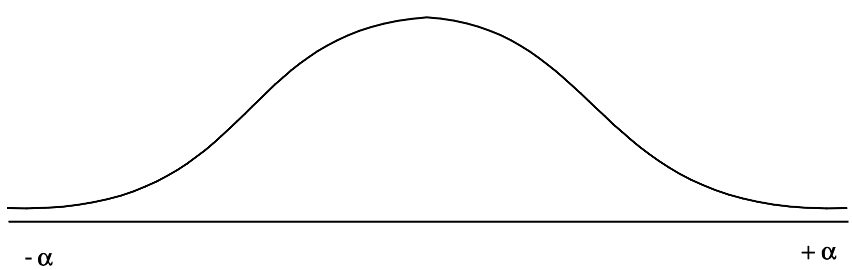
ইউনিট ৫

পরিমিত বিন্যাস
(Normal Distribution)

ভূমিকাঃ

পরিসংখ্যান বিজ্ঞানে বিন্যাস পদটি বলতে কোন একটি রাশিমালা কি ভাবে বিন্যস্ত বা বিক্ষিপ্ত থাকে তাহার বর্ণনা বুঝায়। বিন্যাস বিভিন্ন আকারের হতে পারে। সবচেয়ে ভাল বিন্যস্ত আকার হল পরিমিত বিন্যাস। পরিমিত বিন্যাসের চিত্রটি দেখুন।



চিত্র ঃ পরিমিত বিন্যাস

এ বিন্যাসের মাঝামাঝি বরাবর ভাঁজ করলে এক পার্শ্বের রেখা অন্য পার্শ্বের রেখার সাথে মিলে যায়।

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন-

- পরিমিত বিন্যাস ও পরিমিত রেখা
- আদর্শ পরিমিত চলক ও ইহার গড় ও ভেদাংক নির্ণয়
- পরিমিত বিন্যাসের ধর্মাবলী
- পরিমিত বিন্যাসে সারণীর ব্যবহার

পাঠ-৫.১ পরিমিত বিন্যাস ও পরিমিত রেখা

ভূমিকা

পরিমিত বিন্যাসঃ পরিসংখ্যান বিজ্ঞানে এর ব্যবহার অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। ইংরেজ গণিতশাস্ত্রবিদ আব্রাহাম ডি ময়ভার (১৭৩৩) পরিমিত বিন্যাসটি উদ্ভাবন করেন। গস্ (১৮০৯) সালে পরিমিত বিন্যাস সম্বন্ধে উল্লেখ করেন। তাই কেউ কেউ এ বিন্যাস কে গসিয়ান বিন্যাস বলেন। অষ্টাদশ ও উনবিংশ শতাব্দীতে সমস্ত অবিচ্ছিন্ন চলকের বিন্যাসকে পরিমিত বিন্যাসে প্রতিষ্ঠিত করার চেষ্ঠা করা হয়েছিল এবং তখন থেকেই এ বিন্যাস পরিমিত বা নরমাল বিন্যাস নামে অভিহিত করা হয়।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি লিখতে পারবেন -

- পরিমিত বিন্যাসের সংজ্ঞা
- পরিমিত রেখা

বিষয়বস্তু ঃ

X অবিচ্ছিন্ন চলককে তখনই পরিমিত চলক বলা হবে যখন X সম্ভাবনা ঘনত্ব অনপেক্ষ নিম্নরূপ হবে ঃ

$f(x;\mu,\sigma^2)$ = **Error!**

; $-\infty < x < +\infty$

; $-\infty < \mu < +\infty$

; $\sigma^2 >$ ০

যেখানে, μ =গড়, σ^2= ভেদাঙ্ক, পরিমিত বিন্যাসের দুটি পরামান এবং e = ২.৭১৮২৮,

π = ৩.১৪১৫৭ , μ এবং σ^2পরামান বিশিষ্ট পরিমিত চলককে প্রকাশ করা হয় $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$ দ্বারা।

নিম্নলিখিত শর্তে দ্বিপদী বিন্যাস পরিমিত বিন্যাসে রূপান্তরিত হয়,

১. দ্বিপদী বিন্যাসের সফলতার সম্ভাবনা p অথবা বিফলতার সম্ভাবনা q যদি খুব ছোট না হয়।

২. দ্বিপদী বিন্যাসের ঘটনার সংখ্যা n যদি খুব বড় হয়, অর্থাৎ $n \to \infty$ হয়

আমরা জানি দ্বিপদী বিন্যাসের অপেক্ষক

$f(x; n, p) = ({}^{n}C_{x}) p^x q^{n-x}$; x = ০,১, ---------n

যেখানে, n = চেষ্টার সংখ্যা

p = সফলতার সম্ভাবনা

মনেকরি, $z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$ একটি আদর্শ দ্বিপদী চলক।

এখানে, দ্বিপদী চলকের গড় = np ও ভেদাঙ্ক = npq

এখন, $x = ০ => z = \frac{- np}{\sqrt{npq}} = -\sqrt{\frac{np}{q}}$ এবং

$x = n => z = \frac{n - np}{\sqrt{npq}} =$ **Error!**$= \frac{nq}{\sqrt{npq}} = \sqrt{\frac{nq}{p}}$

