ইউনিট ১

সম্ভাবনা
(Probability)

ভূমিকা

সম্ভাবনার অভিধানগত অর্থ হল ঘটনীয়। আমাদের দৈনন্দিন জীবনে সম্ভাবনা সম্বন্ধীয় বিভিন্ন মন্তব্য ব্যবহার করি আজ বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা খুব বেশী, ঢাকা গামী পরিবহনের দুর্ঘটনা না ঘটার সম্ভাবনা খুব কম ইত্যাদি, সম্ভাবনা সম্বন্ধীয় ধারণা প্রতিক্ষেত্রে দেখতে পাওয়া যায়। অর্থাৎ কোন ঘটনা ঘটার ব্যাপারে অনিশ্চিয়তা থাকলেই সম্ভাবনা কথাটি চলে আসে। যে সব ঘটনা নিশ্চিত ঘটে সে সব ক্ষেত্রে সম্ভাবনার গুরুত্ব মোটেই থাকে না যেমন আগামী কাল সূর্য পূর্ব দিকে উঠবে, এটি প্রতিনিয়তই সত্য, ফলে এ ক্ষেত্রে সম্ভাবনার কোন প্রশ্নই আসে না। এ অধ্যায়ে সম্ভাবনা তত্ত্বের বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এ ইউনিট শেষে আপনি বলতে পারবেন-

- সম্ভাবনা সম্পর্কিত বিভিন্ন সংজ্ঞা
- সেট
- সম্ভাবনা তত্ত্ব
- সম্ভাবনার বিভিন্ন সূত্র বিধি
- সম্ভাবনার বিভিন্ন সমস্যা ও সমাধান

পাঠ-১.১ সম্ভাবনা সম্পর্কিত বিভিন্ন সংজ্ঞা (Defination Related to probability)

ভূমিকা

ইটালিয়ান গণিতশাস্ত্রবিদ গ্যালিলিও (১৫৬৪-১৬৪২) সর্ব প্রথম সম্ভাবনার একটি সংখ্যাভিত্তিক পরিমাপের উদ্ভাবন করেন। এ ছাড়া সম্ভবনা তত্ত্বের উন্নতি সাধনে যাদের নাম বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য তাঁরা হলেন ঃ

১। গণিত শাস্ত্রবিদ বি প্যাসকল (১৬২৩-১৬৬২)

২। পি ফরমেট (১৬০১-১৬৬৫)

৩। জে বাণোর্লী (১৬৫৪-১৮২৭)

৪। ল্যাপলাস (১৭৪৯-১৮২৭)

৫। গস্ (১৭৭৭-১৮৫৫)

৬। পৈসুঁ (১৭৮১-১৮৪০)

৭। চেবাইশেভ (১৮২১-১৮৯৪) ইত্যাদি।

উদ্দেশ্য

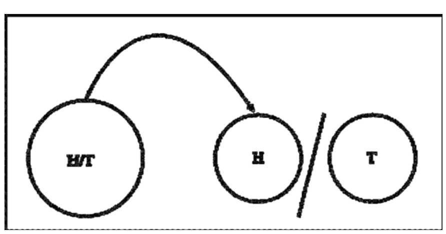
এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন

- সম্ভাবনা সম্পর্কিত বিভিন্ন সংজ্ঞা
- উদাহরণ সহ সমাধান

বিষয়বস্তু

সম্ভাবনা তত্ত্ব সম্পর্কে আলোচনায় যাওয়ায় আগে সম্ভাবনা তত্ত্বে ব্যবহৃত কিছু ধারণা থাকার প্রয়োজন। এদিকে লক্ষ্য রেখে নিু লিখিত সংজ্ঞা সমূহ বিস্তারিত আলোচনা করা হল:

পরীক্ষণ (Experiment) ঃ কতকগুলো নির্দিষ্ট শর্তের অধীনে কোন একটি দৈব পরীক্ষা সম্পন্ন করার জন্য প্রয়োজনীয় কার্যক্রম একাধিক বার বা পুনরাবৃতি করা হলে ঐ কার্যক্রমকে পরীক্ষন (Experiment) বলে। উদাহরণ স্বরূপ বলতে পারি, একটি মুদ্রা একাধিক নিরপেক্ষ করা একটি পরীক্ষণ। চিত্রে মুদ্রা পরীক্ষণ দেওয়া হল:

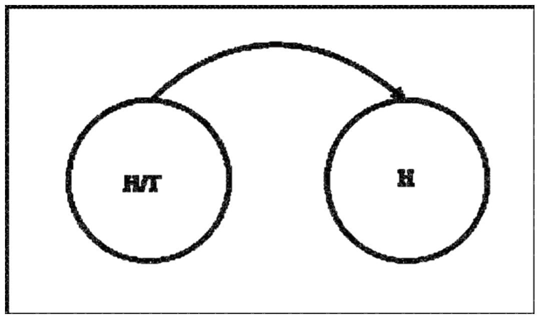


চিত্র - ১.১

পরীক্ষাগারে সম্ভাব্য ফল গুলি নিশ্চিত ভাবে জানা থাকে না। কারণ মুদ্রা নিক্ষেপে হেড বা টেল কোনটি আসবে পরীক্ষণের পূর্বে তা বলা সম্ভব নয়।

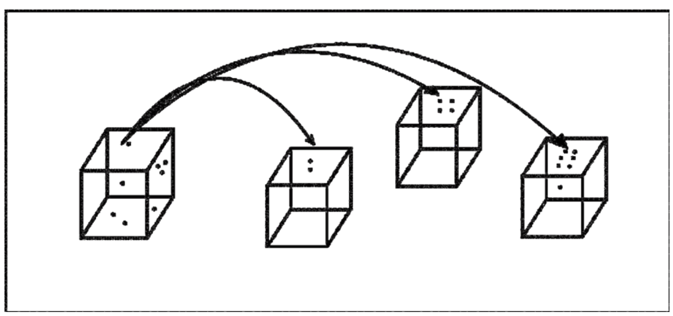
চেষ্টা (Trial): কতকগুলো নির্দিষ্ট শর্তের অধীনে কোন একটি দৈব পরীক্ষা সম্পন্ন করার জন্য প্রয়োজনীয় কার্যক্রম একবার সম্পন্ন করা হলে ঐ কার্য ক্রমকে একটি চেষ্টা বলে। অর্থাৎ, পরীক্ষণ চেষ্টার সম্মিলিত ফল। যেমন, একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় ছক্কাটি যদি এক বার নিক্ষেপ করা হয় তবে উহাকে একটি চেষ্টা বলা হবে।

ফল [Out come]: পরীক্ষণের বিশেষ অবস্থাকে উক্ত পরীক্ষণের ফল বলে। অর্থাৎ মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষণে এক পর্যায়ে দেখা গেল মুদ্রার উপর পিঠ হেড এসেছে তাহলে হেডকে ঐ পরীক্ষণের ফল বলা হবে।



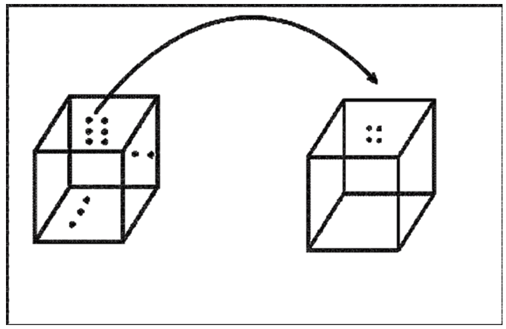
চিত্রে - ১.২

ঘটনা (Event) ঃ কোন পরীক্ষণে প্রাপ্ত একটি নির্দিষ্ট বৈশিষ্ঠ্যর অনুকুল ফলাফলের সম্মিলিত অবস্থাকে ঘটনা বলে। অর্থাৎ পরীক্ষণের একটি অনুকুল ফলাফল কে ঘটনা বলে। উদাহরণস্বরূপ, ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষণে প্রাপ্ত জোড় সংখ্যার ঘটনা = {২, ৪, ৬}



