এর মান যখন ছোট থেকে 1 এর দিকে যায়, তখন $f(x)$ এর মান 2 এর দিকে ধাবিত হয়।

ii) x-এর মান যখন বড় থেকে 1 এর দিকে যায়, তখন $f(x)$ এর মান 2 এর দিকে ধাবিত হয়।

সুতরাং আমরা বলতে পারি–

$$\lim_{x \varnothing 1} f(x) = \lim_{x \varnothing 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

অনুশীলনী–১৪.১

লেখের সাহায্যে নিম্নোক্ত ফাংশনগুলোর সীমা নির্ণয় করুন।

1. $\lim_{x \varnothing 3} f(x)$ যেখানে $f(x) = 4$
2. $\lim_{x \varnothing 1} f(x)$, যেখানে $f(x) = 3x+2$
3. $\lim_{x \varnothing 1} f(x)$, যেখানে $f(x) = x^3+1$
4. $\lim_{x \varnothing 2} f(x)$, যেখানে $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

পাঠ-২
লেখের সাহায্যে ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- লেখের সাহায্যে ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষায় ব্যবহারিক দক্ষতা অর্জন করবেন।

সমস্যা নং-3	**তারিখ ঃ**

সমস্যা ঃ $f(x)=2x$ ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করুনএবং চিত্র হতে এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা করুন।

সমাধান

তত্ত্ব ঃ মনে করুন, কোন ব্যবধি I℘←−−এ একটি ফাংশন f সংজ্ঞায়িত। I এর কোন অন্তঃস্থ বিন্দু c-তে f-কে অবিচ্ছিন্ন বলা হয় যদি $\lim\limits_{x\varnothing c} f(x) = f(c)$ হয় করুন

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ পেন্সিল, স্কেল, ইরেজার, ছক কাগজ, সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ সমস্যা-1 এর মতো কার্যপদ্ধতি অনুসরণ করুনএবং লিখুন

$$\lim_{x\varnothing 2} f(x) = 4$$

আবার $x=2$ বিন্দুতে লেখচিত্র থেকে ফাংশনটির মান নির্ণয় করুনএবং লিখুন $f(2)=4$

$$\therefore \lim_{x\varnothing 2} f(2) = 4 = f(2)$$

$\therefore x=2$ বিন্দুতে $f(x) = 2x$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন হবে। অনুরূপভাবে দেখান যে, যে কোন a□← বিন্দুতে $f(x)=2x$ অবিচ্ছিন্ন হবে।

সমস্যা-4	**তারিখ ঃ**

সমস্যা ঃ $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করুনএবং চিত্র হতে এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা করুন।

সমাধান

তত্ত্ব ঃ মনে করুন, কোন ব্যবধি I℘←−−এ একটি ফাংশন f সংজ্ঞায়িত। I এর কোন অন্তঃস্থ বিন্দু c-তে f-কে অবিচ্ছিন্ন বলা হয় যদি $\lim\limits_{x\varnothing c} f(x) = f(c)$ হয়

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ পেন্সিল, স্কেল, ইরেজার, ছক কাগজ, সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি

সমস্যা-2 এর মতো কার্যপদ্ধতি অনুসরণ করুনএবং লিখুন $\lim\limits_{x\varnothing 1} f(x) = 2$

কিন্ডু $f(1)$ এর মান বিদ্যমান নেই। কাজেই $x=1$ বিন্দুতে ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন হবে, যা লেখচিত্র (চিত্র ১৪.১.২)

থেকে বুঝা যাচ্ছে।

বস্তুতপক্ষে (a-1, a+1), a>0 ব্যবধিতে ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন এবং দেখান যে, 1 বর্জিত যে কোন ব্যবধিতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

অনুশীলনী–১৪.২

লেখের সাহায্যে নিম্নোক্ত ফাংশনগুলোর অবিচ্ছিন্নতা যাচাই করুন।

1. $f(x) = 5$
2. $f(x) = -3x+2$
3. $f(x) = x^3-1$
4. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$