যদি $n \rightarrow \infty$ হয়, তখন z এর মান $-\infty$ থেকে $+\infty$ হয়। সুতরাং z, $-\infty$ থেকে $+\infty$ এর মধ্যে একটি অবিচ্ছিন্ন বিন্যাস যার গড় = ০ এবং ভেদাংক = ১, এখন

$f(x; n, p) = n_{cx} p^x q^{n - x}$

$= $ **Error!**$p^x q^{n - x}$

n গৌনিকের জন্য Starling □এর সূত্র অনুসারে পাই

$n! \cong \sqrt{2\pi} e^{- n} n^{n + \frac{1}{2}}$

$\therefore f(x; n, p) =$ **Error!**

$=$ **Error!**

$\therefore \lim_{n□□} f(x; n.p) =$ **Error!**

$= \frac{\lim}{n□a}$

আদর্শ দ্বিপদী চলক হতে পাই -

$z =$ **Error!**

$=> x = np + z\sqrt{npq}$

$=> \frac{x}{np} = ১ + z\sqrt{\frac{q}{np}}$

এবং $n - x = n - np - z\sqrt{npq}$

$= n(১ - p) - z\sqrt{npq} = nq - z\sqrt{npq}$

অতএব **Error!**$= ১ - z\sqrt{\frac{p}{nq}}$

আবার, $z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$ কে বিজোযন করে পাই

$dz = \frac{1}{\sqrt{npq}} dx$

এখন z এর বিন্যাসের সম্ভাবনা অপেক্ষককে লিখতে পারি -

$$f(z)z = \frac{\lim}{n\square a}$$

$$= \lim_{n\square\square}$$

$$= \lim_{n\square\square}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lim}{n\square\square}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} ; \quad -\infty < z < +\infty$$

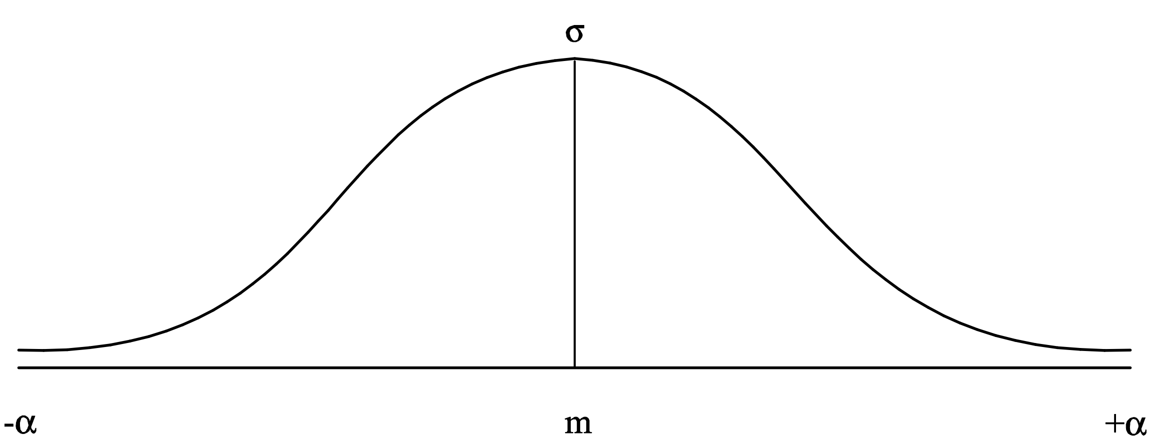
$\therefore f(z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} ; \quad -\infty < z < +\infty$ ইহাই আদর্শ পরিমিত বিন্যাসের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক যার গড় = ০ ও ভেদাংক = ১।

যদি z = **Error!**= $\frac{x - m}{\sqrt{s2}}$ হয়, তবে x এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অনপেক্ষ হবে,

$$f(x) = f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x - \mu}{s}\right]^2} \quad -\infty < z < +\infty$$

ইহাই পরিমিত সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক যার গড় = μ এবং ভেদাংক = σ^2

পরিমিত রেখা ঃ পরিমিত বিন্যাসকে লেখ চিত্রে উপস্থাপন করলে যে রেখা পাওয়া যায় তাহাকে পরিমিত রেখা বলে। চিত্রে একটি পরিমিত রেখা দেওয়া হল :

