ইউনিট ২

দৈব চলক ও গাণিতিক প্রত্যাশা
(Random Variable and Mathematical Expectation)

ভূমিকাঃ

পুর্বে আমরা বিভিন্ন চলক (যেমন- গুনগত চলক, পরিমাণগত চলক, বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন চলক) সম্পর্কে আলোচনা করেছি। এগুলোকে গাণিতিক চলক বলা হয়। সম্ভাবনাতত্ত্বের ক্ষেত্রে আর এক ধরনের চলকের সাথে আমরা পরিচিত হব তাকে দৈব চলক (Random Variable) বলে। এ চলকের সাথে সম্ভাবনার একটা যোগসূত্র আছে।এ ইউনিটে আমরা দৈব চলক ও গাণিতিক প্রত্যাশা সম্পর্কে আলোচনা করব।

উদ্দেশ্য

এ ইউনিট শেষে আপনি বলতে পারবেন-

- দৈব চলক, সম্ভাবনা নিবেশন
- সম্ভাবনা অপেক্ষক, বিন্যাস অপেক্ষক
- সম্ভাবনা অপেক্ষক সম্পর্কিত কতিপয় সমস্যা
- গাণিতিক প্রত্যাশা
- গাণিতিক প্রত্যাশা সম্পর্কিত কতিপয় উপপাদ্য ও সমস্যা

পাঠ-২.১ দৈব চলক, বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন চলক, সম্ভাবনা নিবেশন।

ভূমিকাঃ

সম্ভাবনার সাথে সম্পর্কযুক্ত চলক হল দৈব চলক। বর্তমান পাঠে দৈব চলক সম্পর্কে আলোচনা করা হল।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি -

- দৈব চলক সম্পর্কে বলতে পারবেন।
- বিভিন্ন ধরণের দৈব চলকের সংজ্ঞা দিতে পারবেন।
- দৈব চলকের বিভিন্ন উদাহরণ দিতে পারবেন।
- সম্ভাবনা নিবেশন সম্পর্কে ধারণা করতে পারবেন।

দৈব চলক (Random Variable)

একটা চলক যার মান একটি দৈব পরীক্ষণের ফলাফলের উপর নির্ভর করে নির্ধারিত হয় এবং এটা ঘটার যদি নির্দিষ্ট সম্ভাবনা থাকে তবে তাকে দৈব চলক বলে। দৈব চলককে অনেক সময় সম্ভাবনা চলক (Probability Variable) বলা হয়।

ধরা যাক, একটি নিখুত মুদ্রা দুবার উৎক্ষেপ করা হল। মুদ্রার এক পাশের ঘটনাকে যদি হেড (H) এবং অন্য পাশের ঘটনাকে যদি টেইল (T) ধরা হয় এবং যদি বলা হয় কতগুলো H আসতে পারে। এ প্রশ্নটির উত্তর পরীক্ষণের ফলাফলের ভিত্তিতে নির্ধারিত হবে। এখানে সর্বোচ্চ ২টি H এবং সর্বনিম্ন কোন H নাও ঘটতে পারে। আবার ১টি H এবং ১টি T হতে পারে। অর্থাৎ নিম্নে চারটি সম্ভাব্য ফল পাওয়া যেতে পারে-

HH, HT, TH, TT

যদি হেড H এর সংখ্যাকে X দ্বারা প্রকাশ করা হয় তাহলে দেখা যায় যে X এর মান ২, ১, ০ হতে পারে এবং তাই মানগুলি পাওয়ার সম্ভাবনা হবে যথাক্রমে $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, এবং $\frac{1}{4}$

চলক যেমন বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন হতে পারে, দৈব চলকও বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন হয়।

বিচ্ছিন্ন দৈব চলক (Descrete Random Variable)

যদি কোন দৈব চলক X এর মান $X_১, X_২$ .... X_n ইত্যাদি কতগুলি বিচ্ছিন্ন সংখ্যা হয় (i = ০, ১,২ ...... n) এবং প্রত্যেকটি ঘটনার একটি নির্দিষ্ট সম্ভাবনা $Prob(X_i=x_i) = P_i$ (P-এর মান '0' থেকে বড় হবে) অর্থাৎ $Prob[X_i=x_i]=P_i]\geq 0$; i-১, 2, ... n থাকে তবে X কে বিচ্ছিন্ন দৈব চলক বলে। কোন রাস্তায় দুর্ঘটনার সংখ্যা, একটা অফিসে ফোন আসার সংখ্যা, একটা প্রশ্নপত্রে ভুলের সংখ্যা ইত্যাদি বিচ্ছিন্ন চলকের উদাহরণ।

অবিচ্ছিন্ন দৈব চলক (Continuous Random Variable)

অবিচ্ছিন্ন দৈব চলক আমরা তখনই বলবো যদি চলকটি একটি নির্দিষ্ট পরিসরে অবস্থান করে, ধরা যাক, (a, b) পরিসরে x এর মান Xi; i = ১, ২ .... n এবং যে কোন মানের ক্ষেত্রে একটি নির্দিষ্ট ঘটনা $P(X_i=x_i) \geq 0$ হয় তা হলে তাকে অবিচ্ছিন্ন দৈব চলক বলা হয়।

সম্ভাবনা নিবেশনঃ

কোন চলকের বিভিন্ন মান এবং এদের গনসংখ্যা নিয়ে আমরা যেমন গনসংখ্যা নিবেশন তৈরী করতে পারি ঠিক তেমনি দৈব চলকের বিভিন্ন সম্ভাব্য মান এবং প্রতিটি মানের সংগে সংশ্লিষ্ট সম্ভাবনার মান একত্রে সম্ভাবনা নিবেশন তৈরী করে। যদি X-এর সম্ভাব্য মান X_i এবং এদের সম্ভাবনার মান P_i হয়, তবে এদের মানের সারি একত্রে সম্ভাবনা নিবেশন গঠন করে।

গনসংখ্যা নিবেশনকে যেমন সারণী ও চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় সম্ভাবনা নিবেশনের ক্ষেত্রেও অনুরূপ সারণী এবং চিত্র ব্যাবহার করা যায়। বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন গনসংখ্যা নিবেশনের অনুরূপ দৈব চলকের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে বিচ্ছিন্ন সম্ভাবনা নিবেশন (Discrete Probability Distribution) ও অবিচ্ছিন্ন সম্ভাবনা নিবেশন (Continuous Probability Distribution) হয়।

সারসংক্ষেপ ঃ

দৈব চলক দৈব পরীক্ষনের ফলাফলের উপর নির্ভর করে নির্ধারন করা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.১

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নঃ

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিনঃ

১। দৈব চলকের সাথে কিসের সম্পর্ক আছে?

