ইউনিট ৩

দ্বিপদী বিন্যাস
(Binomial Distribution)

ভূমিকাঃ

জ্যাকব বার্ণোলী নামক একজন সুইডিশ গণিতবিদ ১৭০০ সালে দ্বিপদী বিন্যাস আবিস্কার করেন। তার নাম অনুসারে এ বিন্যাসকে বার্ণোলী বিন্যাসও বলা হয়। দ্বিপদী বিন্যাস একটি সম্ভাবনা বিন্যাস। কোন একটা ঘটনার সফলতা বা বিফলতার সম্ভাবনার উপর ভিত্তি করে এ বিন্যাসের উৎপত্তি হয়। এ ইউনিট বার্ণোলী প্রচেষ্টা, দ্বিপদী চলক, দ্বিপদী বিন্যাসের সম্ভাবনা অপেক্ষক উদ্ভাবক, দ্বিপদী বিন্যাসের ব্যবহার ও ধর্ম ইত্যাদি সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্যঃ

এ ইউনিট শেষে আপনি বলতে পারবেন-

- বার্ণোলী প্রচেষ্টা, দ্বিপদী চলক ও দ্বিপদী বিন্যাস
- দ্বিপদী বিন্যাসের সম্ভাবনা অপেক্ষক উদ্ভাবন
- দ্বিপদী বিন্যাসের গড় ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় ও এদের তুলনা
- দ্বিপদী বিন্যাসের ব্যবহার ও কার্যাবলী
- দ্বিপদী বিন্যাসের বিভিন্ন সমস্যাবলী

পাঠ-৩.১ বার্ণোলী প্রচেষ্টা, দ্বিপদী চলক ও দ্বিপদী বিন্যাস
Burnouli trial, Binomial variable and Binomial Distribution

ভূমিকা:

কোন একটি ঘটনার সফলতা ও বিফলতার উপর ভিত্তি করে দ্বিপদী বিন্যাসের উৎপত্তি হয়। এ পাঠে দ্বিপদী বিন্যাস সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

উদ্দেশ্য:

এ পাঠ শেষে আপনি-

- বার্ণোলী প্রচেষ্টা কি বলতে পারবেন।
- দ্বিপদী চলক সম্পর্কে বলতে পারবেন।
- দ্বিপদী পরীক্ষা সম্পর্কে ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- দ্বিপদী বিন্যাস কি বলতে পারবেন।

বার্ণোলী প্রচেষ্টা (Burnoullian trials):

বার্ণোলী প্রচেষ্টা কতগুলি অনুমান বা স্বত:সিদ্ধ এর উপর ভিত্তি করে সংঘঠিত হয়। অনুমান সমূহ নিম্নরূপ ঃ

ক) একটি সম্ভাবনা সাপেক্ষ পরীক্ষা অভিন্ন পরিস্থিতিতে নিরপেক্ষভাবে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যক বার (n সংখ্যক) অনুষ্ঠিত হবে।

খ) প্রতিটি প্রচেষ্টার একটি পরীক্ষণের মাত্র দুটি ঘটনা বিদ্যমান থাকবে। ফলাফল একটি ঘটনার স্বপক্ষে থাকলে তাকে সফলতা (Success) এবং বিপক্ষে থাকলে তাকে বিফলতা (Failure) বলা হবে।

গ) সফলতার সম্ভাবনা হল p এবং বিফলতার সম্ভাবনা হল q অর্থাৎ $p+q =$ ১ সুতরাং $q =$ ১-p.

ঘ) প্রচেষ্টাসমূহ পরিসংখ্যানিকভাবে নিরপেক্ষ হবে।

সুতরাং একটি বার্ণোলী প্রচেষ্টা হল এমন একটি প্রচেষ্টা যেখানে একটি পরীক্ষণ বারবার অনুষ্ঠিত হতে থাকবে এবং প্রতিটি প্রচেষ্টায় পরীক্ষণে মাত্র দুটি ঘটনা (সফলতা ও বিফলতা) বিদ্যমান থাকবে। অর্থাৎ বারবার প্রচেষ্টাসমূহকে বার্ণোলী প্রচেষ্টা বলে। যেমন, একটি ছককা যদি বারবার নিক্ষেপ করা হয় এবং তাতে যে কোন সময় ১ সূচক চিহ্ন যুক্ত প্রান্ত উপরে থাকলে সাফল্য ও অপর প্রান্ত উপরে না থাকাকে যদি বিফলতা ধরা হয় তাহলে একটি বর্ণোলী প্রকৃতির বারবার প্রচেষ্টার সারি গঠিত হল বলা যায়।