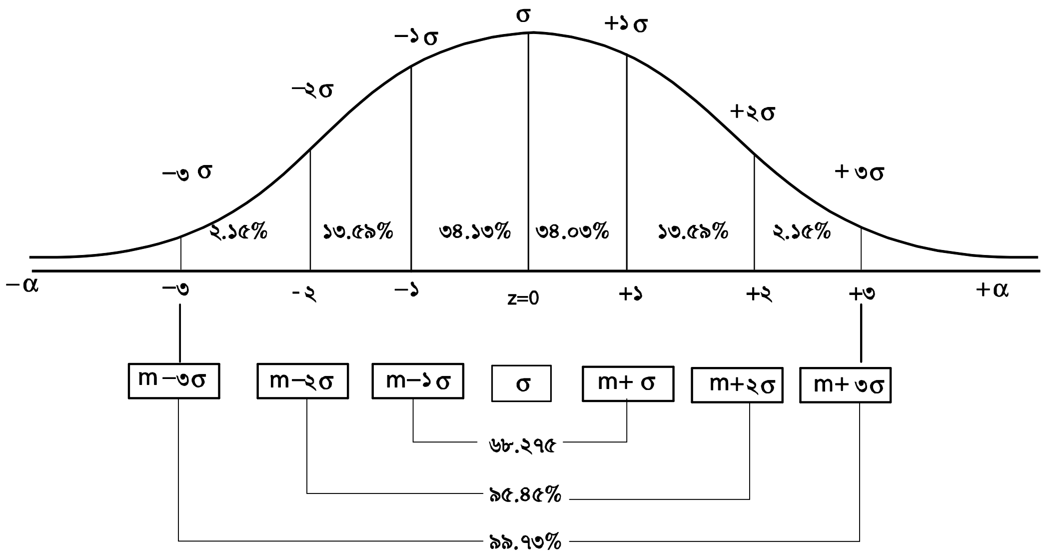


m = গড়

চিত্র ঃ পরিমিত রেখা

এ রেখাটি একটি বিশেষ ধরনের সুষম গনসংখ্যা রেখা। অন্যভাবেও পরিমিত রেখার সংজ্ঞা দেওয়া যায়।

$y = f(x)$ কে পরিমিত সম্ভাবনা রেখা বলা যায় কারণ x এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$ এর মান লেখচিত্রে স্থাপন করলে পরিমিত রেখা সম্পন্ন করা যায়।



চিত্র ঃ পরিমিত রেখা

সারসংক্ষেপ:

পরিমিত বিন্যাসের মাঝামাঝি বরবার ভাঁজ করলে এক পার্শ্বের রেখার সাথে অন্য পার্শ্বের রেখা সম্পূর্ণ মিলে যাবে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৫.১:

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন:

১। পরিমিত বিন্যাস উদ্ভাবন করেন

ক) ডি ক্লার্ক খ) ডি ময়ভার

গ) ডি সিলভা ঘ) ডি কস্ট্রা

২। পরিমিত চলকের পরামান কয়টি

ক) ৫টি খ) ৩টি

গ) ২টি ঘ) ৪টি

৩। পরিমিত বিন্যাসের সীমানা

ক) $-\infty \geq z \leq +\infty$ খ) $-\infty \geq z < \geq\infty$

গ) $-\infty \geq z < \leq\infty$ ঘ) $-\infty \leq z \leq +\infty$

শুণ্যস্থান পূরণ ঃ

৪। পরিমিত বিন্যাসকে কেউ কেউ .... বিন্যাস বলেন

৫। n গৌনিকের জন্য Starling এর সুত্র অনুসারে ....

সত্য/মিথ্যাঃ

৬। e এর মান ২.৭১৮২৮

৭। পরিমিত বিন্যাসের সীমানা $-\infty \leq z \leq +\infty$

পাঠ-৫.২ পরিমিত বিন্যাসের গড় ও ভেদাংক

ভূমিকাঃ

পরিমিত বিন্যাসের পরামান দুটি গড় $= \mu$ এবং ভেদাংক $= \sigma^2$, এই পরামান নির্ণয় খুবই জরুরী। পূর্ব পাঠে আমরা পরিমিত বিন্যাস সম্পর্কে আলোচনা করেছি। এ পাঠে কিভাবে পরামান নির্ণয় করা যায় তা আলোচনা করবো।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন-

- গড় নির্ণয় সম্পর্কে
- ভেদাংক নির্ণয় সম্পর্কে
- পরিমিত চলক সম্পর্কে

বিষয় বস্তু

পরিমিত বিন্যাসের গড় নির্ণয়ের পূর্বে দুটি বিষয় লক্ষ্য রাখা দরকার -

১. $f(x; \mu, \sigma) \geq 0$ অর্থাৎ সর্বদা ধনাত্মক

২. $\vee\, f(x; \mu, \sigma^2)\, dx =$ ১

প্রমাণ ঃ আমরা জানি

$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}}$ e **Error!**; $\quad -\infty < x < +\infty$

সমাকলন করে পাই,

Error!dx = **Error!**dx

$= \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty}$ e**Error!**dx

$$= \frac{s}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz \qquad \because\ z = \frac{x - \mu}{s} => sdz = dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+\infty} e^{\frac{-z^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \sqrt{2p} \quad \because \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = \sqrt{2p}$$

=১ ∴ **Error!**= ১

∵ পরিমিত বিন্যাস একটি অপেক্ষক।

পরিমিত বিন্যাসের গড় ঃ

আমরা জানি,

গড় = **Error!**dx

= **Error!**

= **Error!** ∵ $z = \frac{x - \mu}{s} \Rightarrow x = \mu + \sigma z$

$\Rightarrow dx = \sigma dz$

$$= \mu + \sigma \int_{-□}^{+□} z \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

$$= \mu + \delta \int_{-□}^{+□} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

$$= \mu + \sigma \left[z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz + \int_{0}^{□} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz \right]$$

$= \mu + \sigma \times$০

$= \mu$

∴ গড় = μ

পরিমিত বিন্যাসের ভেদাংক ঃ

আমরা জানি,

ভেদাংক = $E(x^2)$ - **Error!**

এখানে, $E(x^2) = \int_{-□}^{+□} x^2 \frac{1}{s\sqrt{2\pi}}$ e **Error!**dx

=**Error!**e $\frac{z}{2}$ σdz

∵ $z = \frac{x - \mu}{s}$

$x = \mu + \sigma z$

$dx = \sigma dz$

$$= \mu^2 + \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$
$$= \mu^2 + \sigma^2$$