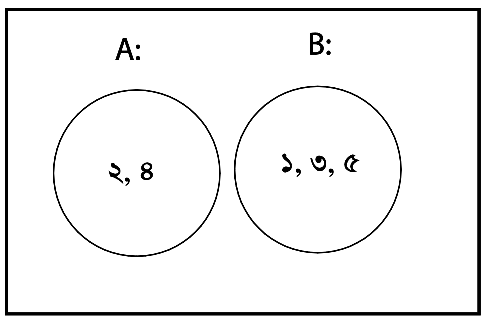
চিত্রে - ১.৩

সমসম্ভাব্য ফল [Equally likely out come] ঃ কোন পরীক্ষণের সম্ভাব্য ফলগুলির প্রত্যেকটির সম্ভাবনা যদি সমান হয় তবে পরীক্ষনের ফলগুলিকে সমসম্ভাব্য ফল বলা হবে। উদাহরণস্বরূপ বলতে পারি, যদি একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হয় তবে ১, ২, ৩, ৪, ৫ অথবা ৬ যুক্ত যে কোন একটি পিঠ আসার সম্ভাবনা সমসম্ভাবনা যুক্ত। কারণ, যে কোন একটি পিঠ আসার সম্ভাবনা সমান।

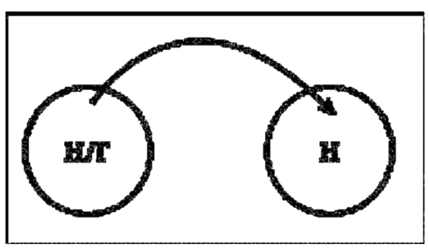


চিত্রে - ১.৪

পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা ঃ কোন পরীক্ষনে ঘটনা গুলিকে তখনই পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা বলা হবে যখন সম্ভাব্য একটি ঘটনা ঘটলে অন্যগুলি ঘটবে না। আবার দুই বা ততোধিক ঘটনার যদি কোন সাধারণ বিন্দু না থাকে তাহলে উহাদেরকে পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা বলে। যেমন A:{২, ৪} B: {১, ৩, ৫} দুইটি ঘটনা কিন্তু পরস্পর বর্জনশীল, চিত্রে দেখুন :



অন্যভাবে বলা যায় একটি মুদ্রা নিক্ষেপে হেড আসলে টেইল আসতে পারে না। তাই এ দুটি ঘটনা পরস্পর বর্জনশীল। চিত্রে দেখুন:

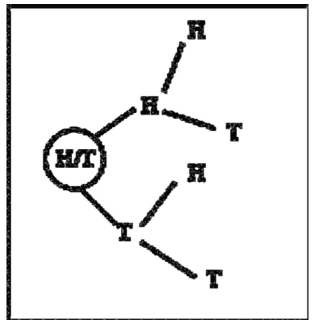


চিত্র: ১.৬

নমুনা ক্ষেত্র (Sample Space) ঃ কোন ফলাফলের পূণরাবৃত্তি গণনায় না ধরে একটি পরীক্ষায় প্রাপ্ত সকল ফলাফলকে ঐ পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্র বলে। উদাহরণস্বরূপ, একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষণে নমুনা ক্ষেত্র হবে S :{১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬} এখানে S দ্বারা নমুনা ক্ষেত্র প্রকাশ করা হয়েছে।

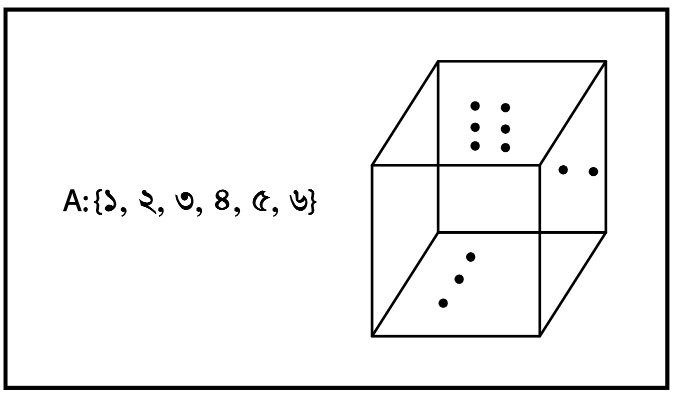
নমুনা বিন্দু (Sample Point) ঃ কোন নমুনা ক্ষেত্রে যতগুলো উপাদান বা ফলাফল থাকে তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি নমুনা বিন্দু বলে। উদাহরণস্বরূপ বলতে পারি, একটি মুদ্রা ২ বার নিক্ষেপ পরীক্ষায় মোট নমুনা বিন্দু ৪টি। নমুনা ক্ষেত্র, S= {HH,HT,TH,TT}

চিত্রে দেখুন:



চিত্র: ১.৭

মৌলিক ঘটনা [Elementary event]: কোন পরীক্ষণের নমুনা বিন্দুগুলি নিয়ে যে সব ঘটনা সাজানো যায় তাদের মধ্যে যে ঘটনাগুলোকে আরও ক্ষুদ্র ঘটনায় বিশ্লেষন করা যায় না তাদেরকে মৌলিক ঘটনা বলে। উদাহরণস্বরূপ একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬ ছয়টি নমুনা বিন্দুকে নিয়ে যদি ৬টি ঘটনা দেখা হয় তবে তাদের প্রত্যেকটিকে মৌলিক ঘটনা বলে। চিত্রে দেখুন:

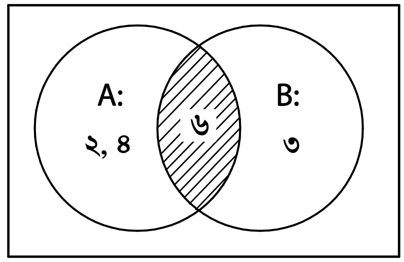


চিত্র: ১.৮

দৈব পরীক্ষণ: একটি পরীক্ষণকে তখনই দৈব পরীক্ষণ বলে যখন ইহার সম্ভাব্য সকল ফলাফল গুলি জানা থাকে। কিন্তু কোন ফলটি ঘটবে তাহা পরীক্ষনের আগে নিশ্চিত ভাবে বলা যায় না। উদাহরণস্বরূপ ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষাটি একটি দৈব পরীক্ষণ। কারণ, পরীক্ষণের সম্ভাব্য ফলগুলি ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬ বিন্দু কোনটি আগে আসবে তা পূর্বে থেকে বলা যায় না।

অনুকুল ঘটনা [Favourable out come]: কোন পরীক্ষণে একটি ঘটনার স্বপক্ষের ফলগুলিকে উক্ত ঘটনার অনুকুল ফলাফল বা অনুকুল ঘটনা বলে। উদাহরণস্বরূপ, একটি মুদ্রা নিক্ষেপে যদি ১টি হেড বিশিষ্ট পিঠ আসাকে ঘটনা ধরে নেওয়া হয় তবে উক্ত ঘটনার অনুকুল ঘটনা হবে S:{H}।

পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা [Not mutually exclusive event]: যদি দুই বা ততোধিক ঘটনার কোন সাধারণ বিন্দু থাকে তবে ঐ ঘটনাগুলোকে পরস্পর অবর্জণশীল ঘটনা বলে। উদাহরণস্বরূপ যদি A:{২, ৪, ৬ } এবং B :{৩, ৬} দুইটি ঘটনা হয় তবে তা পরস্পর অবর্জণশীল ঘটনা। চিত্রে দেখানো হল:



চিত্র: ১.৯

পরিপূরক ঘটনা [Complementary event] ঃ কোন নমুনা ক্ষেত্রের একটি ঘটনার অনুকূল ফলাফল বাদ দিয়ে অবশিষ্ট ফলাফলকে ঐ মুল ঘটনার পরিপুরক ঘটনা বলে। যে কোন ঘটনা A এর পরিপুরক ঘটনাকে A^Cদ্বারা প্রকাশ করা হয়। এক্ষেত্রে $A \cup A^C = S$.