দ্বিপদী চলক (Binomial variable) :

বার্ণোলী প্রচেষ্টায় কোন ঘটনার সফলতা এবং বিফলতার সংখ্যা দৈব চলকএবং ইহার সম্ভাব্য মান একটি পরীক্ষণে ০ অথবা ১। সফলতা সম্ভাবনা হচ্ছে p এবং বিফলতা সম্ভাবনা হচ্ছে q। যদি একটি পরীক্ষা সম্পূর্ণ নিরপেক্ষভাবে n সংখ্যকবার পরিচালনা করা হয় এবং p ও q এর মান এক পরীক্ষা থেকে অন্য পরীক্ষায় একই বা অভিন্ন থাকে তাহলে সফলতার সম্ভাব্য সংখ্যা হবে ০, ১, ২, ... n । এই সংখ্যাগুলিকে দ্বিপদী চলক (Binomial variable) বলা হয়। এদেরকে x দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং এখানে x একটি চলক।

উদাহরণ, একটি নিরপেক্ষ ছককাকে বারবার উৎক্ষেপন করা হলে একটি বিশেষ দিক উপরে আসলে তাকে সফলতা (S) বলা হবে এবং অন্য কোন দিক আসলে বিফলতা (F) বলা হবে।'S' আসা কিংবা না আসা দৈবের উপর নির্ভর করে। সুতরাং S এর সংঘঠন সংখ্যা একটি দৈব চলক। একটি উৎক্ষেপনে 'S' পাবার সম্ভাবনা $p = \frac{1}{6}$। ছককাটি n বার উৎক্ষেপন করা হলে 'S' এর সংখ্যা হতে পারে ০, ১, ২ .... n এবং এদেরকে দ্বিপদী চলক X দ্বারা অভিহিত করা হয়। এখন Xএর বিভিন্ন মানের সম্ভাবনা যদি বের করা হয়, তাহলে X-এর সম্ভাবনা বিন্যাস পাওয়া যায়।

সারসংক্ষেপ ঃ

একটি বার্ণোলী প্রচেষ্টা হলো এমন একটি প্রচেষ্টা যেখানে একটি পরীক্ষন বারবার অনুষ্ঠিত হতে থাকবে এবং প্রতিটি প্রচেষ্টায় মাত্র দুটি ঘটনা (সফলতা ও বিফলতা) বিদ্যমান থাকবে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.১ঃ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (|) দিন:

১। বার্ণোলী প্রচেষ্টায় একটি পরীক্ষণে কয়টি ঘটনা বিদ্যমান থাকে?

ক) ২টি　　খ) ৩টি

গ) ৪টি　　গ) ১টি

২। কোন ঘটনার সফলতা ও বিফলতার সম্ভাবনার পরিমাণ কোনটি ঠিক?

ক) p+q> ১　　খ) p+q<1

গ) p+q = ১　　ঘ) কোনটিই নয়

৩। বার্ণোলী প্রচেষ্টা কেমন হবে?

ক) নিরপেক্ষ　　খ) পরস্পর নির্ভরশীল

গ) এলোমেলো　　ঘ) কোনটিই নয়

সত্য/মিথ্যা নির্ণয়ঃ

৪। বার্ণোলী প্রচেষ্টা সমূহ পরিসংখ্যানিক ভাবে নিরপেক্ষ হবে

৫। প্রচেষ্টার সফলতার সম্ভাবনা P এবং বিফলতার সম্ভাবনা হল q অর্থাৎ p + q = ১

শুণ্যস্থান পূরণ ঃ

৬। প্রচেষ্টার সফলতা ও বিফলতার সম্ভাবনার যোগফল p + q = ...