পাঠ-৩
লেখের সাহায্যে ফাংশনের অন্তরকের আসন্ন মান ও ভুলের মাত্রা নির্ণয়

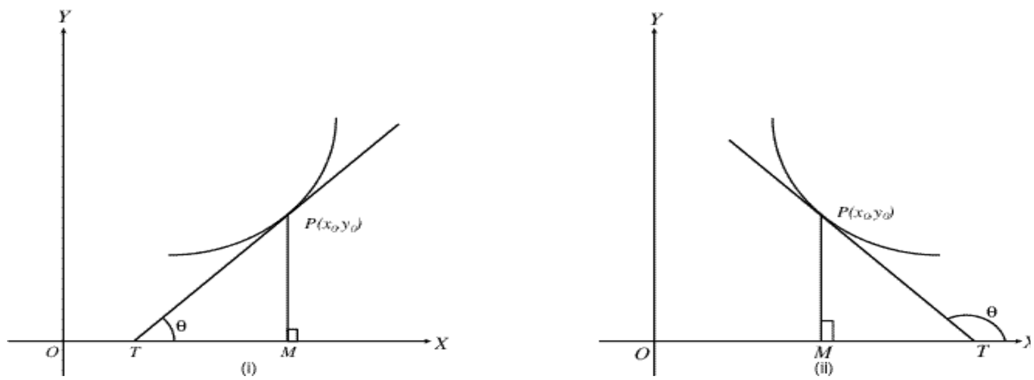
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- লেখের সাহায্যে ফাংশনের অন্তরকের আসন্নমান ও ভুলের মাত্রা নির্ণয়ে ব্যবহারিক দক্ষতা অর্জন করবেন।

লেখের সাহায্যে ফাংশনের অন্তরকের আসন্ন মান ও ভুলের মাত্রা নির্ণয়

$y=f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করে ঐ রেখাস্থ কোন বিন্দু $P(x_o, y_o)$ নিন। P বিন্দুতে PT স্পর্শক অঙ্কন করুন, যাহা x-অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করে। PT, x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে θ কোণ (θ=90°) উৎপন্ন করলে $\tan\theta$-এর মান হবে P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের নতি বা ঢাল (Slope বা gradient)।



চিত্র: ১৪.৩.১

P বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর PM লম্ব আঁকুন। এখন (i) নং চিত্র থেকে পাওয়া যায়,

$$\tan\theta = \frac{PM}{TM} = \frac{PM}{OM - OT} = \frac{y_0}{x_o - T \text{ বিন্দুর ভুজ}}$$

এবং (*ii*) নং চিত্র থেকে পাওয়া যায়, $\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$

$$= -\frac{PM}{MT} = \frac{PM}{OT-OM} = \frac{y_o}{T \text{ বিন্দুর ভুজ} - x_o}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{y_o}{x_o - T \text{ বিন্দুর ভুজ}} = k \text{ করুন}$$

$\therefore$ T বিন্দুর ভুজ জানলেই $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় করা যাবে।

আবার (x_o, y_o) বিন্দুতে

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0 y_0)} = f'(x_0)$$

$\therefore$ ভুলের মাত্রা $= f'(x_0) - k$

সমস্যা নং- 5	তারিখ ঃ

সমস্যা ঃ $x^2+y^2=4$ বৃত্তের $(1,\sqrt{3})$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতির আসন্নমান নির্ণয় করুনএবং ঐ বিন্দুতে অন্তরকের মান থেকে উক্ত নতির মানের ভুলের মাত্রা নির্ণয় করুন।

সমাধান

তত্ত্ব ঃ (x_o,y_o) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করলে স্পর্শকের নতি = $\tan\theta = \dfrac{y_o}{x_o - T \text{ বিন্দুর ভুজ}}$

যেখানে স্পর্শক ও x-অক্ষের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ θ

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ পেন্সিল, স্কেল, ইরেজার, ছক কাগজ, সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

(১) প্রদত্ত সমীকরণে x-এর ভিন্ন ভিন্ন মান ধরে y-এর ভিন্ন ভিন্ন মান নির্ণয় করুন।

(২) বর্গাঙ্কিত ছক কাগজের ক্ষুদ্র বর্গের 5 বর্গ =1 একক ধরে নির্ণীত সকল (x,y) বিন্দুকে স্থানাঙ্কায়িত করুনএবং এদেরকে সরু পেন্সিল দিয়ে সংযোজিত করে লেখচিত্রটি অঙ্কন করুন। লেখচিত্রটি একটি বৃত্ত হবে।

(৩) বৃত্তের $P(1,\sqrt{3})$ বিন্দুতে একটি স্পর্শক অঙ্কন করুন।

(৪) মনে করুন, P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

চিত্র: ১৪.৩.২

(৫) T বিন্দুর ভুজ নির্ণয় করুন এবং উপর্যুক্ত সূত্রে বসিয়ে $\tan\theta$ বা $\tan(\pi-\theta)$ অর্থাৎ স্পর্শকের নতি নির্ণয় করুন।

(৬) $(1,\sqrt{3})$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় করুন।

(৭) (৫) ও (৬) থেকে প্রাপ্ত নতির মানের বিয়োগফল নির্ণয় করে ভুলের মাত্রা নির্ণয় করুন।