নিশ্চিত ঘটনা (Sure event) ঃ একটি ঘটনাকে নিশ্চিত ঘটনা তখনই বলা হবে যখন উক্ত ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা ১। উদাহরণস্বরূপ একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষণে হেড অথবা টেইল আসার সম্ভাবনা ১ অথবা সূর্য পূর্ব দিকে উঠে উহার সম্ভাবনা ১ অর্থাৎ উভয় পক্ষে ঘটনা নিশ্চিত ঘটনা।

অনিশ্চিত ঘটনা (Impossible event) ঃ কোন ঘটনা ঘটার আদৌ কোন সম্ভাবনা নেই অর্থাৎ কোন ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা শূন্য হলে তাকে অনিশ্চিত ঘটনা বলে। উদাহরণস্বরূপ, একটি মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করলে দুটি হেড আসার সম্ভাবনা শূন্য। তাই এরূপ ঘটনাকে অনিশ্চিত ঘটনা বলে।

অধীন বা নির্ভরশীল ঘটনা [Dependent event]: যদি দুইটি ঘটনা এরূপ হয় যে, উহাদের কোন একটি ঘটার সম্ভাবনা অন্য ঘটনাটি ঘটার উপর নির্ভর করে তবে তাহাদের অধীন বা নির্ভরশীল ঘটনা বলে। যদি কোন বাক্সে ৪টি সাদা ও ৫টি লাল বল থাকে এবং উহা হতে পর পর দুইটি বল নেওয়া হয়, দ্বিতীয় বলটি কোন নির্দিষ্ট রংয়ের হওয়ার সম্ভাবনা প্রথম বলটি বক্সে ফেরৎ দেওয়া বা না দেওয়ার উপর নির্ভর করে। এরূপ ঘটনাকে নির্ভরশীল বা অধীন ঘটনা বলে।

স্বাধীন বা অনির্ভরশীল ঘটনা (Independent Event): যদি দুইটি ঘটনা এরূপ হয় যে, উহাদের কোন একটি ঘটনা সম্ভাবনা অন্য ঘটনাটি ঘটার উপর নির্ভর করে না তবে তাকে স্বাধীন বা অনির্ভরশীল ঘটনা বলে।

সার সংক্ষেপ

গণিত শাস্ত্রবিদ গ্যালিলিও সর্বপ্রথম সম্ভাবনা তত্ত্বের সংখ্যা ভিত্তিক পরিসংখ্যানের উপায় বের করেন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-১.১:

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন:

১। সর্বপ্রথম সম্ভাবনার একটি সংখ্যাভিত্তিক পরিমাপ উদ্ভাবন করেন

ক) ফরমেট খ) বার্নোলী

গ) গ্যালিলিও ঘ) পৈসুঁ

২। একটি মুদ্রা একাধিক বার নিক্ষেপ করা একটি

ক) পরীক্ষণ খ) চেষ্টা

গ) শর্ত ঘ) ফল

সত্য/মিথ্যা নির্ণয়:

৩। পরীক্ষণের সম্ভাব্য ফলাফলগুলি নিশ্চিতভাবে জানা থাকে।

৪। পরীক্ষণ চেষ্টার সম্মিলিত ফল।

৫। পরীক্ষণের বিশেষ অবস্থাকে উক্ত পরীক্ষণের ফল বলে।

শুন্যস্থান পূরণ ঃ

৬। পরীক্ষনের একাধিক অনুকুল ফলকে ----------------।

৭। কোন পরীক্ষণের সম্ভাব্য ফলগুলির প্রত্যেকটির সম্ভাবনা যদি সমান থাকে তবে তাকে --------------।

৮। দুই বা ততোধিক ঘটনার যদি কোন সাধারন বিন্দু না থাকে তবে তাকে ----------------।

পাঠ -১.২ | সেট (Set)

ভূমিকা

সম্ভাবনা তত্ত্বে সেট খুবই গুরুত্বপূর্ণ অংশ। গনিত শাস্ত্রবিদ জে. ক্যানটোর [১৮৪৫ -১৯১৮] সর্বপ্রথম সেট এর ধারনা দেন। বর্তমানে গণিত, পরিসংখ্যান বিষয়ে সেট এর ব্যবহার বহুল লক্ষনীয়। এ পাঠে সেট সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন

- সেট এর সংজ্ঞা
- সেট এর বিভিন্ন দিক
- সেট সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান

বিষয়বস্তু

সেট (Set) ঃ একই ধর্ম বা গুন বিশিষ্ট কতকগুলি জিনিসের তালিকা বা সমষ্টিকে সেট (Set) বলে। যে সব বস্তু বা জিনিসের সমন্বয়ে সেট গঠিত হয় তাদেরকে ঐ সেট এর উপাদান বলে। উদাহরণস্বরূপ, একটি ছক্কা নিক্ষেপে সম্ভাব্য ফলাফলের সংখ্যা সেট হল S: {১,২,৩,৪,৫,৬} যেখানে ১,২,৩,৪,৫,৬ হল S সেটএর উপাদান।

সেট প্রকাশের চিহ্ন:

যদি সেট A এর উপাদান x হয় তবে ইহাকে প্রকাশ করা হয় $x \in A$ অর্থাৎ x, A সেটের মধ্যে অন্তর্ভূক্ত আবার যদি $x \notin B$ হয় তবে x, B সেট এর মধ্যে অন্তর্ভুক্ত নয়।

সেট প্রকাশ পদ্ধতি ঃ সেট প্রকাশ করতে দু'ধরনের পদ্ধতি রয়েছে।

১। তালিকা পদ্ধতি

২। রোস্টার পদ্ধতি

১। **তালিকা পদ্ধতি ঃ** যদি সেটের উপাদান গুলোকে কমা দ্বারা পৃথক করে দ্বিতীয় বন্ধনীর সাহায্যে প্রকাশ করা হয় তখন সে সেটকে তালিকা পদ্ধতি বলে যেমন-

A = {১,৩,৫,৭,৯},

B = {a,b,c,d} ইত্যাদি।

২। **রোস্টার পদ্ধতি ঃ** যখন সেটকে কোন একটি নিয়মের দ্বারা প্রকাশ করা হয় তাকে রোস্টার পদ্ধতি বলে যেমন

$A = \{x|x \leq ১০\}$ ঃ x একটি পূর্ণ সংখ্যা}

সার্বিক সেট (Universal Set)ঃ একটি সেটকে সার্বিক সেট বলা হবে, যখন কোন বিষয় সংশ্লিষ্ট সকল উপাদান নিয়ে সেটি গঠিত হবে। সার্বিক সেট কে U দ্বারা প্রকাশ করা হয়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় একটি মুদ্রার বিশ্ব সেট U = {হেড, টেইল}

উপসেট (Sub Set) : একটি সেট A কে তখনই সেট B এর উপসেট বলা হবে যখন A এর প্রত্যেকটি উপাদান B এর উপাদান হবে। উপসেট "$\subset$" দ্বারা প্রকাশ করা হয় এক্ষেত্রে $A \subset B$ অর্থাৎ A, B এর উপসেট উদাহরণস্বরূপ, A ও B দুইটি সেট নিম্নরূপ দেখানো হল :-

A = {HH, TT}

B = {HH, TH, HT, TT}

এক্ষেত্রে $A \subset B$ কারণ Aএর সকল উপাদান Bএর মধ্যে উপস্থিত।

ফাঁকা সেট (Empty Set)ঃ যে সেটে কোন উপাদান থাকে না তাকে ফাঁকা সেট বলে। ফাঁকা সেট কে φ (ফাই) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। উদাহরণস্বরূপ মহিলা সমিতিতে পুরুষ সদস্য সংখ্যা অর্থাৎ φ ={মহিলা সমিতিতে পুরুষ সদস্য সংখ্যা}

একক সেট (Unit Set) ঃ যে সেটে একটি মাত্র উপাদান থাকে তাকে একক সেট বলে। মনে করি A একটি সেট, A = {H} এখানে সেট A একটি একক সেট।

প্রকৃত সেট (Proper Set) ঃ যদি একটি সেট অপর একটি সেটের উপসেট হয়, তখন সেই সেটকে অপর সেট এর প্রকৃত সেট বলা হবে যদি সেট দুইটি সমান হয়।

উদাহরণস্বরূপ, যদি A, B সেট এর উপসেট হয় তখন A ও B প্রকৃত সেট হবে যদি সেট A = সেট B হয়।