৭। বার্ণোলী পদ্ধতিতে নিরপেক্ষ ভাবে একটি পরীক্ষণ ------- বার অনুষ্ঠিত হবে।

বাক্য মিলানো ঃ

৮। প্রচেষ্টার ফলাফল একটি ঘটনার সাপক্ষে থাকলে তাকে	ক) বলা হয় বিফলতা
৯। প্রচেষ্টার ফলাফল একটি ঘটনার বিপক্ষে থাকলে তাকে	খ) সফলতা বলা হয়।

পাঠ-৩.২ দ্বিপদী বিন্যাসের সম্ভাবনা অপেক্ষক উদ্ভাবন।

ভূমিকাঃ

বার্ণোলী প্রচেষ্টাকে ব্যবহার করে দ্বিপদী বিন্যাসের সম্ভাবনা অপেক্ষক তৈরি করা হয়। এ পাঠে দ্বিপদী বিন্যাসের বিস্তারিত আলোচনা করা হল।

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দ্বিপদী বিন্যাসের সম্ভাবনা অপেক্ষক সম্পর্কে ধারণা করতে পারবেন।
- দ্বিপদী বিন্যাসের সম্ভাবনা অপেক্ষক উদ্ভাবন করতে পারবেন।

দ্বিপদী বিন্যাসের সম্ভাবনা অপেক্ষক (Probability function of a binomial distribution) : ধরা যাক, n সংখ্যক বার্ণোলী প্রচেষ্টার প্রতিটিকে সফলতাএবং বিফলতা লাভের সম্ভাবনা যথাক্রমে p এবং $q = (১-p)$ এরকম প্রচেষ্টায় মোট.X সংখ্যক সফলতা (X = ০, ১, ২, ...n) লাভের সম্ভাবনা নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি n সংখ্যক বার্ণোলী প্রচেষ্টার x সংখ্যক ক্ষেত্রে 'সফলতা' এবং $(n-x)$ সংখ্যক ক্ষেত্রে 'বিফলতা' ফল লাভ হল। প্রত্যেক ক্ষেত্রে সফলতা এবং বিফলতার ঘটনাকে যথাক্রমে S এবং F দ্বারা সূচিত করা হল। প্রত্যেক প্রচেষ্টায় সফলতা S সংঘঠনের সম্ভাবনা P এবং বিফলতা F সংঘটনের সম্ভাবনা q। S এবং F প্রত্যেকেই নিরপেক্ষ ঘটনা। x সফলতা ${}^nc_x$ সংখ্যক বার সফল হওয়ার সম্ভাবনা $n_{cx}P^x q^{n-x}$। আমরা জানি, মোট প্রচেষ্টার সংখ্যা n সূতরাং n সংখ্যক প্রচেষ্টার মধ্যে x সংখ্যক সফলতার সম্ভাবনা ${}^nc_x\, p^x q^{n-x}$

এই সফলতার প্রাপ্ত সংখ্যক বিন্যাসকে দ্বিপদী বিন্যাস বলে। দ্বিপদী চলককে x দ্বারা চিহ্নিত করলে দ্বিপদী বিন্যাসের সম্ভাবনা অপেক্ষক হচ্ছে-

$$f(x) = f(x = x) = {}^nc_x\, p^x q^{n-x};$$

$0 \angle p \angle ১$, X = ০,১,২,........n. স্বভাবতই $f(x) > 0$

এবং $$\sum_{x=0}^{n} f(x) = \sum_{x=0}^{n} {}^nc_x\, p^x q^{n-x}$$

$$= {}^nc_০\, p^০ q^{n-০} + {}^nc_১\, p^১ q^{n-১} + {}^nc_২ p^২ q^{n-২} + \dots\dots + {}^nc_n\, p^n q^০$$

$$= q^n + {}^nc_১\, pq^{n-১} + {}^nc_২\, p^২ q^{n-২} + \dots\dots + p^n$$

$= (p+q)^n = ১^n = ১$

সংজ্ঞা ঃ যদি বিচ্ছিন্ন চলক x-এর সম্ভাবনা অপেক্ষক

$f(x) = {}^nc_x\, p^x q^{n-x}, X = ০,১,......., n$

হয়, যখন p সফল হওয়ার ঘটনার সম্ভাবনা, q বিফল হওয়ার ঘটনার সম্ভাবনা এবং nনিরপেক্ষ বার্ণোলী প্রচেষ্টার সংখ্যা, তাহলে x এর বিন্যাসকে দ্বিপদী বিন্যাস বলে। n এবং p কে দ্বিপদী বিন্যাসের পরামান বলে।

উদাহরণ:

যদি x~B (৫, ০.৭) হয় তাহলে নির্ণয় করুন:

a) $p(x \geq ৩)$

সমাধান: দেওয়া আছে-

n = ৫ এবং p = ০.৭

$\therefore$ a) Prob[x≥৩| p=০.৭]