আমরা জানি $E(x) = \mu$

$\therefore$ ভেদাংক $= \mu^2 + \sigma^2 - (\mu)^2$

$= \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2$

$= \sigma^2$

$\therefore$ ভেদাংক $= \sigma^2$

পরিমিত বিন্যাসের গড় = মধ্যমা = প্রচুরক

আদর্শ পরিমিত চলক ঃ যদি $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, তবে $z = \frac{x - \mu}{s}$ কে আদর্শমান কৃত চলক বলা হয়। একটি আদর্শ মান কৃত চলকের গড় = ০ ও ভেদাংক =১। পরিমিত বিন্যাসের আদর্শ মানকৃত চলকের বিন্যাস কে নিন্মরূপে প্রকাশ করা হয়।

$z \sim N(০,১)$ এবং উহার ঘনত্ব অনপেক্ষ $f(x;০,১) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$; $-\infty < z < +\infty$

উদাহরণ ঃ বাংলাদেশ উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের অর্ন্তগত নওয়াপাড়া শঙ্কর পাশা উচ্চ বিদ্যালয়ে এস.এস.সি প্রোগ্রামের ছাত্রদের প্রাপ্ত নম্বরের গড় = ৫০ ও আদর্শ বিচ্যুতি = ৫। একজন ছাত্রের প্রাপ্তি নম্বর ৬৫, তার আদর্শ পরিমিতি মান কত?

সমাধান ঃ ছাত্রটির প্রাপ্ত নম্ভর X = ৬৫, গড় μ = ৫০ এবং আদর্শ বিচ্যুতি σ = ৫

ছাত্রটির আদর্শ মান $z = \frac{x - \mu}{s} = \frac{65 - 50}{5} = \frac{15}{5}$ = ৩

নির্ণেয় আদর্শ মান z = ৩

সারসংক্ষেপ:

পরিমিত বিন্যাসের গড় μ ও ভেদাঙ্ক = σ^2

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৫.২:

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (|) চিহ্ন দিন:

বহু নির্বাচন প্রশ্নোত্তর ঃ

১। পরিমিত বিন্যাসের ক্ষেত্রে $f(x; \mu, \sigma^2)$ এর মান

ক) সর্বদা ধনাত্মক খ) ঋনাত্মক

গ) সর্বদা সমান ১ ঘ) সর্বদা -১

সত্য/মিথ্যা

২। পরিমিত বিন্যাসের ক্ষেত্রে $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x; \mu, \sigma^2)\, dx =$ ১০

৩। পরিমিত বিন্যাসের গড় = μ

৪। পরিমিত বিন্যাসের ভেদাংক = ৩σ

শুণ্যস্থান পূরণ ঃ

৫। $\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{0}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} =$ .... ।

৬। আদর্শ পরিমিত চলকের ভেদাংক = ... ।

বাক্য মিলানো ঃ

৭। আদর্শ পরিমিত চলক	ক) $\mu =$ ০
৮। আদর্শ পরিমিত চলকের গড়	খ) μ
৯। পরিমিত চলকের $E(X) =$	গ) $z = \frac{x - m}{s}$

পাঠ-৫.৩ পরিমিত বিন্যাসের ধর্মাবলী

ভূমিকাঃ

পরিমিত বিন্যাস পরিসংখ্যানের একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। পরিমিত বিন্যাসের ধর্মাবলী সম্পর্কে এ পাঠে আলোচনা করা হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন -

- পরিমিত বিন্যাসের ধর্মগুলি সম্পর্কে
- পরিমিত বিন্যাসের গুরুত্ব
- পরিমিত চলকের ক্ষেত্রফলের ধর্ম।

বিষয়বস্তু ঃ পরিমিত বিন্যাসের ধর্মগুলি নিচে দেওয়া হল ঃ

১. পরিমিত বিন্যাস অবিচ্ছিন্ন চলকের সম্ভাবনা বিন্যাস

২. ইহা একটি সুষম বিন্যাস

৩. পরিমিত রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল =১

৪. পরিমিত রেখা $x = \mu$ বিন্দুর রেখার আওতাধীন মোট ক্ষেত্রফলের সমান দুভাগে ভাগ করে।

৫. $x = \mu$ বিন্দুতে পরিমিত রেখার বিন্দু মান সবচেয়ে বেশী। এ মান $y = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}}$

৬. পরিমিত বিন্যাসে দুটি পরামান আছে। গড় = μ এবং ভেদাংক = σ^2

৭. পরিমিত বিন্যাসের গড় , মধ্যমা ও প্রচুরক সমান

৮. পরিমিত বিন্যাসের গড় কেন্দ্রিক বিজোড় পরিঘাত গুলির মান শুণ্য।

৯. পরিমিত বিন্যাসের বঙ্কিমতা শুন্য এবং ইহার গন সংখ্যা রেখাটি মধ্যম সুচাল।

১০. পরিমিত রেখার দুটি বিন্দুর আনতি (Point of inflexion) আছে। এদের অবস্থান $x = \mu \neq \sigma$