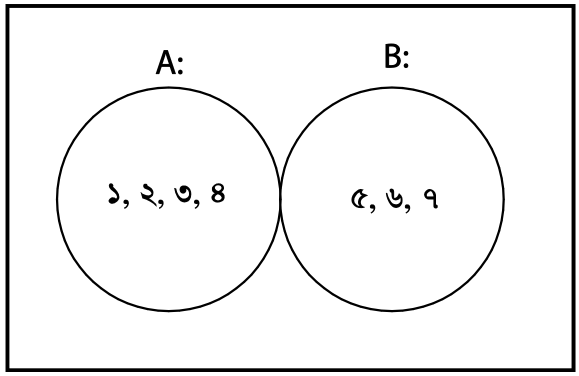
সমতাসেট (Equality of Set) ঃ দুই সেট তখনই সমান সেট হবে যখন উহাদের উপাদান গুলি অভিন্ন হয়। যদি A ও B দুইটি সেট হয় এবং উহারা সমান সেট হবে যখনঃ

A = B অথবা $A \in B$ এবং $B \in A$. উদাহরণস্বরূপ A ও B দুইটি সেট যদি A = {৫, ৭, ৯} এবং B = {৭, ৫, ৯} হয় তবে A=B পরস্পর সমান।

সংযোগ সেট (Union of Set) ঃ দুইটি সেট A ও B কে সংযোগ সেট বলা হবে যদি সেট A ও B এর সকল উপাদান ঐ সেটের অন্তর্ভুক্ত থাকবে। A ও B এর সংযোগ সেট কে AUB দ্বারা প্রকাশ করা হয় অতএব AUB $=\{X|X \in A$ অথবা $X|X \in B\}$.

উদাহরণঃ

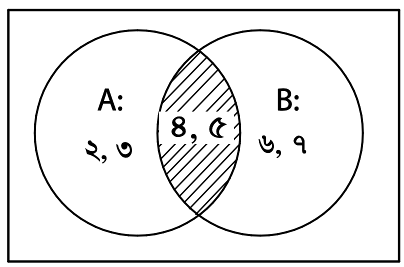
A = {১,২,৩,৪}, B = {৫,৬,৭} দুইটি সেট হয়, তবে A ও B এর সংযোগ সেটটি হবে AUB = {১,২,৩,৪,৫,৬,৭}। ভেন চিত্রের সাহায্যে AUB কে দেখানো হল



চিত্র : ১.১০

ছেদ সেট (Intersection Set)ঃ দুইটি সেট A ও B সেটকে ছেদ সেট বলা হবে, যখন একটি সেটের উপাদান অন্য সেট এর মধ্যে বিদ্যমান। এরূপ সেটকে প্রকাশ করা হয় $A \cap B$ দ্বারা। অতএব $A \cap B = \{X | X \in A$ এবং $X \in B\}$, ভেন চিত্রের সাহায্যে $A \cap B$ কে দেখানো হল যেখানে A ={২,৩,৪,৫}, B = {৪,৫,৬,৭}

ভেন চিত্র ঃ-



চিত্রঃ ১.১১

অন্তর সেট (Set difference)ঃ দুইটি সেট Aও B এর অন্তর সেট এমন একটি সেট যার উপাদানগুলি সেট A তে আছে কিন্তু B তে নেই। Aও B এর অন্তর সেট কে A-B দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অতএব $A\text{-}B = \{X | x \in A$ এবং $x \notin B\}$

উদাহরণ : যদি সেট A = {১,৪,৯} এবং B = {১,২,৫,১০} Aও B এর অন্তর সেট লিখুন? যেখানে U = {১, ২........১০}

সমাধান : আমরা জানি Aও B এর অন্তর সেট এর সংজ্ঞানুযায়ী :-

$A\text{-}B = \{x \in A$ এবং $x \notin B\} = AB^c$, এখানে, $B^c = U - B$ = {৩,৪,৬,৭,৮,৯}, $A\text{-}B = AB^c$ = {৪,৯},

সেটের বীজগাণিতিক বিধিঃ

সেট কতগুলি নিয়ম মেনে চলে, যদি A, B ও C ৩টি সেট হয় তবে,

১। বিনিময় বিধি $A \cup B = B \cup A$ এবং $A \cap B = B \cap A$

২। সংযোগ বিধি : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ এবং $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

৩। বন্টন বিধি : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ এবং $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

৪। আইডেমপোটেন্ট বিধি : $A \cap A = A$ এবং $A \cup A = A$

৫। ডিমরগ্যানের বিধি : $(A \cup B) = A \cap B$ এবং $(AB) = A \cup B$

সারসংক্ষেপঃ

সেট হল একই ধর্ম ও গুন বিশিষ্ট কতকগুলো জিনিসের তালিকা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-১.২ :

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নঃ

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিনঃ

১। কে সর্ব প্রথম সেট সম্পর্কে ধারনা দেন

ক) Fisher   খ) পৈসুঁ

গ) ক্যানটোর   ঘ) প্যাসকেল

২। একই ধর্ম বিশিষ্ট কতকগুলো জিনিসের সমষ্টি বা তালিকাকে বলে

ক) তথ্য   খ) সংশ্লেষ

গ) সংখ্যা   ঘ) সেট

সত্য/মিথ্যা নির্ণয়ঃ

৩। যদি সেট A এর উপাদান X হয় তবে $x \notin A$

৪। যদি কোন সেটে একটি মাত্র উপাদান থাকে তবে তাকে বলা হয় একক সেট

৫। সেট A= সেট B একটি প্রকৃত সেট

৬। বিনিময় সূত্র, $A \cup B = B \cup A$

শুন্য স্থান পূরণ ঃ

৭। $(A \cup B) =$ ________________________________

৮। $A \cup (B \cup C) =$ ______________________

বাক্য মিলানো ঃ

৯। রোষ্টার পদ্ধতির সেট	ক) x, B সেট এর মধ্যে অন্তর্ভূক্ত নয়।
১০। যদি $x \notin B$ হয়, তবে	খ) {হেড, টেইল}
১১। ১টি মুদ্রার সার্বিক সেট U =	গ) A= {X|৫≤ x≤১০; x একটি পূর্ণ সংখ্যা}

পাঠ-১.৩ সম্ভাবনা তত্ত্ব (Theory of Probability)

ভূমিকা

সম্ভাবনা সম্পর্কে পুরাপুরি জ্ঞান লাভ করার জন্য পূর্ব পাঠে বিভিন্ন সংজ্ঞা আলোচনা করা হয়েছে। সম্ভাবনা তত্ত্বের উন্নতি ও উৎকর্ষ সাধনে রাশিয়ান গণিত শাস্ত্রবিধ চেবাইশেভ (১৮২১-১৮৯৪), মার্কভ (১৮৫৬-১৯২২) এবং কলমোগরভের নাম বিশেষ ভাবে উল্লেখ যোগ্য। সম্ভাবনা তত্ত্বের সাহায্যে অত্যন্ত সহজভাবে অনিশ্চিত ঘটনাগুলির সম্ভাবনা নির্ণয় করা সম্ভব। মূলত: কোন ঘটনার নিশ্চয়তা মাত্রার গাণিতিক পরিমাপই সম্ভাবনা। এ পাঠে সম্ভাবনা তত্ত্ব সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন–

- সম্ভাবনার সংজ্ঞা
- সম্ভাবনা তত্ত্বের বিভিন্ন পর্যায়ক্রমিক সূত্র
- সম্ভাবনা বিষয়ক বিভিন্ন সমস্যার সমাধান

বিষয়বস্তু

সম্ভাবনা তত্ত্বঃ কোন ঘটনা ঘটার নিশ্চয়তা পরিমাপকে ঐ ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা বলে। একটি ঘটনার অনুকূল ফলাফল সংখ্যাকে ঐ ঘটনার সম্ভাব্য ফলাফল সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে ঐ ঘটনার সম্ভাবনা বলে। কোন A ঘটনার অনুকুল সংখ্যা m এবং মোট ফলাফল সংখ্যা n হলে ঘটনাটির সম্ভাবনা হবে,

সম্ভাবনা $= \frac{\text{A NUbvi AbyKzj msL¨v}}{\text{A NUbv NUvi † gvU djvdj msL¨v}}$