$= {}^৫c_৩\,(০.৭)^৩\,(০.৩)^২ + {}^৫c_৪\,(০.৭)^৪(০.৩)^১ + {}^৫c_৫\,(০.৭)^৫(০.৩)^০$

= ০.৮৩৬৯

নিজে করুন: যদি x~B (৭, ০.৭৫) হয় তবে নির্ণয় করুন, P [x ≤ ৪]

সারসংক্ষেপ ঃ

দ্বিপদী বিন্যাসের সম্ভাবনা অপেক্ষক $f(x) = {}^nc_x\, p^x q^{n-x}, X = ০,১,......., n$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৩.২

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) দিন:

১। n সংখ্যক বার প্রচেষ্টার মধ্যে x সংখ্যক সফলতা কতবার হতে পারে?

ক) ${}^nc_x$ খ) ${}^{n-১}c_x$

গ) ${}^nc_{x-১}$ ঘ) কোনটিই নয়

২। x সংখ্যক সফল হওয়ার সম্ভাবনা কত?

ক) $p^{n-x}\, q^x \infty {}^nc_x$ খ) $p^x\, q^n c_x{}^{-x}$

গ) $p^n q^{n-x} .\, {}^nc_x$ ঘ) ${}^nc_x p^x q^{n-x}$

৩। দ্বিপদী বিন্যাসের সম্ভাবনা অপেক্ষক কোনটি?

ক) ${}^{n}c_{x}$ খ) ${}^{n}c_{x}\, p^{x}q^{n-x}$

গ) $p^{n}q^{n-x}$ ঘ) কোনটিই নয়

৪। দ্বিপদী বিন্যাসের পরামান কি কি?

ক) q ও p খ) $n-x$

গ) p ঘ) n ও P

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় ঃ

৫। n সংখ্যক বার প্রচেষ্টার মধ্যে x সংখ্যক সফলতা ${}^{n}c_{x}$ বার হতে পারে।

শুণ্যস্থান পূরণঃ

৬। n এবং p কে দ্বিপদী বিন্যাসের ------------ বলে।

বাক্য মিলানো ঃ

৭। প্রত্যেক প্রচেষ্টায় S সংঘঠনের	ক) সম্ভাবনা q
৮। প্রত্যেক প্রচেষ্টায় F সংঘঠনের	খ) সম্ভাবনা p

পাঠ-৩.৩ দ্বিপদী বিন্যাসের গড় ও ভেদাংক নির্ণয় ও এদের তুলনা

ভূমিকাঃ

দ্বিপদী বিন্যাসের পরামানের বৈশিষ্ট্য বের করতে গড় ও ভেদাঙ্ক জানা প্রয়োজন। এ পাঠে দ্বিপদী বিন্যাসের গড় ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- দ্বিপদী বিন্যাসের গড় নির্ণয় করতে পারবেন।
- দ্বিপদী বিন্যাসের ভেদাংক নির্ণয় করতে পারবেন।
- দ্বিপদী বিন্যাসের গড় ও ভেদাংকের তুলনা করতে পারবেন।

দ্বিপদী বিন্যাসের গড় (Mean of the Binomial Distribution)

আমরা জানি, দ্বিপদী বিন্যাসের সম্ভাবনা অপেক্ষক

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x},\ X = \text{০,১,.২}, ...n$$

সংগানুসারে, $\mu_1' = \sum_{x=0}^{n} x^r f(x)$

$$\therefore\ \mu_1' = E(x) = \sum_{x=0}^{n} x f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} n_x p^x q^{n-x}$$

$$\mu = \sum_{x=0}^{n} x .\textbf{Error!} p^x q^{n-x}$$

$$= np\ \textbf{Error!} p^{x-\text{১}} q^{n-x}$$

$$= np\ \textbf{Error!} p^{x-\text{১}} q^{(n-\text{১})-(x-\text{১})}$$

$$= np \sum_{x-1=0}^{n-1} \binom{n-1}{x-1} p^{x-\text{১}} q^{(n-\text{১})-(x-\text{১})}$$

$= np(q+p)^{n-১}$

$= np$, [p+q=১]

দ্বিপদী বিন্যাসের ভেদাংক (Variance of the Binomial Distribution) :