ক) গড়   খ) সম্ভাবনা

গ) মধ্যমা   ঘ) প্রচুরক

২। দৈব চলকের অনেক সময় কি বলা হয়?

ক) সম্ভাবনা চলক   খ) বিচ্ছিন্ন চলক

গ) অবিচ্ছিন্ন চলক   ঘ) কোনটিই নয়

৩। ১টি প্রশ্নপত্রে ভুলের সংখ্যা কোন দৈব চলক?

ক) বিচ্ছিন্ন দৈব চলক   খ) অবিচ্ছিন্ন দৈব চলক

গ) উভয়ই   ঘ) কোনটিই নয়

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় ঃ

৪। দৈব চলককে অনেক সময় সম্ভাবনা চলক বলা হয়।

৫। কোন রাস্তায় দুর্ঘটনার সংখ্যা একটি বিচ্ছিন্ন চলকের উদাহরণ নয়।

শুন্যস্থান পূরণ ঃ

৬। সম্ভাবনা নিবেশনের ক্ষেত্রে .... ও .... ব্যবহার করা যায়।

৭। দৈব চলক ---------- ও ------- হয়।

বাক্য মিলানো ঃ

৮। গণসংখ্যা নিবেশনকে	ক) বিচ্ছিন্ন চলকের উদাহরণ
৯। একটা অফিসে ফোন আসার সংখ্যা	খ) সারণী ও চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়

পাঠ ২.২ সম্ভাবনা অপেক্ষক, সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক, বিন্যাস অপেক্ষক
(Probability Function, Probability Density function, Distribution function)

ভূমিকা

এ পাঠে সম্ভাবনা অপেক্ষক, সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক বিন্যাস অপেক্ষক, সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সম্ভাবনা অপেক্ষক এর সংজ্ঞা বলতে পারবেন।
- সম্ভাবনা ঘণত্ব অপেক্ষক কি বলতে পারবেন।
- বিন্যাস অপেক্ষক সম্পর্কে ধারণা করতে পারবেন।

সম্ভাবনা অপেক্ষক (Probability function):

কোন বিচ্ছিন্ন চলক X এর যে কোন মান x ঘটার সম্ভাবনা যদি $f(x)$ হয় তহলে $f(x)$ কে X এর সাথে সংশ্লিষ্ট সম্ভাবনা অপেক্ষক বলে।

আবার $f(x)$ কে সম্ভাবনা অপেক্ষক বলা হবে যদি উহা নিম্নরূপ শর্ত মেনে চলে।

(i) সমস্ত ঘটনা X এর জন্য $f(x) \geq 0$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} f(xi)$ = ১

সম্ভাবনা অপেক্ষককে সম্ভাবনা ভর অপেক্ষক (Probabality mass function বা p.m.f) বলা হয় এবং x এর বিভিন্ন মানের ক্ষেত্রে সম্ভাবনার মান বের করতে $f(x)$ ব্যবহৃত হয়।

সম্ভাবনার ঘনত্ব অপেক্ষক (Probablity density function): অবিচ্ছিন্ন দৈব চলকের ক্ষেত্রে সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক হয়। মনে করি X একটি অবিচ্ছিন্ন দৈব চলক যার কোন নির্দিষ্ট মানের জন্য সম্ভাবনা পাওয়া যাবে না কিন্তু এর মান কোন নির্দিষ্ট পরিসীমা Aএবং B এর মধ্যে থাকার সম্ভাবনা পাওয়া যাবে এবং একে $f(x)$ d(x) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $f(x)$ d(x) কে সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক (Probability density function) বা P.d.f বলা হবে যদি

i) $f(x)dx \geq 0$

ii) $P[a \leq x \leq b] = \int_a^b f(x)dx$ = ১

যদি x এর সম্ভাব্য মানগুলির পরিসীমা (α,β) হয় তবে **Error!**

বিন্যাস অপেক্ষক (Distribution function): সম্ভাবনা অপেক্ষক থেকে বিন্যাস অপেক্ষক এর সংজ্ঞা পাওয়া যায়। এই অপেক্ষককে $F(x)$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। ধরা যাক X একটি বিচ্ছিন্ন অথবা অবিচ্ছিন্ন দৈব চলক এবং এর মান X এর ছোট অথবা সমান হওয়ার সম্ভাবনা $F(X) = P(X \leq x)$ অর্থাৎ যদি X বিচ্ছিন্ন চলক হয়, তখন

$$F(x) = \sum_{y=\infty}^{x} y = -\infty,\ldots,x$$

আবার যদি x অবিচ্ছিন্ন চলক হয় তখন

$$F(x) = \int_{-}^{x} f(y)dy$$

এখানে $f(y)$ হল সম্ভাবনা অপেক্ষক।

উদাহরণ-১ ঃ

ধরা যাক X একটি বিচ্ছিন্ন দৈব চলক এবং এর মান ০, ১, ২ এবং সম্ভাবনা যথাক্রমে ১/৪, ১/২ এবং ১/৪, $F(x)$ কেমন হবে?