ফল সংকলন

x	2	1	0	-1	-2
y	0	$\pm\sqrt{3}$	± 2	$\pm\sqrt{3}$	0

$P(1,\sqrt{3})$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষকে যে T বিন্দুতে ছেদ করে তার ভুজ = 3.99 (আসন্নকৃত)

x_0	y_0	T বিন্দুর ভুজ=x_1	$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$ $= \frac{y_o}{x_o - x_1} = m$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_o\, y_o)}$ $= -\frac{x_o}{y_o} = m_1$	ভুলের পরিমাণ $m \sim m_1$

1	$\sqrt{3}$	3.99	$\frac{\sqrt{3}}{1-3.99} = -0.5793$	$-\frac{1}{\sqrt{3}} = -0.5774$	0.5793-0.5774 =0.0019

$\therefore$ ভুলের পরিমাণ = 0.0019

$\therefore$ ভুলের মাত্রা বা ভুলের শতকরা পরিমাণ $= \frac{0.0019}{0.5774} * 100 = 0.33\%$

দ্রষ্টব্য ঃ যত ক্ষুদ্রভাবে বৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন ও T এর ভুজ নির্ণয় করা যাবে, ভুলের মাত্রা তত ক্ষুদ্র হবে।

সমস্যা নং- 6	**তারিখ**

সমস্যা ঃ $y=x^2+x$ পরাবৃত্তটি অঙ্কন করুনএবং (2,6) বিন্দুতে স্পর্শকের নতির আসন্নমান নির্ণয় করুনএবং ঐ বিন্দুতে অন্তরকের মান থেকে উক্ত নতির ভুলের মাত্রা নির্ণয় করুন।

সমাধান

তত্ত্ব ঃ (x_o, y_o) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করলে স্পর্শকের নতি

$\tan\theta = \frac{y_o}{x_o - T \text{ বিন্দুর ভুজ}}$, যেখানে স্পর্শক ও x-অক্ষের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ θ।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ পেন্সিল, স্কেল, ইরেজার, ছক কাগজ, সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি

১) প্রদত্ত সমীকরণে x-এর ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব মানের জন্য y এর ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব মান নির্ণয় করুন।

২) বর্গাঙ্কিত ছক কাগজের ক্ষুদ্র বর্গের 5 বর্গ=1 একক ধরে উপর্যুক্ত পদ্ধতিতে নির্ণীত সকল (x,y) বিন্দুকে স্থানাঙ্কায়িত করুনএবং সরু পেন্সিল দিয়ে ঐ বিন্দুগুলো সংযোজন করে পরাবৃত্তটি অঙ্কন করুন।

৩) পরাবৃত্তের $P(2,6)$ বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন করুন। মনে করুনইহা x-অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

৪) T বিন্দুর ভুজ নির্ণয় করুনএবং উপর্যুক্ত সূত্রে T বিন্দুর ভুজের মান বসিয়ে $\tan\theta$-এর মান নির্ণয় করুন।

৫) (2,6) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় করুন।

৬) কার্যপদ্ধতি (৪) ও (৫) থেকে প্রাপ্ত নতির মানদ্বয়ের বিয়োগফল থেকে ভুলের মাত্রা নির্ণয় করুন।

চিত্র: ১৪.৩.৩

ফল সংকলন

x	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	-2	3	-3
y	0	2	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	6	2	12	6

উপর্যুক্ত লেখচিত্র থেকে T বিন্দুর ভুজ নির্ণয় করে পাই 0.79 (আসন্নকৃত)

$$\therefore \tan\theta = \frac{y_o}{x_o - T \text{ বিন্দুর ভজ}} = \frac{6}{2-0.79} = 4.96$$

আবার $y=x^2+x$ হতে পাই, $\frac{dy}{dx} = 2x+1$

$\therefore$ (2,6) বিন্দুতে স্পর্শকের নতি $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,\ 6)} = 2*2+1=5$

ভুলের মাত্রা = 5-4.96 = 0.04

x_0	y_0	T বিন্দুর ভুজ	$\tan\theta = m$	$m_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_o,\ y_o)}$	ভুলের মাত্রা $m \sim m_1$

2	6	0.79	4.96	5	0.04

সুতরাং ভুলের মাত্রা = 0.04

এবং ভুলের শতকরা হার = $\frac{0.04}{5} * 100\% = 0.8\%$

অনুশীলনী–১৪.৩

নিম্নলিখিত সমীকরণ বিশিষ্ট বক্ররেখার পার্শ্বে উল্লেখিত বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল অন্তরক পদ্ধতি ও জ্যামিতিক পদ্ধতিতে নির্ণয় করে ভুলের মাত্রা নির্ণয় করুন।

1. $x^2+y^2 = 32$ বৃত্তের (4,4) বিন্দুতে।
2. $x^2+y^2+6x+8y-25=0$ বৃত্তের (2,1) বিন্দুতে।
3. $y^2+4x=0$ পরাবৃত্তের (-4,4) বিন্দুতে।
4. $4x^2+9y^2=36$ উপবৃত্তের (2,1.5) বিন্দুতে।