আমরা জানি, যে কোন বিন্যাসের ভেদাংক সূত্র

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

$$\therefore \mu_2' = E(x^২) = \sum_{x=0}^{n} x^২ f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x^২ \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} [x(x-১)+x] \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-১) \binom{n}{x} p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} x.\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-১)\textbf{Error!} p^x q^{n-x} + np$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-১)\ \textbf{Error!} p^২\ p^{x-২}\ q^{(n-২)-(x-২)} + np$$

$$= n(n-১)p^২ \Sigma\ \textbf{Error!} p^{x-২}\ q^{(n-২)-(x-২)} + np$$

$$= n(n-১)p^২ \sum_{x-2=0}^{n-2} \binom{n-2}{x-2} p^{x-২}\ q^{(n-২)-(x-২)} + np$$

$$= n(n-১)p^২\ (q+p)^{n-২} + np \qquad [q+p=১]$$

$$\therefore \mu_2' = np[(n-১)p+১]$$

সুতরাং ভেদাংক $\mu_২ = \mu_2' - \mu_1'^2$

$= np[(n-১)p+১]-(np)^২$

= np[(np -p+১)-np

= np(np - np +১-p)

= np(১-p)=npq

দ্বিপদী বিন্যাসের গড় ও ভেদাংকের তুলনা:-

দ্বিপদী বিন্যাসের গড় ও ভেদাংক যথাক্রমে np এবং npq যেহেতু q = ১-p অর্থাৎ q, ১ এর চেয়ে ছোট সুতরাং দ্বিপদী বিন্যাসের গড় ভেদাংকের চেয়ে সব সময়ই বড় অর্থাৎ দ্বিপদী বিন্যাসের ভেদাংক গড়ের চেয়ে ছোট।

সারসংক্ষেপ ঃ

দ্বিপদী বিন্যাসের গড় ও ভেদাংক যথাক্রমে np, npq

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ঃ ৩.৩

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন:

১। দ্বিপদী বিন্যাসের গড় কোনটি?

ক) npq খ) np

গ) n ঘ) p

২। দ্বিপদী বিন্যাসের ভেদাংক কোনটি?

ক) np খ) n

গ) npq ঘ) p

৩। দ্বিপদী বিন্যাসের গড় ভেদাংকের চেয়ে কেমন?

ক) ছোট খ) বড়

গ) উভয়ই ঘ) কোনটিই নয়

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় ঃ

৪। দ্বিপদী বিন্যাসের গড়, E(x) = npq

৫। দ্বিপদী বিন্যাসের ভেদাংক V(x) = npq

শুণ্যস্থান পূরণ ঃ

৬। দ্বিপদী বিন্যাসের গড় ভেদাংকের চেয়ে .... ।

পাঠ-৩.৪ দ্বিপদী বিন্যাসের ব্যবহার ও ধর্মাবলী

ভূমিকা:

এ পাঠে দ্বিপদী বিন্যাসের ব্যবহার ও ধর্মাবলী সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হল।

এই পাঠ শেষে আপনি

- দ্বিপদী বিন্যাসের ব্যবহার সম্পর্কে ধারণা করতে পারবেন।
- দ্বিপদী বিন্যাসের বিভিন্ন ধর্ম সম্পর্কে বলতে পারবেন।

দ্বিপদী বিন্যাসের ব্যবহার (Uses of Binomial Distribution)

সামাজিক, অর্থনৈতিক এবং অন্যান্য অনেক ক্ষেত্রে দ্বিপদী বিন্যাসের প্রয়োগ হয়ে থাকে। উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক, ১০% ত্রুটিপূর্ণ আছে এমন সংখ্যক বৈদ্যুতিক বাল্ব থেকে দৈবাকারে ২৫ টি বাল্ব নিয়ে কোন গুণ নিয়ন্ত্রণকারী যদি জানতে চান ত্রুটিপূর্ণ বাল্ব আসার সম্ভাবনা কত? সেক্ষেত্রে তাকে দ্বিপদী সম্ভাবনা বিন্যাসের ছকের মাধ্যমে উত্তর পেতে হবে। পরের পাঠে দ্বিপদী বিন্যাসের ব্যবহার সম্বলিত কতিপয় সমস্যার সমাধান আলোচিত হবে।

দ্বিপদী বিন্যাসের ধর্ম (Properties of the Binomial Distribution)

দ্বিপদী বিন্যাস নিম্নলিখিত ধর্মাবলী অনুসরণ করে।

১। দ্বিপদী বিন্যাসের গড় np এবং ভেদাংক npq,

২। দ্বিপদী বিন্যাসের ভেদাংক এর গড়ের চেয়ে ছোট, যেমন $n = ১০$, $P = ০.৫$ হলে গড় $=$ ৫ এবং ভেদাংক $=$ ২.৫।