$F(x) = \frac{1}{4}$ যদি $x =$ ০ হয়।

$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ যদি x= ০, ১ হয়।

$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) =$ ১ যদি = ০, ১, ২ হয়।

নিজে করুন: x একটি দৈব চলক এবং উহার মান ০, ১, ২ এবং সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ এবং $\frac{1}{6}$ হলে $F(x)$ কেমন হবে?

সারসংক্ষেপ ঃ

সম্ভাবনা অপেক্ষককে সম্ভাবনা ভর অপেক্ষক বলা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.২

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (√) দিন:

১। কোন শর্ত কে সম্ভাবনা অপেক্ষক বলা হয়?

ক) $f(x) \geq 0$ এবং $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = ১$

খ) $f(x) \leq 0$ এবং $\Sigma f(x_i) \neq ১$

গ) $f(x) \neq 0$ এবং $\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \leq ১$

ঘ) কোনটিই নয়।

২। নিবেশনের অপেক্ষক কি থেকে পাওয়া যায়?

ক) গাণিতিক অপেক্ষক খ) সম্ভাবনা অপেক্ষক

গ) জ্যামিতিক অপেক্ষক ঘ) কোনটিই নয়।

সত্য/মিথ্যা ঃ

৩। সমস্ত ঘটনা X এর জন্য $f(x) \geq ০$

৪। $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \neq ১$

শুন্যস্থান পূরণ ঃ

৫। $f(x)$ কে সম্ভাবনা .... বলা হয়

৬। x এর সম্ভাব্য মানগুলির পরিসীমা (α, β)হলে $\int_a^b f(x)dx$ = ...

বাক্য মিলানো ঃ

৭। যদি x অবিচ্ছিন্ন চলক হয় তখন F(x)= ৮। $f(x)dx$ কে সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক বলা হবে যদি	ক) i) $f(x)dx \geq ০$ ii) Prob $[a \leq x \leq b]$ = ১ হয়। খ) $\int_{-}^{x} f(y)dy$; এখানে $f(y)$ হল সম্ভাবনা অপেক্ষক।

পাঠ-২.৩ সম্ভাবনা অপেক্ষক সম্পর্কিত কতিপয় সমস্যা (Some Problems Related to Probability Function)

ভূমিকা:

এ পাঠে সম্ভাবনা অপেক্ষক সম্পর্কিত কতিপয় সমস্যা আলোচনা করা হয়েছে।

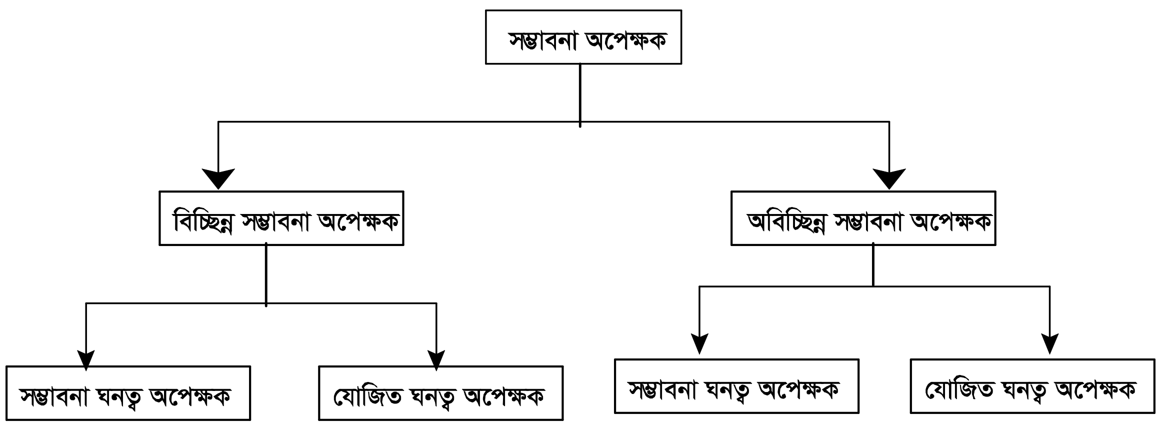
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি

- সম্ভাবনা অপেক্ষক সম্পর্কে আরও বেশী ধারণা করতে পারবেন।
- সম্ভাবনা অপেক্ষক এর সমস্যাসমূহ যাচাই করতে পারবেন।

বিষয়বস্তু

সম্ভাবনা অপেক্ষককে নিম্নোক্তভাবে শ্রেণীবদ্ধ করা যায়-



নিম্নে সম্ভাবনা অপেক্ষক সংক্রান্ত কিছু সমস্যা আলোচনা করা হল:

সমস্যা -১ ঃ

একটি দৈব চলক X এর সম্ভাবনা অপেক্ষক নিচে দেয়া হল ঃ

X	-৩	-১	১	২
$f(x)$	১/৫	৩/১০	২/৫	১/১০

i) এটা সত্যই একটি সম্ভাবনা অপেক্ষক কিনা যাচাই করুন

ii) $f(x) \leq$ ১ এর সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

i) এখানে $f(x) \geq$ ০

$\sum f(x) = \frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}=$ ১.০

অতএব, এটি একটি সম্ভাবনা অপেক্ষক

ii) $f(x) \leq$ ১ $= f(x =$ -৩$)+f(x =$ -১$)+f(x =$ ১$)$

$= \frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{2}{5}$

$= \frac{2+3+4}{10}$

$= \frac{9}{10}$

সমস্যা -২ ঃ

নিম্নে একটি বিচ্ছিন্ন দৈব চলক X এর সম্ভাবনা নিবেশন দেওয়া হলঃ

X	০	১	২	৩	৪
$f(x)$	১/৭	২/৭	১/৭	২/৭	১/৭

i) এটা একটি সম্ভাবনা অপেক্ষক কিনা যাচাই করুন।

ii) $f(x) \leq$ ৩ এর সম্ভাবনা কত?