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

সম্ভাবনা তত্ত্বকে দুই ভাগে ভাগ করা হয়।

১। ক্ল্যাসিক্যাল বা গাণিতিক সম্ভাবনা

২। পরিসংখ্যানিক সম্ভাবনা

১। ক্ল্যাসিক্যাল বা গাণিতিক সম্ভাবনা (Classical or Mathematical Probability): ক্লাসিক্যাল সম্ভাবনা তত্ত্ব বা গাণিতিক সম্ভাবনার তত্ত্বটি ল্যাপলাস প্রথম প্রদর্শন করেছেন। তার মতে কোন একটি সীমিত নমুনা ক্ষেত্রে সংঘঠিত কোন ঘটনার অনুকুল ফলাফলকে ঐ নমুনা ক্ষেত্রের মোট ফলাফল দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে ঐ ঘটনার ক্ল্যাসিক্যাল বা গাণিতিক সম্ভাবনা বলে। কোন নমুনা ক্ষেত্রের

মোট ফলাফল সংখ্যা N হলে এবং অনুকুল ফলাফল সংখ্যা M হলে E ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা,

$$P[E] = \frac{M}{N}$$

সম্ভাবনার মান ধনাত্মক, অর্থাৎ $O \leq P(A) \leq ১$; যখন A একটি ঘটনা। কোন ঘটনা ঘটাকে A দ্বারা প্রকাশ করলে এবং ঘটনা না ঘটাকে $\bar{A}$প্রকাশ করলে $P(A) + P(\bar{A}) = ১$।

পরিসংখ্যানিক সম্ভাবনা [Statistical Probability]: গণিত শাস্ত্রবিদ ভন মাইকেলের সংজ্ঞানুযায়ী কোন একটি চেষ্টা অনেকবার পূনরাবৃত্তি করলে উহার নমুনাক্ষেত্রের মোট ফলাফল সংখ্যা খুব বেশী বা অসীম হলে অর্থাৎ $n \to \alpha$ হলে এবং ঐ নমুনা ক্ষেত্রে কোন ঘটনা E এর অনুকুল ফলাফল সংখ্যা M হলে $\frac{M}{N}$একটি স্থির রাশি হবে। ঐ স্থির রাশিটির সীমান্ত মান কে ঐ ঘটনার পরিসংখ্যানিক সম্ভাবনা বলে।

এ ক্ষেত্রে E ঘটনাটির পরিসংখ্যানিক সম্ভাবনা $P[E] = \underset{N\square a}{\text{Lim}} \frac{M}{N}$।

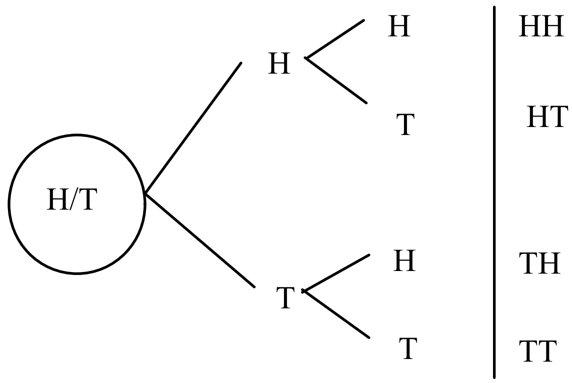
ক্ল্যাসিক্যাল ও পরিসংখ্যানিক সম্ভাবনার মধ্যে পার্থক্য ঃ

ক্ল্যাসিক্যাল ও পরিসংখ্যানিক সম্ভাবনার মধ্যে যে পার্থক্য গুলি পরিলক্ষিত হয় তা নিম্নে দেওয়া হল ঃ

ক্ল্যাসিক্যাল সম্ভাবনা	পরিসংখ্যানিক সম্ভাবনা
১। ক্ল্যাসিক্যাল সম্ভাবনা সংজ্ঞা প্রাচীনতম সংজ্ঞা।	১। পরিসংখ্যানিক সম্ভাবনা সংজ্ঞাটি নতুন সংজ্ঞা ।
২। সম্ভাবনা কোন ঘটনার অনুকুল ও মোট ফলাফলের অনুপাত ।	২। পরিসংখ্যানিক সম্ভাবনা, অনুকুল ও মোট ফলাফলের অনুপাতের সীমন্ত মান।
৩। ক্ল্যাসিক্যাল সম্ভাবনার ক্ষেত্রে ফলাফলগুলি সামঞ্জস্যপূর্ণ, সম্পূরক ও সমসম্ভাব্য হতে হবে।	৩। পরিসংখ্যানিক সম্ভাবনা ক্ষেত্রে কোন শর্ত নেই।
৪। ক্ল্যাসিক্যাল সম্ভাবনার ক্ষেত্রে মোট ফলাফল সংখ্যা N সব সময়ে সমান।	৪। এ ক্ষেত্রে মোট ফলাফল সংখ্যা অসীম ধরে নেওয়া হয়।
৫। গাণিতিক প্রক্রিয়া আরোপের উপযোগী।	৫। গাণিতিক প্রক্রিয়ায় আরোপের উপযোগী নয়।

উদাহরণ : একটি মুদ্রা ২ বার নিক্ষেপ করলে নমুনা ক্ষেত্রটি লিখুন? উভয় মুদ্রার হেড পাওয়ায় সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

সমাধান : একটি মুদ্রা ২বার নিক্ষেপ করলে নমুনা ক্ষেত্রটি হবে



∴ নমুনা ক্ষেত্র, S = {H H, H T, T H, T T} অর্থাৎ ৪টি,

২টি হেড আসা অনুকূল ঘটনা {HH} অর্থাৎ ১টি।
আমরা জানি, সম্ভাবনার সংজ্ঞানুযায়ী

P (অনুকূল ঘটনা)= (NUbv AbyK‚j djvdj msL¨v) / († gvU djvdj msL¨v) = $\frac{1}{4}$ = .২৫

∴ নির্ণেয় সম্ভাবনা = .২৫

উদাহরণ : ২টি ছক্কা একবার নিক্ষেপে নমুনা ক্ষেত্র লিখুন? নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

১। ছক্কার ২টি পিঠে একই সংখ্যা থাকবে
২। ছক্কার ১ম পিঠে জোড় সংখ্যা থাকবে
৩। ১ম ছক্কার সংখ্যা ২য় ছক্কার দ্বিগুন
৪। উভয় ছক্কার সংখ্যা দুইটি যোগফল = ৭
৫। উভয় ছক্কার সংখ্যা দুইটির গুনফল = ৬

সমাধান : ২টি ছক্কা একবার নিক্ষেপে নমুনা ক্ষেত্রটি নিম্নরূপ :

১ম ছক্কা

	১,১	১,২	১,৩	১,৪	১,৫	১,৬
	২,১	২,২	২,৩	২,৪	২,৫	২,৬
২য়	৩,১	৩,২	৩,৩	৩,৪	৩,৫	৩,৬
ছক্কা	৪,১	৪,২	৪,৩	৪,৪	৪,৫	৪,৬
	৫,১	৫,২	৫,৩	৫,৪	৫,৫	৫,৬
	৬,১	৬,২	৬,৩	৬,৪	৬,৫	৬,৬

∴ মোট ফলাফল ৩৬টি

১। উভয় ছক্কায় একই সংখ্যার অনুকুল নমুনা ক্ষেত্র,

S (উভয় ছক্কায় একই সংখ্যার অনুকুল সংখ্যা) = {(১,১), (২,২), (৩,৩),(৪,৪),(৫,৫),(৬,৬)} অর্থাৎ ৬টি।

অতএব সম্ভাবনা

$$= \frac{\text{GKB msL¨v AbyK,j djvdj msL¨v}}{\text{† gvU djvdj msL¨v}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

২। ছক্কার ১ম টির পিঠে জোড় সংখ্যা থাকবে তার নমুনা ক্ষেত্র

{(২,১), (২,২), ..., (২,৬), (৪,১), (৪,২) ......, (৪,৬), (৬,১), (৬,২), ..., (৬,৬)} = ১৮টি।

∴ সম্ভাবনা (১ম টির পিঠে জোড় সংখ্যা)

$$= \frac{\text{1g wUi wc ‡ V † Rvo msL¨v Zvi AbyKzj djvdj}}{\text{† gvU djvdj msL¨v}} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