১১. পরিমিত বিন্যাসের গড় বিচ্যুতি পরিমিত বিচ্যুতির ৪/৫ অংশ

১২. স্বাধীন পরিমিত চলকগুলির রৈখিক সংযোগ ও একটি পরিমিত চলক।

পরিমিত চলকের ক্ষেত্রফলের ধর্ম ঃ

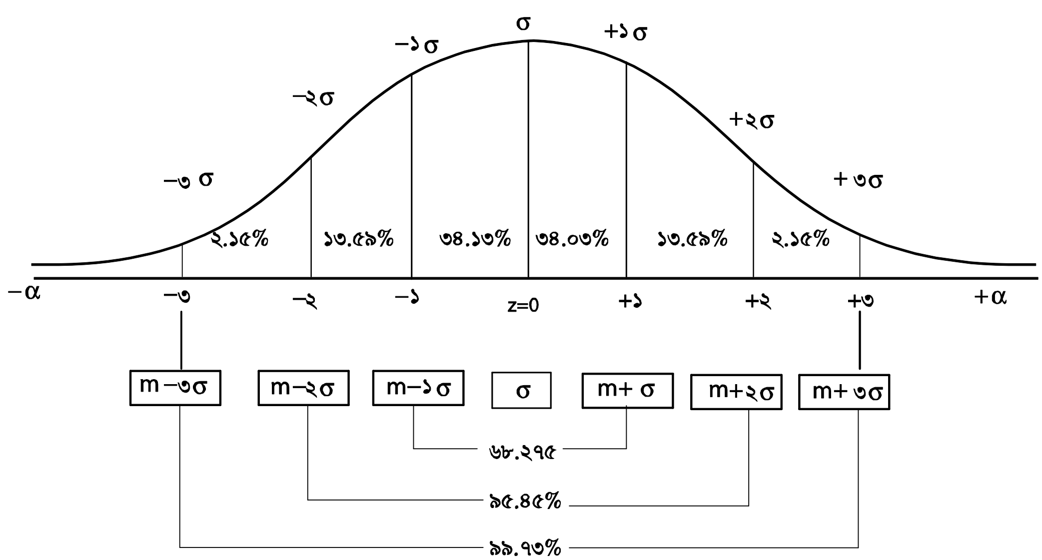
পরিমিত চলকের ক্ষেত্রফলের ধর্মগুলি নিতে দেওয়া হল ঃ

১. পরিমিত চলক $-\infty$ থেকে $+\infty$ পর্যন্ত যে কোন মান গ্রহন করতে পারে।

২. পরিমিত চলকের মান গড়ের উভয় পার্শ্বে পরিমিত ব্যবধানের মধ্যে থাকার সম্ভাবনা ০.৬৮২৬।

অর্থাৎ Prob [$\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$] = ০.৬৮২৬

৩. শতকরা ৯৯.৭ ভাগ সংখ্যামান পরিমিত বিন্যাসের $x \pm$ ৩σ এর ভিতর অবস্থান করে। চিত্রে দেখুন



ক. চলকের ৬৮.২৬ % মান $\mu \pm \sigma$ এর মধ্যে অবস্থান করে

খ. চলকের ৯৫.৪৪ % মান $\mu \pm$ ২σ এর মধ্যে অবস্থান করে

গ. চলকের ৯৯.৭৪ % মান $\mu \pm$ ৩σ এর ভিতর অবস্থান করে

পরিমিত বিন্যাসের ব্যবহার

পরিসংখ্যান বিজ্ঞানে পরিমিত বিন্যাসের ব্যবহারিক গুরুত্ব অপরিসীম। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ আলোচনা করা হল।

১. ব্যবহারিক বিশ্বে প্রায় সকল বিন্যাসই বিভিন্ন প্রকার শর্ত সাপেক্ষে পরিমিত বিন্যাসে রূপান্তরিত হয়। তাছাড়া নমুনাজ বিন্যাসগুলিও নমুনার আকার বড় হলে পরিমিত বিন্যাসে রূপান্তরিত হয়।

২. সম্ভাবনা তত্ত্বে পরিমিত বিন্যাসের ব্যবহার খুবই গুরুত্বপূর্ণ

৩. গড় অভিমূখী তত্ত্বে নমুনার আকার বড় হলে আদর্শ পরিমিত বিন্যাস এর সাহায্যে সম্ভাবনা নির্ণয় করা যায়।

৪. পরিমিত বিন্যাসের অনুমান ব্যতিত নমুনাজ বিন্যাসগুলির অস্তিত্ব থাকে না । তাই χ^2, F, t নমুনাজ বিন্যাসগুলি পরিমিত বিন্যাসকে অনুমানে এনে নির্ণয় করা হয়।

৫. χ^2, F, t পরীক্ষাগুলিতেও পরিমিত বিন্যাস ব্যবহার করা হয়।

৬. কোন বিন্যাসের গড় যাচাই করতে ব্যবহার করা হয়।

৭. দুটো বিন্যাসের গড়ের সমতা যাচাই করতে পরিমিত বিন্যাস ব্যবহার করা হয়।

৮. তাত্ত্বিক ও ব্যবহারিক পরিসংখ্যানের বিভিন্ন শাখায় পরিমিত বিন্যাসের ব্যাপক ব্যবহার পরিলক্ষিত হয়।

৯. পরিমিত বিন্যাস কোন তথ্যের বন্টন অবস্থা পরীক্ষা করা হয়

১০. পরিমিত বিন্যাসের সাহায্যে নমুনাকে পরিমিত বিন্যাসের সংগে তুলনা করে উহার সমগ্রকের ধারনা নেয়া যায়।