সমাধান:

i) এখানে, $f(x) \geq 0$

$\sum f(x) = \frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{1}{7}$

$= \frac{1+2+1+2+1}{7}$

$=$ ১

অতএব এটি একটি সম্ভাবনা অপেক্ষক

ii) $f(x) \leq$ ৩ $= f(x =$ ০$)+f(x =$ ১$)+f(x =$ ২$)+f(x =$ ৩$)$

$= \frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{1}{7}+\frac{2}{7}$

$= \frac{1+2+1+2}{7}$

$$= \frac{6}{7}$$

সমস্যা-৩: X একটি অবিচ্ছিন্ন দৈব চলক যার সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক $f(x) = \frac{x2}{9}$; ০ $\leq x \leq$৩

i) দেখান যে, ইহা সত্যই সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক।

ii) এর মান ১/৩ এবং ১ এর মধ্যে থাকবে তার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ

i) এখানে ০ $\leq x \leq$৩, অতএব $\int_0^3 f(x)\, dx = \int_0^3 \frac{x2}{9} dx$

= **Error!**= ১

অতএব, এটি একটি সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক।

ii) X এর মান ১/৩ এবং ১ এর মধ্যে থাকবে

$\therefore \int_{1/3}^{1} f(x)\, dx$

= **Error!**

$$= \left[\frac{13 - \left(\frac{1}{3}\right)^3}{27}\right]$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{27}}{27}$$

$= \frac{26}{27} \times \frac{1}{27} = \frac{26}{729} =$ ০.০৩৬

সমস্যা-৪ ঃ একটি অবিচ্ছিন্ন দৈব চলকের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক নিম্নে দেয়া হলঃ

$f(x) = mx$, ০ $\leq x \leq$ ২

i) m -এর মান কত হলে $f(x)$ একটি সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক হবে।

ii) $x \leq \frac{1}{2}$হবে, তার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ

i) আমরা জানি, $\int_0^2 mx\, dx = ১$

বা, $m\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = ১$

বা, $m.\frac{2^2}{2} = ১$

বা, m.২ = ১

$\therefore m = \frac{1}{2}$

অতএব, m এর মান $\frac{1}{2}$ হলে $f(x)$ একটি সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক হবে এবং $f(x) = \frac{1}{2}x$, ০ ≤ x ≤ ২

ii) $f\left(x \le \frac{1}{2}\right)$ অর্থাৎ x এর মান ০ ও ১/২ এর মধ্যে থাকবে তার সম্ভাবনা

$\therefore \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{2}\, dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{4} \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0\right]$

$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

নিজে করুন: নিম্নে একটি বিচ্ছিন্ন দৈব চলক x এর সম্ভাবনা নিবেশন দেওয়া হল:

১। যাচাই করুন, সম্ভাবনা নিবেশনটি সম্ভাবনা অপেক্ষক কিনা?

২। $f(x) \le 2$ এর সম্ভাবনা কত?

x	০	১	২	৩
$f(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

সারসংক্ষেপ ঃ

সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক থেকে সম্ভাবনা পাওয়া যায়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.৩

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন:

১। সম্ভাবনা অপেক্ষক হওয়ার শর্ত হল

ক) $f(x) \ge ০$ এবং $\sum_{i=1}^{n} f(x) = ১$

খ) $f(x) \leq ০$ এবং $\sum_{i=1}^{n} f(x) \neq$ ১

গ) $f(x) \neq ০$ এবং $\sum_{i=1}^{n} f(x) \leq$ ১

ঘ) $f(x) \neq ০$ এবং $\sum_{i=1}^{n} f(x) \geq$ ১

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় ঃ

২। $f(x)\,dx$ কে সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক বলা হয়

শূণ্যস্থান পূরণ করুনঃ

৩। $\sum_{i=1}^{n} f(x) =$ ....

বাক্য মিলানো ঃ

৪। $f(y)$	ক) ১
৫। $\int_{a}^{b} f(x)dx =$	খ) সম্ভাবনা অপেক্ষক

পাঠ-২.৪ গাণিতিক প্রত্যাশা, গড় ও ভেদাংক নির্ণয় (Mathemetical Expectation, mean and variance)

ভূমিকা

এ পাঠে গাণিতিক প্রত্যাশা, গড় ও ভেদাংক সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি–

- গাণিতিক প্রত্যাশা সম্পর্কে বলতে পারবেন।
- বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন দৈব চলকের গাণিতিক প্রত্যাশা নির্ণয় করতে পারবেন।
- দৈব চলকের গড় নির্ণয় করতে পারবেন।
- দৈব চলকের ভেদাংক নির্ণয় করতে পারবেন।

গাণিতিক প্রত্যাশা (Mathematical Expectation) ঃ

গণসংখ্যা নিবেশন প্রকৃতি বর্ণনা করার জন্য যেমন কিছু পরিমাপ (গড়, মধ্যমা ইত্যাদি) ব্যবহৃত হয়ে থাকে তেমনি সম্ভাবনা নিবেশনের প্রকৃতি নির্ণয় করার জন্য ও কিছু পরিমাপ ব্যবহৃত হয়। সম্ভাবনা নিবেশনের ক্ষেত্রে প্রথম যে সহজ পরিমাপটির সাহায্য নেয়া হয় সেটা হল ঐ দৈব চলকের প্রত্যাশিত মান বা গাণিতিক প্রত্যাশা। এই মানটিকে কোন দৈব চলক X এর ক্ষেত্রে $E(x)$ বা μ_x প্রতীকের সাহায্যে চিহ্নিত করা হয়।

সংজ্ঞা ঃ ধরা যাক, X দৈব চলকের বিচ্ছিন্ন মান X_i এবং এদের সম্ভাবনা অপেক্ষক $f(x_i)$ এক্ষেত্রে, x এর গাণিতিক প্রত্যাশা হবে,

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, f(x_i), \quad i = ১, ২, ... n$$