৩। ১ম ছক্কার সংখ্যার ২য় টির দ্বিগুন এর অনুকুল নমুনা বিন্দু

= {(২,১) (৪,২) (৬,৩)} অর্থাৎ ৩টি।

∴ সম্ভাবনা(১ম ছক্কার সংখ্যা ২য়টির দ্বিগুন) =

$$\frac{\text{1g Q°vi msL¨v 2q wUi wØ,b Gi AbyKzj djvd ‡ ji msL¨v}}{\text{† gvU djvdj msL¨v}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

৪। উভয় ছক্কার সংখ্যা ২টির যোগফল ৭ এর নমুনা ক্ষেত্র

= {(১,৬, (২,৫), (৩,৪), (৪,৩), (৫,২), (৬,১)} অর্থাৎ ৬টি

∴ সম্ভাবনা(উভয় ছক্কার সংখ্যা ২টির যোগফল ৭)

$$= \frac{\text{Dfq Q°vi msL¨v 2wUi ‡ hvMdj 7Gi AbyKzj djvdj}}{\text{† gvU djvdj msL¨v}}$$

$$= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

৫। উভয় ছক্কার সংখ্যা ২টির গুনফল ৬ এর অনুকুল নমুনা ক্ষেত্র

= {(১,৬), (৩,২), (২,৩), (৬,১)}অর্থাৎ ৪টি।

∴ নির্ণেয় সম্ভাবনা -

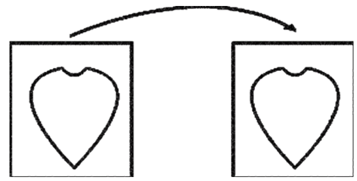
সম্ভাবনা (উভয় ছক্কার সংখ্যা ২টির গুনফল ৬)

$$= \frac{\text{Dfq Q°vi msL¨v 2wUi ,bdj 6 Gi AbyKzj msL¨v}}{\text{† gvU djvdj msL¨v}}$$

$$= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

উদাহরণ-৩ঃ এক প্যাকেট তাস হতে একটি তাস দৈব ভাবে নেওয়া হল তাসটি টেক্কা না হবার সম্ভাবনা কত?

সমাধানঃ



চিত্রঃ ১.১২

প্যাকেটে মোট তাস ৫২টি, তন্মধ্যে টেক্কা ৪টি

অতএব, তাসটি টেক্কা হওয়ায় সম্ভাবনা, P(টেক্কা হওয়ায় সম্ভাবনা)

$$= \frac{\text{† U°v Avmvi AbyKzj msL¨v}}{\text{† gvU djvdj}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

অতএব, টেক্কা না আসার সম্ভাবনা -

সম্ভাবনা (টেক্কা না আসা) + সম্ভাবনা(টেক্কা আসা)= ১

$\therefore$ সম্ভাবনা (টেক্কা না আসা) = ১-$\frac{1}{13}$= $\frac{12}{13}$

উদাহরণ-৪: একটি বাক্সে ৫টি কালো ও ৪টি সাদা বল আছে, উহা হতে দৈবভাবে ২টি বল পাওয়া গেল। বলটি ২টি ক) একই রংয়ের ও খ) ভিন্ন রংয়ের হওয়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান : বাক্সে কালোবল = ৫টি

সাদা বল = ৪টি

মোট বল = ৫+৪ = ৯টি

৯টি বল থেকে ২টি নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা- ৯C২ = **Error!**= $\frac{9\square 8}{2}$

= ৩৬ ভাবে।

ক. বল ২টি একই রংয়ের হওয়ার সম্ভাবনা- Prob{বল ২টি সাদা অথবা বল ২টি কালো}

= Prob {বল ২টি সাদা} + Prob{বল ২টি কালো}

$$= \frac{4c2}{9c2} + \frac{5c2}{9c2} = \frac{\frac{4\square 3\square 2!}{2\square 2}}{36} + \frac{\frac{5\square 4\square 3!}{2!\square 3!}}{36} = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} = \frac{4}{9}$$

খ) বল ২টি ভিন্ন রংয়ের হওয়ার সম্ভাবনা,

= Prob{১টি সাদা এবং ১টি কালো}

$= \frac{5c1 \square 4c1}{9c2} = \frac{5 \square 4}{36} = \frac{5}{9}$।

নিজে করুন:

১. ২টি মুদ্রা ১বার নিক্ষেপের নমুনা ক্ষেত্র লিখুন?

ক) ১টি হেড ও ১টি টেইল

খ) ২টিই হেড

গ) ২টিই টেইল

ঘ) ১টি টেইল ও ১টি হেড আসার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

২. ১টি ছক্কা ও একটি মুদ্রা নিক্ষেপে নমুনা ক্ষেত্রটি লিখুন? একটি জোড় সংখ্যা ও একটি হেড পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ ঃ

কোন ঘটনা ঘটার নিশ্চয়তা পরিমাপকে ঐ ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-১.৩:

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন:

১। কোন রাশিয়ান গণিত শাস্ত্রবিদ সম্ভাবনা তত্ত্বের উন্নতি সাধন করেন

ক) গউস খ) চেবাইশেভ

গ) ফিশার ঘ) ইয়ল

২। সম্ভাবনা তত্ত্ব P(A) সমান

ক) NUbvi AbyKzj msL¨v / NUbvi † gvU msL¨v খ) NUbvi AbyKzj msL¨v + 1 / NUbvi † gvU msL¨v

গ) AbyKzj Z_¨ / † gvU Z_¨ ঘ) Mo / † f`v¼

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় ঃ

৩। সম্ভাবনাকে P(A) দ্বারা প্রকাশ করলে $P(A) = \frac{m}{n}$।

৪। সম্ভাবনার মান ধনাত্মক।

৫। পরিসংখ্যানিক সম্ভাবনা সংজ্ঞাটি নতুন।

শূন্য স্থান পূরণ ঃ

৬। পরিসংখ্যানিক সম্ভাবনা P(E) = --------------------।

৭। ঘটার সংখ্যাকে A ও না ঘটার সংখ্যাকে $\bar{A}$ দ্বারা প্রকাশ করলে,

$P(A) + P(\bar{A})$ = ---------- ।

৮। ক্ল্যাসিকেল সম্ভাবনা কোন ঘটনার অনুকুল ও মোট ফলাফলের ------------ ।

বাক্য মিলানো ঃ

৯। একটি মুদ্রা ২ বার নিক্ষেপের নমুনা ক্ষেত্র	ক) ফলাফল ৩৬।
১০। ২ টি ছক্কা ১ বার নিক্ষেপে নমুনা ক্ষেত্রের মোট	খ) সম্ভবনা বলে।
১১। কোন ঘটনা ঘটার নিশ্চয়তা পরিমাপকে ঐ ঘটনা ঘটার	গ) S = {HH, HT, TH, TT}

পাঠ-১.৪ সম্ভাবনা সম্পর্কিত বিধি ও শর্তাবলী

ভূমিকা

ইতোপূর্বে সম্ভাবনার বিভিন্ন সংজ্ঞা ও দিক নিয়ে আলোচনা করেছি। সম্ভাবনা তত্ত্বে বীজগণিত ব্যবহার অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। সম্ভাবনা বীজগাণিতিক কিছু শর্ত মেনে চলে যা এ পাঠে আলোচনা করা হল: ল্যাপলাস গাণিতিক

সূত্র প্রকাশ করার পর সম্ভাবনাতত্ত্বে বীজগাণিতিক ব্যবহার বৃদ্ধি পেতে থাকে। এর পর জার্মান গণিত শাস্ত্রবিধ জে ক্যানটোর (১৮৪৫-১৯১৮) সেটের ধারণা দেওয়ার পর সম্ভাবনা তত্ত্ব আরও বিস্তার লাভ করে।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন-

- সম্ভাবনার যোজন ও গুণন সূত্রের বর্ণনা (বিভিন্ন ক্ষেত্রে)
- শর্তাধীন সম্ভাবনা
- বিভিন্ন সমস্যার সমাধান।

সম্ভাবনার যোজন সূত্র [Additive law of Probability]