১১. নমুনার আকার বড় হলে পরিমিত বিন্যাসের সাহায্য নিয়ে উহার সমাধান করা যায়।

১২. বিভিন্ন উৎপাদনের উৎকর্ষতা পরীক্ষা পরিমিত বিন্যাসের সাহায্যে করা হয়।

সারসংক্ষেপঃ

পরিমিত রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল=১

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৫.৩ঃ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নঃ

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিনঃ

বহুনির্বাচনী প্রশ্নোত্তর ঃ

১। পরিমিত রেখা $x = \mu$ বিন্দুর রেখার আওতাধীন মোট ক্ষেত্রফলকে কয় ভাগে ভাগ করা যায়

ক) ৩ খ) ২

গ) ৫ ঘ) ৪

২। পরিমিত বিন্যাসের বঙ্কিমতা

ক) ধনাত্মক   খ) শুন্য

গ) কাল্পনিক   ঘ) ১

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় ঃ

৩। পরিমিত বিন্যাস সুষম বিন্যাস নয়

৪। পরিমিত বিন্যাসের গড় = মধ্যমা = প্রচুরক

৫। পরিমিত চলকে ৯৯.৭৪% মান $\mu \pm ৩\sigma$ এবং ভিতর অবস্থান করে

শুণ্যস্থান পূরণঃ

৬। পরিমিত বিন্যাস .... সম্ভাবনা বিন্যাস

৭। পরিমিত বিন্যাসের গড় বিচ্যুতি পরিমিত বিচ্যুতির .... ।

৮। পরিমিত রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল .... ।

বাক্য মিলানো ঃ

৯। স্বাধীন পরিমিত চলকগুলির	ক) গ্রহণ করতে পারে
১০। পরিমিত চলক $-\infty$ থেকে $+\infty$	খ) পরিমিত বিন্যাস ব্যবহার করা হয়
১১। χ^2, F, t পরীক্ষাগুলোতেও	গ) সংযোগও একটি পরিমিত চলক

পাঠ-৫.৪ পরিমিত বিন্যাসে সম্ভাবনা সারণীর ব্যবহার

ভূমিকা

পরিমিত বিন্যাসের ব্যবহারের মধ্যে সারণীর ব্যবহার বহুল প্রচলিত। পরিমিত সম্ভাবনা সারণী ব্যবহার করে পরিমিত রেখার আওতাধীন যে কোন নির্দিষ্ট অংশের সম্ভাবনা নির্ণয় করা যায়। এ পাঠে আমরা সারণী ব্যবহার করে কিভাবে নির্দিষ্ট অংশের সম্ভাবনা বের করা হয় সে সম্পর্কে আলোচনা করবো।

উদ্দেশ্য

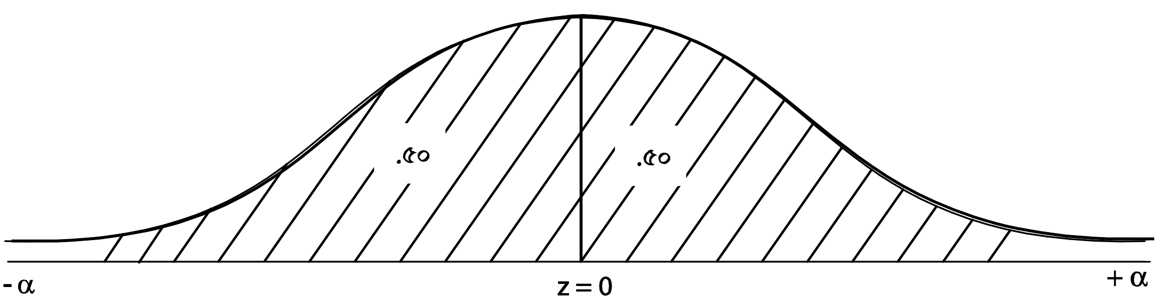
এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন -

- কি ভাবে সারণী ব্যবহার করা যায়
- কিভাবে সারণীর মাধ্যমে পরিমিত রেখার আওতাধীন যে কোন অংশের সম্ভাবনা নির্ণয় করা যায়।

বিষয়বস্তু ঃ আমরা জানি, পরিমিত রেখা একটি নির্দিষ্ট এলাকা জুড়ে অবস্থান করে। যে এলাকার সম্পূর্ণ সম্ভাবনা মান ১। অর্থাৎ Prob [$\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$] =১

পরিমিত রেখার মধ্যবিন্দু রেখাকে সমদ্বিখন্ডিত করে অর্থাৎ z = ০ তে রেখাটি সমান ভাগে ভাগ হয়। এবং এর উভয় পার্শ্বে সম্ভাবনা .৫০।

চিত্র দেখুন ঃ



চিত্র: সমানভাবে খন্ডিত পরিমিত রেখা

এখানে, Prob [$-\infty < z <$ ০] = Prob [০ $< z < +\infty$] = .৫০

পরিমিত সম্ভাবনা সারণী হতে পরিমিত চলক z এর নির্দিষ্ট মানের নির্ণয় পদ্ধতি:

বিভিন্ন ক্ষেত্রে সম্ভাবনা নির্ণয়ঃ

ক্ষেত্র- ১. Prob [$z = z_1$] নির্ণয় :

আমরা জানি, পরিমিত বিন্যাস একটি সুষম বিন্যাস। z_1 এর মান ধনাত্মক বা ঋনাত্মক যাই হোক না কেন উভয় ক্ষেত্রেই একই সম্ভাবনা পাওয়া যাবে। অর্থাৎ

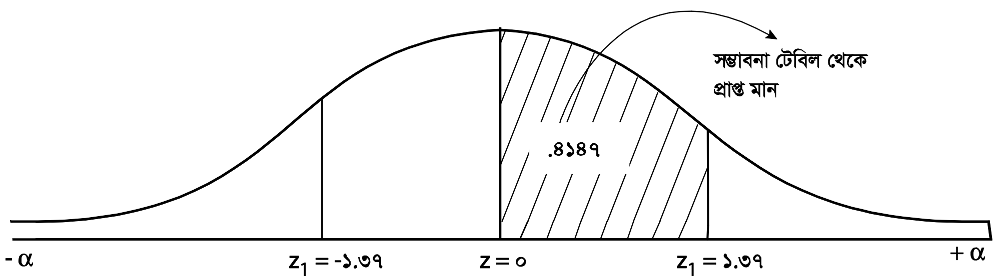
Prob [$z = -z_1$] = Prob [$z = z_1$] = .৪১৮৭ যেখানে $z_১$ = ১.৩৭

উদাহরণ স্বরূপ বলতে পারি, যদি z = ১.৩৭ হয়, তাহলে

Prob [z = ১.৩৭] = Prob [z = -১.৩৭] = .৪১৪৭

সম্ভাবনা সারণীতে z এর কলামে ১.৩ সারি বরাবর .০৭ এর কলামে দেখতে হবে। পরিমিত সম্ভাবনা সারণী হতে এ সম্ভাবনা পাওয়া যায় .৪১৪৭

পরিমিত সম্ভাবনা সারণী দেখুন



চিত্র : সম্ভাবনা চিত্র Prob [z = ১.৩৭]

উদাহরণ ঃ পরিমিত সারণী ব্যবহার করে z_1= -২.১৭ ও z_2= ১.৫৮ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

z পরিমিত চলক হলে -

ক্ষেত্রফল

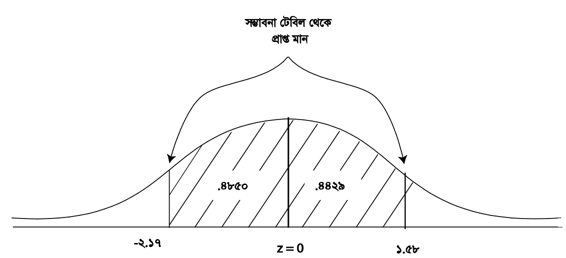
= Prob [$z_1 \leq z \leq z_2$]

= Prob [-২.১৭ ≤ z ≤ ১.৫৮]

= Prob [-২.১৭ ≤ z ≤ ০] + Prob [০ ≤ z ≤ ১.৫৮]

= .৪৮৫০ + .৪৪২৯

= .৯২৭৯



চিত্রঃ সম্ভাবনা চিত্র Prob [-২.১৭ ≤ z ≤ ১.৫৮]

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = .৯২৭৯

নিজে করুন ঃ পরিমিত সারণী ব্যবহার করে, z_1 = **-১.৫২** ও z_2= **১.৯৮** এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন

ক্ষেত্র-২. Prob [$z \le z_1$] ; z ধনাত্মক হলে, ক্ষেত্রফল নির্ণয় :

z ধনাত্মক হলে,

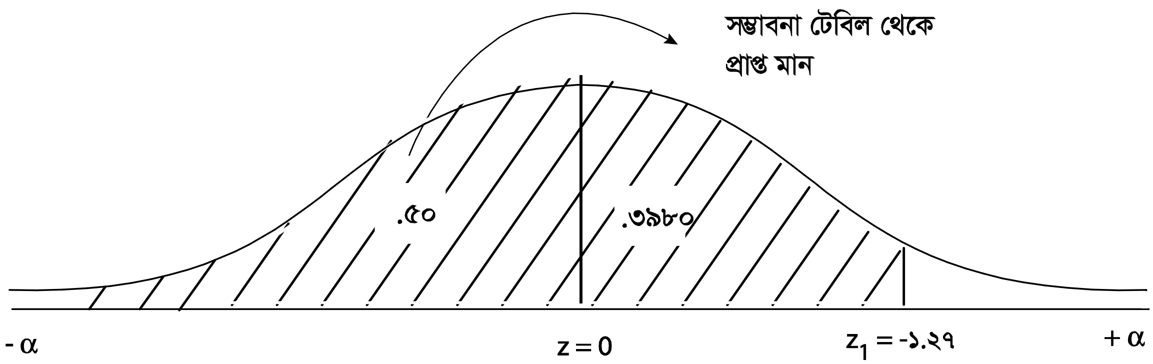
Prob [$z \le z_1$] = Prob [$-\infty \le z \le$ ০] + Prob [০ $\le z \le z_1$]

উদাহরণস্বরূপ ঃ $z_১$= **১.২৭** হলে ক্ষেত্রফল হবে,

Prob [z ≤ **১.২৭**] = Prob [-∞ ≤ z ≤ ০] + Prob [০ ≤ z ≤ **১.২৭**]