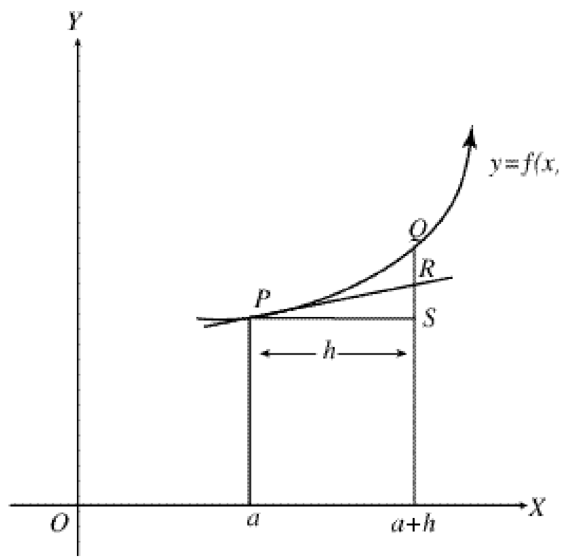
পাঠ-৪
সমীকরণের মূলের আসন্নমান নির্ণয়

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- পুনরাবৃত্তি পদ্ধতি প্রয়োগ করে $f(x)=0$ সমীকরণের মূলের আসন্নমান নির্ণয়ে ব্যবহারিক দক্ষতা অর্জন করবেন।

বর্তমান পাঠে পুনরাবৃত্তি পদ্ধতি প্রয়োগ করে $f(x)=0$ সমীকরণের মূলের আসন্নমান নির্ণয় করা হবে। একে নিউটন রাফসন (Newton Raphson) পদ্ধতিও বলা হয়। এই পদ্ধতি সমীকরনের জন্য নিম্নোক্ত একরৈখিক আসন্নীকরণ কৌশলের উপর নির্ভরশীল।



চিত্র: ১৪.৪.১

$y=f(x)$ বক্ররেখার উপর ক্ষুদ্র h অনুভূমিক দূরত্বে P ও Q দুটি বিন্দু। $\therefore$ P এর স্থানাঙ্ক $\{a, f(a)\}$ এবং Q এর স্থানাংক $\{(a+h), f(a+h)\}$।

P বিন্দুতে স্পর্শক PR এর নতি $= \dfrac{RS}{h}$

বা, $f'(a) = \dfrac{RS}{h}$

যদি h ক্ষুদ্র হয় তবে $QS \spadesuit RS$

$\therefore f'(a) \spadesuit \dfrac{QS}{h} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

অর্থাৎ $f(a+h) \spadesuit f(a) + hf'(a)$

যদি $x \spadesuit a+h$ হয় তবে $f(x) = f(a) + (x-a) f'(a)$ .... (i) লেখা যায়।

$x=a$ এর এলাকায় ডানপক্ষকে $f(x)$ এর একরৈখিক আসন্নকরণ বলা হয়।

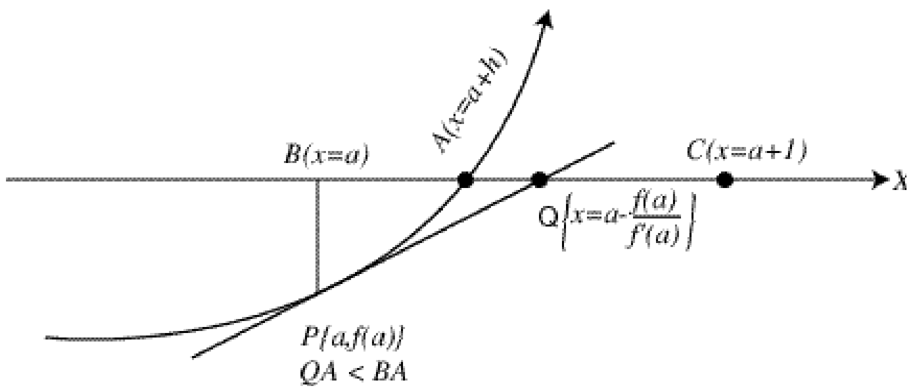
এখন এমন একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন $f(x)$ বিবেচনা করুন যার একটি শূন্য দুটি পূর্ণসংখ্যা a ও $a+1$ মধ্যে আছে। তাহলে $f(x)=0$ সমীকরণটির একটি মূল $(a+h)$ হবে, যেখানে $0<h<1$. $\therefore f(a+h)=0$ ।

তাহলে (i) নম্বর আসন্নীকৃত সম্পর্কে হতে পাই– h ♠ $-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$, $f'(a)\neq 0$