অর্থাৎ X এর অবিচ্ছিন্ন মানগুলিকে তাদের সংশ্লিষ্ট সম্ভাবনার মান দিয়ে গুণ করে প্রাপ্ত গুণফলের সমষ্টিই হবে গাণিতিক প্রত্যাশা।

আবার X যদি অবিচ্ছিন্ন দৈব চলক হয় এবং এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক $f(x)$ হয় তাহলে X এর গাণিতিক প্রত্যাশা হবে-

$E(x)$ = **Error!**

এখানে α ও β হল দৈব চলকের সমস্ত মানের দুই প্রান্ত সীমা।

গাণিতিক প্রত্যাশার সাথে গাণিতিক গড়ের সম্পর্ক ঃ

গাণিতিক প্রত্যাশার সংজ্ঞা অনুসারে-

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, f(x_i)$$

$= x_১ f(x_১) + x_২ f(x_২) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x_n f(x_n)$

$= f(x_১).x_১ + f(x_২).x_২ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + f(x_n).x_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$

$= \frac{1}{n}X_১ + \frac{1}{n}X_২ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n} \times n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (**)$

সুতরাং সমীকরণ(*) এবং(**) থেকে দেখা যায় যে, গাণিতিক গড় এবং গাণিতিক প্রত্যাশার মধ্যে সম্পর্ক রয়েছে। দুটোই ভার আরোপিত গাণিতিক গড়। প্রথমটির ভার হল চলকের সংশ্লিষ্ট মানের সম্ভাবনা এবং দ্বিতীয়টির ভার একই $\frac{1}{n}$।

দৈব চলকের ভেদাংক নির্ণয় ঃ

গাণিতিক প্রত্যাশা এর মাধ্যমে দৈব চলক X এর প্রত্যাশিত মান বা গড়ের মান নির্ণয় ছাড়াও আমরা এর সাহায্যে দৈব চলকের ভেদাংক, সহভেদাংক তথা বিভিন্ন পরিমাপ নির্ণয় করতে পারি। দৈব চলক X এর r-তম মূল কেন্দ্রিক পরিঘাত হবে,

$\mu'_r = E(x^r) = \sum_{x=0}^{a} x^r f(x)$ যদি X বিচ্ছিন্ন চলক হয়।

= Error! যদি X অবিচ্ছিন্ন চলক হয়।

এবং r-তম গড় কেন্দ্রিক পরিঘাত হবে।

$\mu_r = E(x-\mu)^r = \sum_{x=0}^{a} (x-\mu)^r\ E(x-\mu)^r f(x)$ যদি X বিচ্ছিন্ন চলক হয়।

= Error! যদি X অবিবচ্ছিন্ন চলক হয়।

সুতরাং চলকের ভেদাংক বা $\mu_২$ হবে,

$V(x) = E(x-\mu)^২$

$= E(x^২ - ২x\mu + \mu^২)$

$= \sum x^২ f(x) - ২\mu \sum x f(x) + \mu^২ \sum f(x)$

$= E(x)^২ - ২E(x).E(x) + \{E(x)\}^২.১$

যেহেতু $\mu = E(x)$ এবং **Error!**

$\therefore V(x) = E(x^২) - \{E(x)\}^২$

দৈব চলক X যদি অবিচ্ছিন্ন হয় সেক্ষেত্রেও

$V(x) = E(x^২) - \{E(x)\}^২$

সারসংক্ষেপ ঃ

কোন দৈব চলকের অবিচ্ছিন্ন মানগুলোকে তাদের সংশ্লিষ্ট সম্ভাবনা মান দিয়ে গুন করে প্রাপ্ত গুনফলের সমষ্টিই হল গাণিতিক প্রত্যাশা।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.৪

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক(|) চিহ্ন দিন:

১। গাণিতিক প্রত্যাশা কি নির্ণয় করে।

ক) গণসংখ্যা নিবেশনের প্রকৃতি

খ) সম্ভাবনা নিবেশনের প্রকৃতি নির্ণয় করে।

গ) গড়ের প্রকৃতি

গ) ভেদাঙ্কের প্রকৃতি

২। গাণিতিক গড় ও গাণিতিক প্রত্যাশার মধ্যে পার্থক্য কি?

ক) দুটো একই

খ) দুটোই ভারযুক্ত গড়,

গ) প্রথমটির ভার সংশ্লিষ্ট সম্ভাবনা এবং দ্বিতীয়টির ভার $\frac{1}{n}$

ঘ) দুটো সম্পূর্ণ ভিন্ন

৩। দৈব চলকের ভেদাংকের সূত্র কোনটি?

ক) $E(x^২) + \{E(x)\}^২$

খ) $E(x^২) - \{E(x)\}^২$

গ) $E(x) - \{E(x)\}^২$

ঘ) কোনটিই নয়

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় ঃ

৪। E(x) চিহ্ন দ্বারা গাণিতিক প্রত্যাশা প্রকাশ করা হয়

৫। গাণিতিক প্রত্যাশার সাথে গাণিতিক গড়ের কোন সম্পর্ক নেই।

শুণ্যস্থান পূরণ ঃ

৬। গাণিতিক প্রত্যাশা , E(x) = ... ।

৭। গাণিতিক গড়ের সাথে -------------------- সম্পর্ক রয়েছে।

বাক্য মিলানো ঃ

৮। দৈব চলকের ভেদাঙ্ক, $V(x) =$	ক) $E(x)$
৯। দৈব চলকের গড়	খ) $E(x^2) - [E(x)]^2$

পাঠ-২.৫ গাণিতিক প্রত্যাশার কতিপয় উপপাদ্য ও তার প্রমাণ (Some Theorem and Proof of Mathematical Expectation)

ভূমিকা

গাণিতিক প্রত্যাশার কতিপয় উপপাদ্য ও তার প্রমাণ এ পাঠে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি -

- গাণিতিক প্রত্যাশার কতিপয় উপপাদ্য সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- উপপাদ্য সমূহের প্রমাণ করতে পারবেন।

বিষয়বস্তুঃ

উপপাদ্য-১

যদি $X = K$ (কোন ধ্রুবক) হয় তবে

$E(x) = K$ এবং $V(x) = ০$

উপপাদ্য -২

যদি $Y = mx$ হয় তবে

$E(x) = E(mx) = mE(x)$

এবং $V(y) = V(mx) = m^২v(x)$

উপপাদ্য-৩

$V(x+k) = V(x)$

এবং $V(x+k) = E[(x+k)-E(x+k)]^২$

$= E[x+k-E(x)-k]^২$

$= E[x-E(x)]^২$

$= E(x-\mu)^২$

$= V(x)$

প্রমাণিত

উপপাদ্য -৪ (যৌগিক সূত্র)

দুইটি দৈব চলকের সমষ্টি প্রত্যাশা হচ্ছে তাদের একক গাণিতিক প্রত্যাশার সমষ্টি। যদি দৈব চলক X এবং Y এর গাণিতিক প্রত্যাশা যথাক্রমে E(X) এবং E(Y) হয় তবে দৈব চলক (X+Y) এর গাণিতিক প্রত্যাশা E(X+Y) = E(X)+E(Y)

প্রমাণঃ ধরা যাক X চলকের বিচ্ছিন্ন মান x_i এবং এদের অপেক্ষমান, $f(x_i)$ এক্ষেত্রে - এর গাণিতিক প্রত্যাশা হবে,

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i), i = ১,২, ... n$$

এবং Yএর বিচ্ছিন্ন মান y_j এবং এদের সম্ভাবনা অপেক্ষক $f(y_j)$ এক্ষেত্রে Yএর গাণিতিক প্রত্যাশা হবে - E(y)

$$= \sum_{j=1}^{m} y_j f(y_j), j = ১,২, \ldots\ldots m$$

আবার (X+Y) চলকটি (X_i+Y_j) মান গ্রহণ করার ঘটনা $[X = X_i, Y = Y_j]$ ঘটনার সংগে অভিন্ন এবং এর সম্ভাবনা অপেক্ষক

$$f[x+y = x_i+y_j] = f[X = x_i, Y = y_j] = f(x_i y_j)$$

অতএব সংজ্ঞানুযায়ী,

$$E(X+Y) = \sum_i \sum_j (x_i+y_j) f(x_i y_j)$$

$$= \sum_i \sum_j x_i f(x_i y_j) + \sum_i \sum_j y_j f(x_i y_j)$$

$$= \sum_i x_i \sum_j f(x_i y_j) + \sum_i y_j \sum_j f(x_i y_j)$$

এখন $\sum_j f(x_i y_j) = f(X = x_i, Y = y_১) + f(X = x_i, \quad Y = y_২) + \ldots\ldots$

$$= f(X = X_i) = f(x_i)$$

সুতরাং $\sum_i f(x_i y_j) = f(X = x_১, Y = y_j) + f(X = x_২, Y = y_j) + \ldots\ldots$

$$= f(Y = y_j) = f(y_j)$$

সুতরাং $E(X+Y) = \sum_i x_i f(x_i) + \sum_j y_j f(y_j)$

$$= E(X)+E(Y)$$

এ সূত্রটি আরও সম্প্রসারিত করা যায় অর্থাৎ $X_১, X_২, \ldots\ldots Y_k$ যদি K সংখ্যক দৈব চলক হয় এবং এদের গাণিতিক প্রত্যাশা যথাক্রমে $E(X_১)E(X_২) \ldots\ldots E(X_k)$ হয় তবে-

$$E(X_১+X_২+ \ldots\ldots + X_k)$$

$$= E(X_১) + E(X_২) + \ldots\ldots + E(X_k)$$

উপপাদ্য-৫ ঃ

গাণিতিক প্রত্যাশার গুণন সূত্র

দুটি নিরপেক্ষ দৈব চলক X এবং Y এর গাণিতিক প্রত্যাশা যথাক্রমে E(X) এবং E(Y) হলে এদের গুণফল XY এর গাণিতিক প্রত্যাশা চলক দুটির গাণিতিক প্রত্যাশা গুণফলের সমান। অর্থাৎ $E(XY) = E(X).E(Y)$.

প্রমাণ ঃ

ধরা যাক X এবং Y দুটি অবিচ্ছিন্ন দৈব চলকের বিচ্ছিন্ন মান যথাক্রমে x_i এবং y_j। এদের সম্ভাবনা অপেক্ষক যথাক্রমে $f(x_i)$ এবং $f(y_j)$.যেহেতু চলক দুটি নিরপেক্ষ এদের যুক্ত সম্ভাবনা অপেক্ষক $f(x_i y_j) = f(x_i).f(y_j)$,

$i =$ ১,২ .... n

$j =$ ১,২, ... m

সংজ্ঞানুযায়ী

$E(X) = \sum_j x_i f(x_i)$

এবং $E(Y) = \sum_j y_j f(y_j)$

সুতরাং $E(XY) = \sum\sum x_i y_j f(x_i y_j)$

$= \sum_j \sum_j x_i y_j f(x_i) f(y_j)$

$= \sum_j x_i f(x_i). \sum_j y_j f(y_j)$

$= E(X).E(Y).$ প্রমাণিত

দুটির পরিবর্তে যে কোন k সংখ্যক দৈব চলক $X_১, X_২$ .... X_k যদি পরস্পর নিরপেক্ষ হয় এবং $E(X_১)$, $E(X_২)$ .... $E(X_k)$ যদি এদের গাণিতিক প্রত্যাশা হয় তাহলে- $E(X_১.X_২$ .... $X_k) = E(X_১).E(X_২)$ .... $X_k)$.