সম্ভাবনার যোজনশীল সূত্র দু'ধরণের হয়ে থাকে-

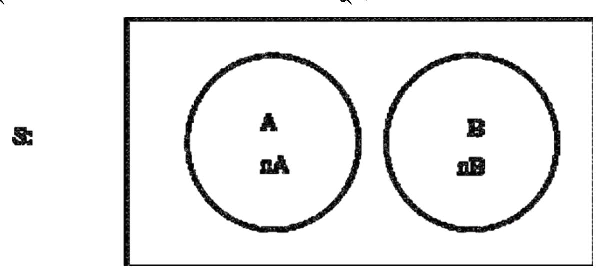
১. সম্ভাবনার যোজনশীল সূত্র (বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে)

২. সম্ভাবনার যোজনশীল সূত্র(অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে)

১. সূত্রঃ দুইটি ঘটনা বর্জনশীল হলে যে কোন একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা ঘটনাগুলির পৃথক ভাবে ঘটার সম্ভাবনার যোগফলের সমান। অর্থাৎ A ও B ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা

$\text{Prob}[A \cup B] = \text{Prob}[A] + \text{Prob}[B]$

প্রমাণ: ধরা যাক, কোন নমুনা ক্ষেত্রে S এর অন্তর্গত A ও B দুইটি ঘটনা।



চিত্র: বর্জনশীল ঘটনা

এখানে নমুনা ক্ষেত্রে সংখ্যা $n(S) = n$

A ঘটনার অনুকূল ফলাফল সংখ্যা, $n(A) = n_A$

B ঘটনার অনুকূল ফলাফল সংখ্যা, $n(B) = n_B$

$\therefore$ Prob[A] = **Error!**= $\frac{nA}{n}$ এবং Prob[B] = **Error!**= $\frac{nB}{n}$

যেহেতু A ও B বর্জনশীল ঘটনা, সুতরাং A≈B এর অনুকূল ফলাফল সংখ্যা -

$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) = n_A + n_B$

$\therefore$ Prob[A∪B] = **Error!**= **Error!**= $\frac{nA + nB}{n} = \frac{nA}{n} + \frac{nB}{n}$

fi$Prob[A \cup B] = Prob[A]+Prob[B]$(প্রমাণিত)

২. দুইটি ঘটনা পরস্পর অবর্জনশীল হলে যে কোন একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা উহাদের পৃথক ভাবে ঘটার সম্ভাবনার যোগফল থেকে একত্রে ঘটার সম্ভাবনার বিয়োগ ফলের সমান অর্থাৎ A ও B দুইটি অবর্জনশীল ঘটনা হলে

$$Prob[A \cup B] = Prob[A]+Prob[B]-Prob[A \cap B]$$

প্রমাণঃ

ধরা যাক, কোন নমুনাক্ষেত্র Sএর অন্তর্গত Aও B দুইটি অবর্জণশীল ঘটনা

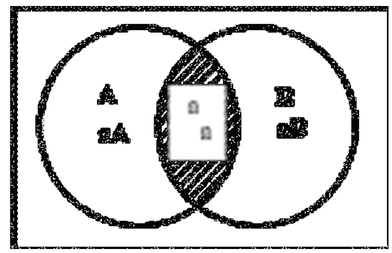
এখানে, নমুনা ক্ষেত্রের মোট ফলাফল সংখ্যা $n(S) = n$

A ঘটনার অনুকুল ফলাফল সংখ্যা, $n(A) = n_A$

B ঘটনার অনুকুল ফলাফল সংখ্যা, $n(B) = n_B$

$A \cap B$ ঘটনার অনুকুল ফলাফল সংখ্যা $N(AB) = n_{AB}$

$\therefore Prob[A] =$ **Error!**$= \frac{nA}{n}$'



অবর্জনশীল ঘটনা

$Prob[B] =$ **Error!**$= \frac{nB}{n}$

এবং $Prob[A \cap B] =$ **Error!**$= \frac{nAB}{n}$

যেহেতু $A \cap B$ পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা তাই

$Prob[A \cup B] =$ **Error!**$= \frac{nA + nB - nAB}{n}$

fi$Prob[A \cup B] = \frac{nA}{n} + \frac{nB}{n} - \frac{nAB}{n}$

$\therefore n(A \cup B) = n_A - n_{AB} + n_B$

$= n_A + n_B - n_{AB}$

$\therefore P(A \cup B) = Prob[A]+Prob[B]-Prob[A \cap B]$ প্রমাণিত।

সম্ভাবনার গুণন সূত্রঃ সম্ভাবনা গুনন সূত্র দু'ক্ষেত্রে সংঘঠিত হয়-

১ গুণন সূত্র [যখন ঘটনা সমূহ স্বাধীন হয়]

২ গুণন সূত্র [যখন ঘটন সমূহ অধীন হয়]

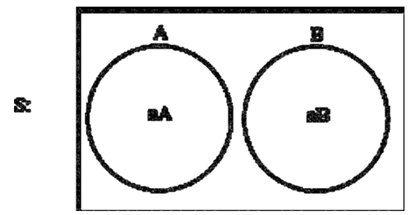
১. গুনন সূত্র (যখন ঘটনা সমূহ স্বাধীন): দুইটি ঘটনা স্বাধীন হলে, উহাদের একত্রে ঘটার সম্ভাবনা, উহাদের পৃথক ভাবে ঘটার সম্ভাবনার গুনফলের সমান অর্থাৎ নমুনা ক্ষেত্র S এর অন্তর্গত A ও B দুইটি স্বাধীন ঘটনা হলে,

$$Prob[A \cap B] = Prob[A] \times Prob[B]$$

প্রমাণ ঃ

ধরা যাক, S নমুনা ক্ষেত্রে অন্তর্গত A ও B দুইটি স্বাধীন ঘটনা।

সুতরাং Prob[A] = Prob[A/B] এবং Prob[B] = Prob[B/A]



এখন, S নমুনা ক্ষেত্রের মোট ফলাফল সংখ্যা, n(S) = n

A ঘটনার অনুকুল ফলাফল সংখ্যা, $n(A) = n_A$

B ঘটনার অনুকুল ফলাফল সংখ্যা, $n(B) = n_B$

$A \cap B$ ঘটনার অনৃকুল ফলাফল সংখ্যা = $n(A \cap B) = n_{AB}$

সুতরাং $Prob[A] = \frac{nA}{n}$; $Prob[B] = \frac{nB}{n}$

$\therefore Prob[B/A] = \frac{nAB}{nA} = \frac{\frac{nAB}{n}}{\frac{nA}{n}} =$ **Error!**

বা, $Prob(A \cap B) = Prob(A/B) \times Prob(A)$

$= Prob[A] \times Prob[B]$ প্রমাণিত

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে,

$P(A \cap B \cap C) = Prob(A) \times Prob(B) \times Prob(C)$

২. গুণন সূত্র (দুইটি অধীন ঘটনার ক্ষেত্রে): দুইটি অধীন ঘটনা একত্রে ঘটার সম্ভাবনা উহাদের একটির শর্তহীন সম্ভাবনা ও অন্যটির শর্তাধীন সম্ভাবনার গুনফলের সমান।

শর্তাধীন সম্ভাবনা (Conditional Probability) : A ও B কোন নমুনা ক্ষেত্র S এর অন্তর্ভুক্ত দুইটি ঘটনা। ঘটনা B এর মানের জন A এর শর্তাধীন সম্ভাবনাকে Prob[A/B] দ্বারা প্রকাশ করলে শর্তাধীন সম্ভাবনা-

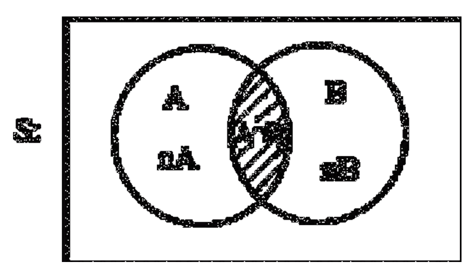
$Prob[A/B] = \frac{Prob[AB]}{Prob[B]}$; Prob[B] □ 0

আবার, ঘটনা A এর মানের জন্য B এর শর্তাধীন সম্ভাবনাকে Prob[B/A] দ্বারা প্রকাশ করলে Prob[B/A] = $\frac{Prob[A«B]}{Prob[A]}$; Prob[A] □ 0

প্রমাণ :

ধরা যাক,

নমুনা ক্ষেত্রে A ও B দুইটি ঘটনা যেখানে -



নমুনা ক্ষেত্রের মোট ফলাফল সংখ্যা = n(S)

A ঘটনার অনুকুল ফলাফল সংখ্যা = n(A)

$A \cap B$ ঘটনার অনুকুল ফলাফল সংখ্যা = $n(A \cap B)$

অতএব, Prob[A] = **Error!**এবং Prob[A∩B] = **Error!**কিন্তু, আমরা জানি, Prob[A ∩ B] =

Prob[A] Prob[B/A]fi**Error!**= **Error!**Prob[B/A]

fi Prob[B/A] = **Error!**

$$\text{Prob}[B/A] = \frac{\text{Prob}[A\square B]}{\text{Prob}[A]} ;\text{Prob}[A] \neq 0$$

উদাহরণ: A ও B দুইটি সম্পূর্ণ ঘটনা এবং Prob[A] =.৭ এবং Prob[B] =.৪ হলে

১। Prob[A∩B] = ?