কাজেই, যদি $x=a$ কোন সমীকরণের একটি আসন্ন মূল হয়, তবে $x=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$, $f'(a)\neq 0$

ঐ সমীকরণের শ্রেয়তর আসন্নমূল হবে।

নিম্নোক্ত জ্যামিতিক ব্যাখ্যাটি লক্ষ্য করুন



চিত্র:১৪.৪.২

সমস্যা নং- 7	তারিখ

সমস্যা ঃ পুনরাবৃত্তি পদ্ধতি প্রয়োগ করে $x^3+x-11=0$ সমীকরণের একটি ধনাত্বক বাস্তব মূলের মান আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করুন।

সমাধান

তত্ত্ব ঃ $f(x)=0$ সমীকরণের জন্য $f(a)<0$ এবং $f(b)>0$ হলে $[a,b]$ ব্যবধিতে $x=x_0$ কোন আসন্ন মূল ধরলে, $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ একটি শ্রেয়তর আসন্ন মূল হবে এবং $x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

আরও শ্রেয়তর আসন্ন মূল হবে। এভাবে যত দশমিক ইচ্ছা অধিকতর শ্রেয়তর আসন্ন মূল পাওয়া যাবে।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ।

কার্যপদ্ধতি

১) মনে করুন $f(x)=x^3+x-11 \quad \therefore f'(x)=3x^2+1$

২) $f(1), f(2), f(3)$ .... ইত্যাদি নির্ণয় করুন। লক্ষ্য করুন যে, $f(2)<0$ এবং $f(3)>0$ সুতরাং $(2,3)$ ব্যবধিতে একটি মূল আছে।

৩) মনে করুন, $x_o=2$

$$\therefore f(2)=2^3+2-11=-1$$

$$f'(2)=3.2^2+1=13$$

$$\therefore x_1=x_o-\frac{f(x_o)}{f'(x_o)}=2-\frac{-1}{13}=2.076923$$

৪) $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

৫) $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$

বাস্তব মূলের আসন্ন মান $= x_3$

ফল সংকলন $f(x) = x^3 + x - 11,\ f'(x) = 3x^2 + 1$

x	2	3	মন্তব্য
$f(x) = x^3 + x - 11$	<0	>0	একটি মূল 2 ও 3 এর মধ্যে অবস্থিত

x_o	$f(x_o)$	$f'(x_o)$	$f(x_o)/f'(x_o)$	$x_1 = x_o - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
2	-1	13	-0.076923	2.076923

x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	$\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$	$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$
2.076923	0.035958	13.940828	0.0025794	2.074344

x_2	$f(x_2)$	$f'(x_2)$	$\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$	$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$
2.074344	0.00000451	13.908709	0.000000324	2.074344

সমীকরণটির মূলের আসন্নমান = 2.074 (তিন দশমিক পর্যন্ত)

সমস্যা নং- 8	**তারিখ**

সমস্যা ঃ পুনরাবৃত্তি পদ্ধতি প্রয়োগ করে $e^x = 2x + 1$ সমীকরণের একটি ধনাত্নক বাস্তব মূলের মান আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করুন।

সমাধান

তত্ত্ব ঃ $f(x) = 0$ সমীকরণের জন্য $f(a) < 0$ এবং $f(b) > 0$ হলে $[a, b]$ ব্যবধিতে $x = x_0$ কোন আসন্নমূল ধরলে $x_1 = x_0 - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)}$ একটি শ্রেয়তর আসন্নমূল হবে এবং

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ আরও শ্রেয়তর আসন্ন মূল হবে। এভাবে যত দশমিক ইচ্ছা অধিকতর শ্রেয়তর আসন্নমূল পাওয়া যাবে।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি

১) মনে করুন $f(x)=e^x-2x-1 \quad \therefore f'(x) = e^x-2$

২) $f(1), (2)$ ..... ইত্যাদি নির্ণয় করুন। লক্ষ্য করুন যে, $f(1) <0$ এবং $f(2)>0$, সুতরাং $(1,2)$ ব্যবধিতে একটি মূল আছে।

৩) মনে করুন, $x_o=1$

$$\therefore f(1) = e - 3 = -0.281718$$
$$f'(1) = e - 2 = 0.718282$$
$$\therefore x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1.202353$$