৩। দ্বিপদী বিন্যাসের পরামান হচ্ছে n এবং p। কোন নির্দিষ্ট n এর জন্য p পরিবর্তন হলে দ্বিপদী বিন্যাসের আকার এবং অবস্থানও পরিবর্তন হয়।

৪। কোন নির্দিষ্ট n এর জন্য P বাড়লে দ্বিপদী বিন্যাসের গড় ও প্রচুরকও বাড়বে। যেমন $n = ১০$ হলে এবং P যদি ০.৩ থেকে বেড়ে ০.৫ হয় সেক্ষেত্রে গড় ৩ থেকে বেড়ে ৫ হয়।

৫। কোন নির্দিষ্ট P এর ক্ষেত্রে n বাড়লে দ্বিপদী বিন্যাসের গড় ও প্রচুরকও বাড়বে। যেমন $p = ০.৫$ হলে n যদি ১০ থেকে বেড়ে ১৫ হয় সেক্ষেত্রে গড় ৫ থেকে বেড়ে ৭.৫ হয়।

৬। কোন দ্বিপদী পরীক্ষণে n বেশী সংখ্যক হলে এর জন্য সম্ভাব্য ঘটনা বেশী হবে এবং এক্ষেত্রে কোন নির্দিষ্ট ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা কম হবে।

৭। যদি n খুব বড় হয় ও p এবং q এর যে কোন একটি খুব ছোট অর্থাৎ ০ এর কাছাকাছি হয় সেক্ষেত্রে দ্বিপদী বিন্যাস পরিমিত বিন্যাসের দিকে ঝুঁকে পড়ে।

৮। যদি $n_১$ ও p পরামান বিশিষ্ট $x_১$ একটি দ্বিপদী বিন্যাস হয় এবং $n_২$ ও p পরামান বিশিষ্ট $x_২$ অন্য একটি দ্বিপদী বিন্যাস হয় তবে $x_১+x_২$ এর বিন্যাস হবে $n_১+n_২$ এবং p পরামান বিশিষ্ট দ্বিপদী বিন্যাস।

৯। যদি $n_১$ ও $p_১$ পরামান বিশিষ্ট $x_১$ একটি দ্বিপদী বিন্যাস হয় এবং $n_২$ ও $p_২$ পরমান বিশিষ্ট $x_২$ একটি দ্বিপদী বিন্যাস হয় তবে $x_১ + x_২$ এর বিন্যাস দ্বিপদী বিন্যাস হবে না।

সারসংক্ষেপ ঃ

সামজিক, অর্থনৈতিক এবং অন্যান্য ক্ষেত্রে দ্বিপদী বিন্যাসের প্রয়োগ রয়েছে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৪

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নঃ

সঠিক উত্তরের জন্য টিক (√) চিহ্ন দিনঃ

১। দ্বিপদী বিন্যাসের প্রয়োগ রয়েছে

ক) সামাজিক, অর্থনৈতিক   খ) টেলিফোন কলে

গ) রাস্তায় দুর্ঘটনায়   ঘ) কুয়াশাচ্ছন্ন এলাকায়

২। দ্বিপদী বিন্যাসের গড়

ক) np   খ) npq

গ) ১   ঘ) ০

৩। দ্বিপদী বিন্যাসের ভেদাংক কোনটি?

ক) np^2 খ) npq

গ) q   ঘ) ০

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় ঃ

৪। দ্বিপদী বিন্যাসের p এবং q দুইটি পরামান।

৫। কোন নির্দিষ্ট n এর জন্য p বাড়লে দ্বিপদী বিন্যাসের গড় ও প্রচুরক বাড়বে।

শুন্যস্থান পূরন ঃ

৬। দ্বিপদী পরীক্ষণে n বেশী সংখ্যক হলে এর জন্য .... বেশী হবে।

৭। $n \rightarrow \alpha$ এবং p খুব ছোট হলে দ্বিপদী বিন্যাস, ... দিকে ঝুকে।

বাক্য মিলানো ঃ

৮। $n_১$, $p_১$ ও $n_২$, $p_২$ দুইটি দ্বিপদী বিন্যাসের পরামান হলে	ক) এবং ভেদাংক = npq
৯। দ্বিপদী বিন্যাসের গড় = np	খ) উহাদের যোগফল দ্বিপদী বিন্যাস হবে।