২। Aও B স্বাধীন কিনা প্রমাণ করুন

৩। যদি ঘটনা দুইটি অধীন হয় সেক্ষেত্রে Prob[A/B] এবং Prob[B/A]নির্ণয় করুন।

সমাধান :

১. যেহেতু A ও B দুইটি সম্পূর্ণ ঘটনা,

অতএব P(A∪B) = ১

এখন, P(A∪B) = P(A)+P(B)-P(A∩B)

fi ১ = .৭+.৪- P(A∩B)

fi P (A∩B) = ১.১-১

∴ P(A∩B) = .১

২. ঘটনা দুইটি স্বাধীন হওয়ার শর্ত -

Prob[A∩B]=Prob[A]×Prob[B]

এখানে, Prob[A∩B] = .৭ ×.৪ = .২৮

∴ Prob[A∩B]≠Prob[A]×Prob[B]

৩. A ও B দুইটি অধীন ঘটনার ক্ষেত্রে

$$\text{Prob}[B/A] = \frac{\text{Prob}[A\square B]}{\text{Prob}[A]} = \frac{.1}{.4} = \frac{1}{4}$$

এবং $\text{Prob}[A/B] = \frac{\text{Prob}[A\square B]}{\text{Prob}[B]} = \frac{.1}{.7} = \frac{1}{7}$

নিজের করুন:

একটি পরিবারে তিনটি সন্তান আছে। ছোট সন্তানটি ছেলে হলে প্রথম দু'টি মেয়ে হওয়ার সম্ভাবনা কত?

Hint: A: ছোট ছেলে এবং B: প্রথম দু'টি মেয়ে- নির্ণয় করতে হবে

Prob[B|A] = কত? এখানে মোট ফলাফল ২৩ = ৮ টি এবং A ও B নমুনা ক্ষেত্র যথাক্রমে

A = {BBB, BGB, GBB, GGB} এবং B = {GGB, GGG}

সারসংক্ষেপঃ

ল্যাপলাস গানিতিক সূত্র ব্যবহার করার পর সম্ভাবনা তত্ত্বে বীজগণিতের ব্যবহার বৃদ্ধি পেতে থাকে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-১.৪

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নঃ

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিনঃ

১। কার গাণিতিক সূত্র প্রকাশ পাওয়ার পর সম্ভাবনা তত্ত্ব ব্যবহার বাড়তে থাকে

ক) গউস খ) ল্যাপলাস

গ) ফিশার ঘ) ক্যানটর

২। শর্তাধীনে সম্ভাবনার সূত্র নিচের কোনটি

ক) $P(A) + P(B) = P(A\cap B)$ খ) $P(A\cap B) = P(A).\ P(B)$

গ) Prob[A/B] = **Error!**ঘ) P(A) + P(B) = ১

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় ঃ

৩। Prob [B/A] = **Error!**; Prob [A] ≥ 0

৪। Prob $[A\cap B]$ = Prob[A] + P[B] ; যখন A ও B ঘটনা দুইটি স্বাধীন

৫। যখন A ও B ঘটনা দুইটি অধীন তখন

Prob $[A\cap B]$ = Prob[A] + Prob[B]

শুন্যস্থান পূরণ ঃ

৬। দুইটি ঘটনা বর্জনশীল হলে, Prob $[A\cap B]$ = ...

৭। দুইটি ঘটনা অবর্জনশীল হলে, Prob $[A\cap B]$ = ...

বাক্য মিলানোঃ

৮। সম্ভাবনা তত্ত্বে বীজগণিতের ব্যবহার	ক. ধারনা দেন সম্ভাবনা তত্ত্বে।
৯। জে ক্যানটোর সেটের	খ. অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়

চূড়ান্ত মূল্যায়ণ-১

রচনামূলক প্রশ্ন

১। সম্ভাবনার সংজ্ঞা লিখুন। নিশ্চিত ঘটনা ও অনিশ্চিত ঘটনার পার্থক্য সহ সংজ্ঞা লিখুন।

২। প্রকৃত সেটের সংজ্ঞা লিখুন। সেটের বীজগাণিতিক বিধিগুলি লিখুন।

৩। সম্ভাবনার সংজ্ঞা লিখুন। ক্ল্যাসিক্যাল ও পরিসংখ্যানিক সম্ভাবনার পার্থক্যগুলি লিখুন।

৪। শর্তাধীন সম্ভাবনা ব্যাখ্যা করুন। সম্ভাবনার সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান কত?

৫। দু'টি ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার যোগসূত্র লিখুন ও প্রমান করুন।

৬। দু'টি ঘটনা A ও B স্বাধীন হলে সম্ভাবনার গুণন সূত্রের ক্ষেত্রে প্রমান করুন $Prob\ [A \cap B]=Prob\ [A].Prob[B]$

৭। একটি মুদ্রা ৪ বার বা ৪টি মুদ্রা একবার নিক্ষেপে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

ক) ৪টি মাথা আসার সম্ভাবনা কত?

খ) বড় জোর ২টি মাথা এবং ২টি লেজ আসার সম্ভাবনা কত?

গ) সবগুলো মাথা না আসার সম্ভাবনা কত?

৮। একটি বাক্সে ১৫টি বল আছে, তম্মধ্যে ৪টি লাল, ৫টি কালো এবং ৬টি সাদা বল আছে। নির্বিচারে ৩টি বল বাক্স হতে তোলা হল।

ক) তিনটি লাল হবে;

খ) ২টি সাদা হবে;

গ) সবগুলো একই রং এর বল হবে;

ঘ) কমপক্ষে ২টি কালো হবে অথবা

ঙ) প্রত্যেকটি ভিন্ন ভিন্ন রং এর বল হবে তার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন-

৯। ৫২ খানা তাসের একটি প্যাকেট হতে ২টি তাস নির্বাচন করা হল। একটি তাসও টেক্কা না পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন-

১০। দু'টি মুদ্রা ও ১টি ছক্কা নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্রটি লিখুন। নিম্নের ক্ষেত্রে সম্ভাবনা নির্ণয় করুন-

ক) দুইটি হেড ও জোড় সংখ্যা

খ) দুইটি লেজ ও ছক্কার তিন দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা

গ) একটি হেড, একটি লেজ ও জোড় সংখ্যা

উত্তর মালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন:১.১

১। গ ২। ক ৩। মিথ্যা ৪। সত্য ৫। সত্য ৬। ঘটনা

৭। সমসম্ভাব্য ফল বলে ৮। পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা বলে

পাঠোত্তর মূল্যায়ন: ১.২

১। গ ২। ঘ ৩। মিথ্যা ৪। সত্য ৫। সত্য ৬। সত্য

৭। $B \cup A$ ৮। $(A \cup B) \cap (B \cup C)$ ৯। গ ১০। ক ১১। খ

পাঠোত্তর মূল্যায়ন: ১.৩

১। খ ২। ক ৩। সত্য ৪। সত্য ৫। সত্য ৬। M/N

৭। ১ ৮। অনুপাত ৯। গ ১০। ক ১১। খ ১২। খ

পাঠোত্তর মূল্যায়ন: ১.৪

১। ঘ ২। গ ৩। সত্য ৪। সত্য ৫। মিথ্য

৬। Prob [A] + Prob [B] ৭। Prob[A]+Prob[B]-Prob[A$\cap$ B]

৮। খ ৯। ক