৪) $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

বাস্তব মূলের আসন্নমান $= x_3$

ফল সংকলন

$f(x)=e^x-2x-1 \quad \therefore f'(x) = e^x-2$

x	1	2	মন্তব্য
$f(x)=e^x-2x-1$	<0	>0	একটি মূল 1 ও 2 এর মধ্যে অবস্থিত

x_o	$f(x_o)$	$f'(x_o)$	$\frac{f(x_o)}{f'(x_o)}$	$x_1=x_o-\frac{f(x_o)}{f'(x_o)}$
1	-0.281718	0.718282	-0.392211	1.392211

x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	$\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$	$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$
1.392211	0.239315	2.023737	0.118254	1.273957

x_2	$f(x_2)$	$f'(x_2)$	$\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$	$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$
1.273957	0.027057	1.574971	0.017179	1.256778

$\therefore$ সমীকরণটির মূলের নির্ণেয় আসন্ন মান $= 1.2568$ (চার দশমিক পর্যন্ত)

সমস্যা নং- 9	**তারিখ**

সমস্যাঃ পুনরাবৃত্তি পদ্ধতি প্রয়োগ করে $\sin x=1 - x$ সমীকরণের একটি ধনাত্মক বাস্তব মূলের আসন্ন মান 5 দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করুন।

সমাধান

তত্ত্ব ঃ $f(x)=0$ সমীকরণের জন্য $f(a) < 0$ এবং $f(b)>0$ হলে $[a,b]$ ব্যবধিতে $x=x_o$ কোন আসন্ন মূল ধরলে

$$x_1=x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)}$$ একটি শ্রেয়তর আসন্নমূল হবে এবং $$x_2=x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

আরও শ্রেয়তর আসন্ন মূল হবে। এভাবে যত দশমিক ইচ্ছা অধিকতর শ্রেয়তর আসন্ন মূল পাওয়া যাবে।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি

১) মনে করুন $f(x) = \sin x + x - 1;\ \therefore f'(x) = \cos x + 1$

২) $f(0), f(1)$ ...... ইত্যাদি নির্ণয় করুন। লক্ষ্য করুন যে, $f(0) <0$ এবং $f(1)>0$ সুতরাং $(0,1)$ ব্যবধিতে একটি মূল আছে।

৩) মনে করুন $x_o=0$

৪) $\therefore f(x_o) = f(0) = -1$

$f'(x_o) = f'(0) = \cos 0 + 1 = 2$

$$\therefore x_1=x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} = -\frac{f(o)}{f'(o)} = -\frac{-1}{2} = 0.5$$

৫) $$x_2=x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

৬) $$x_3=x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলের আসন্ন মান $= x_3$

ফল সংকলন

$f(x) = \sin x + x - 1,\ f'(x) = \cos x + 1$

x	0	1	মন্তব্য
$f(x)= \sin x + x-1$	<0	>0	একটি মূল 0 এবং 1 এর মধ্যে অবস্থিত

x_o	$f(x_o)$	$f'(x_o)$	$\frac{f(x_o)}{f'(x_o)}$	$x_1=x_o-\frac{f(x_0)}{f'(x_o)}$
0	-1	2	-0.5	0.5

x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	$\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$	$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$
0.5	-0.020574	1.877583	-0.010958	0.510958

x_2	$f(x_2)$	$f'(x_2)$	$\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$	$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$
0.510958	-0.000029	1.872276	-0.000015	0.510973

সমীকরণটির মূলের নির্ণেয় আসন্নমান = 0.51097 (পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত)

অনুশীলনী– ১৪.৪

পুনরাবৃত্তি পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত সমীকরণ সমূহের একটি বাস্তব মূলের আসন্ন চার দশমিক পর্যন্ত নির্ণয় করুন।

1. $x^2-2 = 0,\ x_o=1$
2. $x^3-x-1=0,\ x_o=1$
3. $x^3+3x+1=0,\ x_o=0$
4. $x^4+x-3=0,\ x_o=-1$
5. $2x^3-5x^2+x+10=0$
6. $xe^x-3=0$
7. $e^x(1+x)=2$
8. $x^2=ln(x+1)$
9. $\tan x = 3x$ (ধনাত্বক মূল)
10. $x=1-\sin x$
11. $e^x=2\cos x,\ x\square\left(-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right)$
12. $2\sin x + x-3 = 0$

পাঠ-৫

$y=f(x)$ রেখা এবং x- অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ তলের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান নির্ণয়।