পাঠ-৩.৫ দ্বিপদী বিন্যাসের বিভিন্ন সমস্যাবলী
(Problems of Binomial Distribution)

ভূমিকাঃ

এ পাঠে দ্বিপদী বিন্যাসের বিভিন্ন সমস্যাবলী আলোচনা করা হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- দ্বিপদী বিন্যাসের বিভিন্ন সমস্যা সম্বন্ধে ধারণা করতে পারবেন।
- দ্বিপদী বিন্যাসের বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

সমস্যা -১ ঃ

একটি নিরপেক্ষ মুদ্রাকে ৫ বার উৎক্ষেপন করা হল। কমপক্ষে ৩ বার হেড (H) আসার সম্ভাবনা কত?

সমাধান-১:

আমরা জানি, n বার প্রচেষ্টায় x বার সফলতা আসার সম্ভাবনা,

$f(x) = {}^{n}c_{x}\, p^{x} q^{n-x}$

এখানে $n = ৫$, $p = \frac{1}{2} = q$

সুতরাং কমপক্ষে ৩ বার হেড আসার সম্ভাবনা

$f(x) = (x \geq ৩) = f(x = ৩) + f(x = ৪) + f(x = ৫)$

$= {}^{৫}c_{৩} \left(\frac{1}{2}\right)^{3} . \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} + {}^{৫}c_{৪} \left(\frac{1}{2}\right)^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4} + {}^{৫}c_{৫} \left(\frac{1}{2}\right)^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{5-5}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^{5} [১০+৫+১]$

$= \frac{1}{32} \times ১৬$

$= \frac{1}{2}$

উত্তর: নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{1}{2}$

সমস্যা ঃ-২

একটি নিরপেক্ষ ছক্কা ৩ বার উৎক্ষেপন করা হল। ছক্কার পিঠ ৬ কমপক্ষে দুইবার আসার সম্ভাবনা কত?

সমাধান

যেহেতু ছককাটি নিরপেক্ষ সুতরাং

$p = \frac{1}{6}$ এবং $q = \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}$, n = ৫

ছক্কার পিঠ ৬ ঘটার সংখ্যা ০, ১, ২, ৩

আমরা জানি, $f(x) = {}^{n}c_{x}\, p^{x} q^{n-x}$

ছককার পিঠ ৬ (দৈব চলক) কমপক্ষে ২ বার আসার সম্ভাবনা

$f(x) = f(x = ২) + f(x = ৩)$

$= {}^{৫}c_{২} \left(\frac{1}{6}\right)^{2} . \left(\frac{5}{6}\right)^{5-2} + {}^{৫}c_{৩} \left(\frac{1}{6}\right)^{3} . \left(\frac{5}{6}\right)^{5-3}$

$= {}^{৫}c_{২} \left(\frac{1}{6}\right)^{2} . \left(\frac{5}{6}\right)^{3} + {}^{৫}c_{৩} \left(\frac{1}{6}\right)^{3} . \left(\frac{5}{6}\right)^{2}$

$= \left(\frac{1}{6}\right)^{2} \left(\frac{5}{6}\right)^{2} \left[5c2 \text{ x } \frac{5}{6} + 5c3\, \frac{1}{6}\right]$

$= \frac{1}{36} \times \frac{25}{36} \left(10\text{x}\frac{5}{6} + 10\text{x}\frac{1}{6}\right)$

$=$ ০.১৯২৯

উঃ নির্ণেয় সম্ভাবনা = ০.১৯২৯

সমস্যা -৩

একটি বৈদ্যুতিক যন্ত্রপাতি বিক্রির দোকানে ৩% ত্রুটিপূর্ণ বাল্ব আছে। দোকানদার ১০ টি বাল্ব বিক্রি করেন এ গ্যারান্টি দিয়ে যে অনধিক ১টি বাল্ব ত্রুটিপূর্ণ থাকবে। দোকানদারের এ গ্যারান্টি প্রতিফলিত হবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ

এখানে p = ৩% = ০.০৩ অতএব, q = (১-০.০৩) = ০.৯৭, n = ১০

x = ১,২,৩, ... ১০

x = ০ অথবা x = ১ হলে গ্যারান্টি প্রতিফলিত হয় এবং এর সম্ভাবনা

$f(x) = f(x = ০) + f(x = ১)$

$=\binom{10}{0}.(০.০৩)^{০}(০.৯৭)^{১০}+\binom{10}{1}.(০.০৩)^{১}(০.৯৭)^{১০-১}$

$= (০.৯৭)^{১০}+ ১০x০.০৩x(০.৯৭)^{৯}$

$= ০.৯৬৫$

সমস্যা -8

একটি দ্বিপদী বিন্যাসের গড় এবং ভেদাংক যথাক্রমে ৫ এবং ৫/২।

$f(x \geq ১)$ বের করুন।

সমাধান ঃ

এখানে np = ৫ এবং $npq = \frac{5}{2}$

সুতরাং $\frac{npq}{np} = \frac{5/2}{5}$

বা $q = \frac{1}{2}$ এবং $p = \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

আবার np =৫

বা, $n.\frac{1}{2}=$ ৫ বা, n = ১০

সুতরাং $f(x \geq ১)=১- f(x=0)$

$= ১-{}^{১০}c_{০}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$= ১-\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = ০.৯৯৯$

নিজে করুন: একটি দ্বিপদী বিন্যাসের গড় ৩ ও ভেদাংক ২.৫, $f(x \geq ২)$ নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ ঃ

বিভিন্ন সমস্যার আলোচনা করা হয়েছে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৫:

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (|) চিহ্ন দিন:

১। দ্বিপদী বিন্যাসের ভেদাংক গড়ের চেয়ে

ক) বড় খ) খুব বড়

গ) ছোট ঘ) খুব ছোট

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় ঃ

২। দ্বিপদী বিন্যাসের পরামান পরিবর্তিত হলে বিন্যাসের আকার ও অবস্থানেরও পরিবর্তন হয়।

শুণ্যস্থান পূরণ ঃ

$n \rightarrow \alpha$ এবং $p \rightarrow 0$ হলে দ্বিপদী বিন্যাস .... দিকে ঝুঁকে পড়ে।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন-৩

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্নাবলী

১। বার্ণোলী প্রচেষ্টা, দ্বিপদী চলক ও দ্বিপদী বিন্যাসের উদাহরণসহ সংজ্ঞা দিন।

২। বার্ণোলী প্রচেষ্টার অনুমানসমূহ লিখুন।

৩। দ্বিপদী বিন্যাস কাকে বলে? এর ব্যবহার আলোচনা করুন। দ্বিপদী বিন্যাসের উদ্ভব হয় এমন সম্ভাবনা অপেক্ষক প্রতিষ্ঠিত করুন এবং এ বিন্যাসের গড় ও ভেদাংক নির্ণয় করুন।

৪। একটি দ্বিপদী বিন্যাসের গড় ৫ এবং ভেদাংক ৩। বিন্যাসটির সম্ভাবনা অপেক্ষক লিখুন।

৫। দ্বিপদী বিন্যাসের ব্যবহার ও ধর্মাবলী আলোচনা করুন।

৬। ২০০০ সংখ্যক আলপিনের একটি খামে মোট ৫০টি ত্রুটিযুক্ত আলপিন আছে। এই খামটি থেকে গৃহীত ২০টি আলপিনের মধ্যে অনধিক ১টি ত্রুটিযুক্ত আলপিন পাবার সম্ভাবনা কত?

৭। একটি নিরপেক্ষ মুদ্রাকে ৬ বার উৎক্ষেপন করা হল। কমপক্ষে ৩ বার হেড আসার সম্ভাবনা কত?

৮। একটি নিরপেক্ষ ছক্কা ৫ বার উৎক্ষেপন করা হল। ছক্কার পিঠ ১ দুইবার আসার সম্ভাবনা কত?

উত্তরমালাঃ

৩.১ঃ ১। ক ২। গ ৩। ক ৪। সত্য ৫। সত্য ৬। ১ ৭। বার ৮। খ ৯। ক

৩.২ঃ ১। ক ২। খ ৩। খ ৪। ঘ ৫। সত্য ৬। পরামান ৭। খ ৮। ক

৩.৩ঃ ১। খ ২। গ ৩। খ ৪। মিথ্যা ৫। সত্য ৬। সত্য

৩.৪ঃ ১। ক ২। ক ৩। খ ৪। মিথ্যা ৫। সত্য ৬। সম্ভাব্য ঘটনা ৭। পরিমিত বিন্যাসে ৮। খ ৯। ক

৩.৫ঃ ১। গ ২। সত্য ৩। পৈসুঁ বিন্যাসের