নিজে করুন: একটি নদীতে জেলের ১টি, ২টি, ৩টি, ৪টি মাছ ধরার সম্ভাবনা যথাক্রমে .০৫, .০৬, .০৭, ০৮। প্রত্যাশিত মাছের সংখ্যা নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ ঃ

গাণিতিক প্রত্যাশা, $E(X) = \mu$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.৫

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন:

১। $X = K$ হলে $E(X)$ কত?

ক) ০   খ) K

গ) $K^২$ ঘ) KX

২। $y = mx$ হলে $v(y)$ কত?

ক) mx খ) $m^{২} x$

গ) $m^{২}v(x)$ ঘ) $mx^{২}$

৩। $E(X+Y) =$ কত?

ক) $E(x)+E(y)$ খ) $E(x)-E(y)$

গ) $E(x)+E(y)+E(xy)$ ঘ) কোনটিই নয়।

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় ঃ

৪। দুইটি দৈব চলকের সমষ্টি প্রত্যাশা, তাদের একক গাণিতিক প্রত্যাশার সমষ্টি।

শুণ্যস্থান পূরণ ঃ

৫। দুইটি নিরপেক্ষ দৈব চলক x, y হলে প্রত্যাশার গুণন সুত্রানুযায়ী $E(xy) =$ .....

৬। দুইটি নিরপেক্ষ দৈব চলক x, y হলে $E(x + y) =$ ....

পাঠ -২.৬ গাণিতিক প্রত্যাশা সংক্রান্ত কতিপয় সমস্যা ও তাদের সমাধান।

(Some Problems and Solution Related to Mathematical Expectation)

ভূমিকা

এ পাঠে গাণিতিক প্রত্যাশার বিভিন্ন সমস্যার সমাধান সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি

- গাণিতিক প্রত্যাশার বিভিন্ন সমস্যা বুঝতে পারবেন।
- সমস্যাসমূহ সমাধান করতে পারবেন।

সমস্যা-১ ঃ

একটি নিঝুঁকি ছককাকে একবার উৎক্ষেপন করা হল এবং X দৈব চলক ছককাটির যে কোন পিঠ প্রদর্শন করে তাহলে X -এর গাণিতিক প্রত্যাশা ও ভেদাংক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

আমরা জানি যে কোন ছককার ৬টি পিঠ আছে। সুতরাং দৈব চলক X এর সম্ভাব্য মান ১,২,৩,৪,৫,৬ এবং এদের সম্ভাবনা অপেক্ষক

$$f(x=১) = f(x=২) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = f(x=৬) = \frac{1}{6}$$

অতএব, $E(x) = ১\times\frac{1}{6} + ২\times\frac{1}{6} + ৩\times\frac{1}{6} + ৪\times\frac{1}{6} + ৫\times\frac{1}{6} + ৬\times\frac{1}{6}$

$= $ **Error!**

$= \frac{21}{6}$

সুতরাং গাণিতিক প্রত্যাশা $=$ ৩.৫

আবার $E(x)^২ = \sum x^২ f(x)$

$$= ১\times\frac{1}{6} + ২২\times\frac{1}{6} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + ৬২\times\frac{1}{6}$$

$= \frac{91}{6}$

= ১৫.১৬৭

∴ ভেদাংক = $E(x)^{২}$ - $[E(x)^{২}$

= ১৫.১৬৭- (৩.৫)^{২}

= ২.৯১৭

সমস্যা -২ ঃ

একজন টেলিভিশন দোকানের মালিক তার অতীত অভিজ্ঞতা থেকে মনে করেন যে, প্রতিদিন তার দোকানে টেলিভিশন বিক্রয়ের সম্ভাবনা নিম্নরূপঃ

দৈনন্দিন টিভি বিক্রির সংখ্যা	০	১	২	৩	৪	৫	৬
সম্ভাবনা	০.৩	০.২০	০.২৩	০.২৫	০.১২	০.১০	০

দৈনিক টিভি বিক্রির গাণিতিক প্রত্যাশা অর্থাৎ প্রতিদিন গড়ে কতটি টিভি বিক্রি হতে পারে বের করুন।

সমাধান ঃ

$E(x)$ = গড় = ০∞.৩+১∞০.২০+২∞.২৩+৩.∞০.২৫+৪∞০.১২∞+৫∞০.১০+৬∞০

= ০+০.২০+০.৪৬+০.৭৫+০.৪৮+০.৫০+০

= ২.৩৯

সমস্যা -৩ ঃ

একটি অবিচ্ছিন্ন দৈব চলক এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক নিম্নরূপঃ

$f(x) = \frac{1}{50}x$;০∠x∠৫

x এর গাণিতিক প্রত্যাশা ও ভেদাংক নির্ণয় করুন

সমাধান

সংজ্ঞানুযায়ী গাণিতিক প্রত্যাশা $E(x) = \int_0^5 x\, f(x)dx$

$= \int_0^5 x \cdot \frac{1}{50} x dx = \frac{1}{50}\int_0^5 x^২ dx = \frac{1}{50}\left[\frac{x3}{3}\right]_0^5 = \frac{1}{150}\, [53 - 03]$

$= \frac{1}{150} \times$ ১২৫ $=$ ০.৮৩৩

$\therefore$ নির্ণেয় গাণিতিক প্রত্যাশা ঃ ০.৮৩৩

আবার $E(x^২) = \int_0^5 x^২ f(x)dx$

$= \int_0^5 x^২ \frac{1}{50} x dx = \frac{1}{50}\int_0^5 x^৩ dx$

$= \frac{1}{50} \times \frac{x4}{4} = \frac{1}{200}\quad [54 - 0]$

$= \frac{1}{200} \times$ ৬২৫ $=$ ৩.১২৫

$\therefore$ ভেদাংক $=$ $E(x^২) - [E(x)]^২$

$=$ ৩.১২৫-(০.৮৩৩)^২

$=$ ২.৪৩১

সমস্যা ৪ ঃ একটি পুকুরে একজন লোকের ১টি, ২টি, ৩টি, ৪টি মাছ ধরার সম্ভাবনা যথাক্রমে ০.৪, ০.৩, ০.২, ০.১, । প্রত্যাশিত মাছের সংখ্যা কত নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রত্যাশিত মাছের সংখ্যা