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

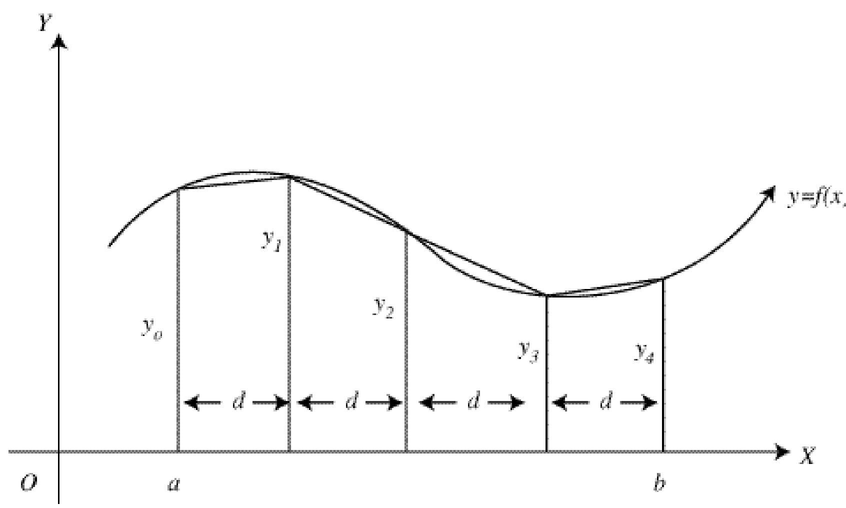
- $A \cong h\left(\frac{y_o}{2}+y_1+y_2+ \ldots\ldots\ldots +y_n+\frac{y_n}{2}\right)$ সূত্র প্রয়োগ করে $y=f(x)$ রেখা এবং x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ তলের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

$y=f(x)$ রেখা এবং x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ তলের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান নির্ণয়।

ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান নির্ণয়ের অনেক পদ্ধতি আছে। এখানে ট্রাপিজিয়ম নীতি আলোচনা করা হবে।

ট্রাপিজিয়ম নীতি

মনে করুন $[a, b]$ ব্যবধিতে $y=f(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন, অর্থাৎ a ও b এর মধ্যে ফাংশনটির লেখে কোথাও ছেদ নেই।



চিত্র: ১৪.৫.১

$\int_a^b f(x)dx$ দ্বারা প্রকাশিত ক্ষেত্রটিকে যদি কতগুলো ফালিতে বিভক্ত করা হয়, যেখানে প্রত্যেক ফালির প্রস্থ d, তবে চিত্রে যেমন দেখা যাচ্ছে প্রত্যেক ফালি একটি ট্রাপিজিয়ম হবে।

আমরা জানি, ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল

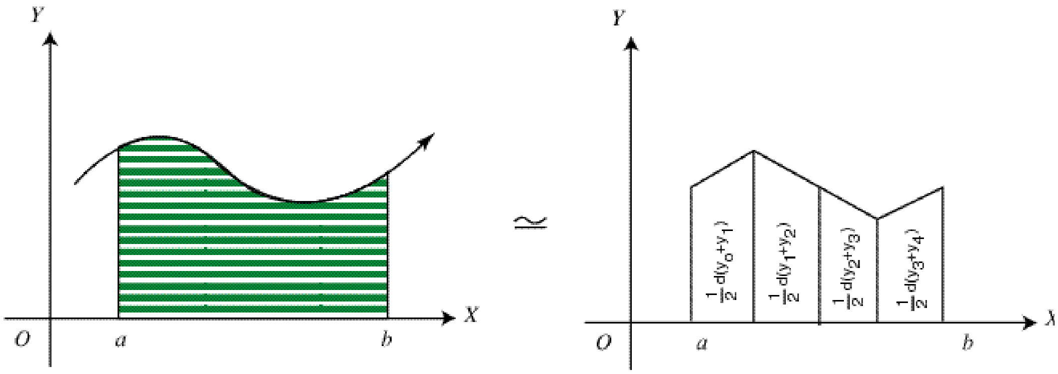
$=\frac{1}{2}$ * (সমান্তরাল বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি)* এদের লম্ব দূরত্ব

প্রথম ফালি ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\, d\, (y_0+y_1)$

দ্বিতীয় ফালি ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} d\,(y_1 + y_2)$

তৃতীয় ফালি ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} d\,(y_2 + y_3)$

অতএব চতুর্থ ফালির ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} d\,(y_3 + y_4)$



চিত্র: ১৪.৫.২

এই ফালিগুলোর ক্ষেত্রফলের যোগফলকে প্রকৃত ক্ষেত্রফলের আসন্নমান ধরে, আমরা পাই–

$$\int_b^a f(x)dx \;♠\; \frac{1}{2} d\,(y_o + y_1) + \frac{1}{2} d\,(y_1 + y_2) + \frac{1}{2} d(y_2 + y_3) + \frac{1}{2} d\,(y_3 + y_4)$$

$$= \frac{1}{2}\; d(y_o + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4)$$

এই পদ্ধতিকে বলা হয় ট্রাপিজিয়ম নীতি এবং এখানে 5টি কোটি (y_o হতে y_4) ব্যবহার করা হয়েছে।