$E(x)$ = ১×০.৪+২×০.৩+৩×০.২+৪×০.১

=০.৪+০.৬+০.৬+০.৪

=২ (উত্তর)

সমস্যা-৫

x একটি অবিচ্ছিন্ন দৈব চলক যার সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক

$f\,(x) = \frac{x2}{9}$ ০$\angle x \angle$৩

x এর গাণিতিক প্রত্যাশা ও ভেদাংক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

সংগানুযায়ী, $E(x) = \int_0^3 x f\,(x)dx$

$= \int_0^3 x.\frac{x2}{9}dx \quad = \int_0^3 x.\frac{x3}{9}dx$

$= \left[\frac{x4}{36}\right]_0^3$

$= \frac{1}{36}[34 - 0]$

$= \frac{1}{36}\times$৮১ = ২.২২৫ (উঃ)

আবার, $E(x^{২}) = \int_0^3 x^{২} f\,(x)dx$

$= \int_0^3 x^{২}.\frac{x2}{9}dx \qquad = \int_0^3 \frac{x4}{9}dx$

$= \left[\frac{x5}{85}\right]_0^3 \qquad = \frac{1}{45}[35 - 0]$

$= \frac{1}{45}\times$ ২৪৩ $\qquad$ = ৫.৪

$\therefore$ ভেদাংক = $E(x^{২})-[E(x)]^{২}$

=৫.৪- (২.২৫)^{২}

= ০.৩৩৭৫

নিজে করুন: একটি নদীতে একজন জেলের ১টি, ২টি, ৩টি, ৪টি মাছ ধরার সম্ভাবনা যথাক্রমে .০৫, .০৬, .০৭, .০৮। প্রত্যাশিত মাছের সংখ্যা নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ ঃ

গাণিতিক প্রত্যাশার বিভিন্ন সমস্যার সম্পর্কে আলোচনা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.৬

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পার্শ্বে টিক (√) চিহ্ন দিন:

১। দৈব চলক x ও y স্বাধীন হলে গাণিতিক প্রত্যাশার যোগফল

ক) $E(x)$ খ) $E(y)$

গ) $E(x + y) = E(xy)$ ঘ) $E(x + y) = E(x) + E(y)$

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় ঃ

২। ভেদাংক, $V(x) = [\, E(x^2) - \{E(x)\}^2]$

শুণ্যস্থান পূরণ ঃ

৩। $E(xy) =$ ....

চূড়ান্ত মূল্যায়ন-২

সংক্ষিপ্ত ও রচনামুলক প্রশ্নাবলী

১। দৈব চলক বলতে কি বুঝেন? বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন দৈব চলকের মধ্যে পার্থক্য নির্দেশ করুন।

২। উদাহরণসহ বিভিন্ন প্রকার দৈব চলক বর্ণনা করুন।

৩। সম্ভাবনা নিবেশন বলতে কি বুঝেন?

৪। সম্ভাবনা অপেক্ষক, সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক ও বিন্যাস অপেক্ষক বলতে কি বুঝেন?

৫। একটি দৈব চলক X নিম্নলিখিত সম্ভাবনা অপেক্ষক অনুসরণ করে।

X এর মান x	০	১	২	৩	৪	৫	৬
সম্ভাবনা $f(x)$	০	k	২k	৩k	৩k	k২	৩k২

i) k এর মান বের করুন

ii) $f(x) \le 3$ এর সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

৬। একটি অবিচ্ছিন্ন দৈব চলক যার সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক

$f(x) = \frac{x3}{3}$; ০ ≤ x ≤ ৫

i) এটা সত্যই একটি সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক কিনা প্রমাণ করুন।

ii) X এর মান ১/৩ এবং ১ এর মধ্যে থাকবে তার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

৭। দৈব চলকের গাণিতিক প্রত্যাশা বলতে কি বুঝেন? গাণিতিক গড় এবং গাণিতিক প্রত্যাশার মধ্যে সম্পর্ক কি?

৮। দৈব চলকের ভেদাংক কিভাবে নির্ণয় করবেন?

৯। একটি নিরপেক্ষ মুদ্রাকে একবার উৎক্ষেপন করা হল এবং X এর দৈব চলক মুদ্রাটির হেড (H) এর পিঠ প্রদর্শন করে। X এর গাণিতিক প্রত্যাশা এবং ভেদাংক নির্ণয় করুন।

১০। প্রমাণ করুন যে ২টি দৈব চলকের গাণিতিক প্রত্যাশা হচ্ছে তাদের একক গাণিতিক প্রত্যাশার সমষ্টি।

১১। গাণিতিক প্রত্যাশার গুণন সূত্রটি উল্লেখ করুন এবং প্রমাণ করুন?

উত্তরমালা

২.১: ১। খ) ২। ক) ৩। ক) ৪। সত্য ৫। মিথ্যা ৬। সারণী ও চিত্র ৭। বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন ৮। খ) ৯। ক)

২.২: ১। ক) ২। খ) ৩। সত্য ৪। মিথ্যা ৫। সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক ৬। ১ ৭। খ) ৮। ক)

২.৩: ১। ক) ২। সত্য ৩। ১ ৪। খ) ৫। ক

২.৪: ১। খ ২। গ ৩। খ ৪। সত্য ৫। মিথ্যা ৬। $\sum x f(x)$ ৭। গাণিতিক প্রত্যাশায় ৮। খ ৯। ক

২.৫: ১। খ ২। গ ৩। ক ৪। সত্য ৫। $E(x)\,E(y)$ ৬। $E(x) + E(y)$

২.৬: ১। ঘ ২। সত্য ৩। $E(x)\,E(y)$