দ্রষ্টব্য ঃ

১) কোটিগুলো সমান দূরবর্তী।

২) n সংখ্যক কোটি ব্যবহার করলে, ট্রাপিজিয়াম নীতিটি হবে

$$\int_b^a f(x)\,dx \;♠\; \frac{1}{2} d\,(y_o + 2y_1 + \,.......\, + 2y_{n\text{-}2} + y_{n\text{-}1})$$

সমস্যা নং-10	**তারিখ**

সমস্যা ঃ 5টি কোটি ব্যবহার করে $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\; dx$ এর মান 4 দশমিক পর্যন্ত নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করুন, $A = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\; dx$

তত্ত্ব ঃ $A = \frac{1}{2}\; d(y_o + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4)$

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

১) $0 \le x \le 1$ ব্যবধিকে সমান (5-1)=4 টি ভাগে ভাগ করুন।

$\therefore d = \frac{1-0}{4} = 0.25$

২) $x_o=0, x_1=x_0+d = 0.25, x_2=x_1+d=0.50$

$x_3=x_2+d=0.75$ এবং $x_4=x_3+d=1$

৩) $y=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ সূত্র প্রয়োগ করে

$y_o = \frac{1}{1+x_0^2} = 1, \quad y_1 = \frac{1}{1+x_1^2} = 0.941176$

$y_2 = \frac{1}{1+x_2^2} = 0.8, \quad y_3 = \frac{1}{1+x_3^2} = 0.64$

$y_4 = \frac{1}{1+x_4^2} = 0.5$

৪) ট্রাপিজিয়ম নীতি $A = \frac{1}{2} d(y_o+2y_1+2y_2+2y_3+y_4)$ প্রয়োগ করে A-এর মান নির্ণয় করুন।

ফল সংকলন

$d=(x_n-x_o)/n$	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4
(1-0)/4=0.25	0	0.25	0.50	0.75	1.0

$y_o=f(x_o)$	$y_1=f(x_1)$	$y_2=f(x_2)$	$y_3=f(x_3)$	$y_4=f(x_4)$	A
1	0.941176	0.80	0.64	0.5	0.7828

$\therefore A=0.7828$

সমস্যা নং- **11**	তারিখ

সমস্যা ঃ 5টি কোটি ব্যবহার করে $\int_0^{0.8} e^{x^2}\, dx$ এর মান চার দশমিক পর্যন্ত নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ মনে করুন, $A = \int_0^{0.8} e^{x^2}\, dx$

তত্ত্ব ঃ $A = \frac{1}{2} d(y_o+2y_1+2y_2+2y_3+y_4)$

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

১) $0 \le x \le 0.8$ ব্যবধিকে সমান (5-1)=4 টি ভাগে ভাগ করুন।

$\therefore d = \frac{0.8-0}{4} = 0.2$

২) $x_o=0, x_1=x_o+d=0.2;\quad x_2=x_1+d=0.4;\quad x_3=x_2+d=0.6;$
$x_4=x_3+d=0.8$

৩) $y=f(x)=e^{x^2}$ সূত্র প্রয়োগ করে

$y_o=e^o=1,\quad y_1=e^{(0.2)^2}=1.0408,$

$y_2=e^{(0.4)^2}=1.1735,\quad y_3=e^{(0.6)^2}=1.4333$

$y_4=e^{(0.8)^2}=1.8965$

৪) ট্রাপিজিয়ম নীতি $A=\frac{1}{2}\,d(y_o+2y_1+2y_2+2y_3+y_4)$ প্রয়োগ করে A এর মান নির্ণয় করুন।

ফল সংকলন

$d=\dfrac{(x_n-x_o)}{n}$	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4
$\dfrac{0.8-0}{4}=0.2$	0	0.2	0.4	0.6	0.8

$y_o=f(x_o)$	$y_1=f(x_1)$	$y_2=f(x_2)$	$y_3=f(x_3)$	$y_4=f(x_4)$	A
1	1.0408	1.1735	1.4333	1.8965	1.0192

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= 1.0192$

অনুশীলনী– ১৪.৫

পার্শ্বে উল্লেখিত সংখ্যক কোটি ব্যবহার করে চার দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় করুন।

1. $\int_0^2 x^4dx;\quad 5$
2. $\int_0^3 \sqrt{x}\,dx,\ 5$
3. $\int_o^{\pi} \sqrt{\sin\theta}\,d\theta;\quad 5$
4. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos\theta}\,d\theta;\quad 3$
5. $\int_0^{0.4} \sqrt{1-x^2}\,dx;\quad 5$
6. $\int_0^{\pi} \sin^4\theta\,d\theta;\quad 5$
7. $\int_0^{0.6} xe^x dx;\ 7$
8. $\int_1^{e} \ln x\,dx;\quad 5$
9. $\int_0^1 \sqrt{(1+x^2)}\,dx;\quad 8$
10. $\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,d\theta;\quad 5$