= .৫০ + .৩৯৮০

= .৮৯৮০



চিত্র: ধনাত্মক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

ক্ষেত্র-৩. Prob [z≤–$z_১$] অর্থাৎ z_1ঋনাত্মক হলে ক্ষেত্রফল নির্ণয়

z ঋনাত্মক হলে, ক্ষেত্রফল হবে,

Prob [–$z_১$ ≤z] = Prob [-∞ ≤ z ≤ ০] - Prob [z_1≤ z ≤ ০] হবে।

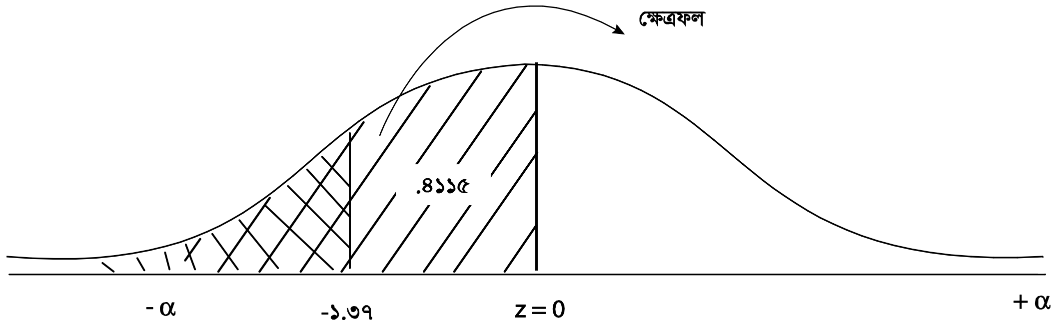
উদাহরণস্বরূপ, $z_১$ = **-১.৩৫** হলে

Prob [z ≤ **-১.৩৫**] = Prob [-∞ ≤ z ≤ ০] - Prob [**-১.৩৫** ≤ z ≤ ০]

= .৫০ - .৪১১৫

= .০৮৮৫

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = .০৮৮৫



চিত্র: ঋনাত্মক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

ক্ষেত্র-৪. Prob [z ≤ z_1] এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় ঃ

z_1 এর মান ধনাত্মক হলে,

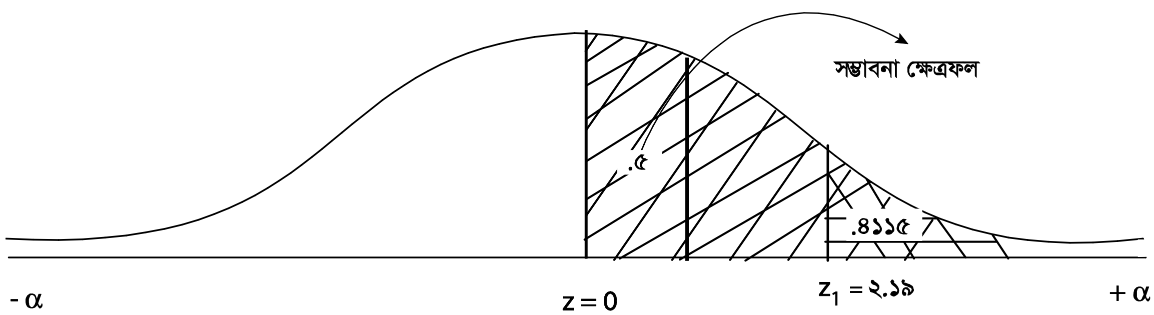
Prob [z ≤ $z_{২}$] = Prob [০ ≤ z ≤ +∞] - Prob [০ ≤ z ≤ z_1]

উদাহরণস্বরূপ, z = ২.১৯ হলে

Prob [z ≤ ২.১৯] = Prob [০ ≤ z ≤ +∞] - Prob [০ ≤ z ≤ z_1]

= .৫০ - .৪৮৫৭

= .০১৪৩



চিত্র: ধনাত্মক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

ক্ষেত্র-৫. Prob [z ≤ z_1] এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় ঃ

z_1 এর মান যখন ঋনাত্মক, তখন,

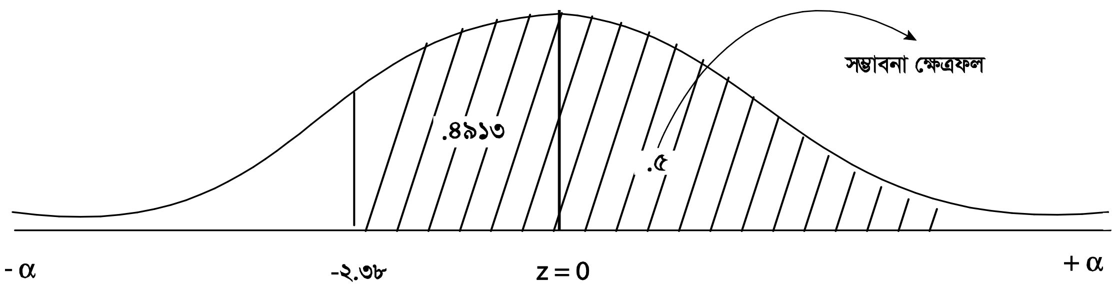
Prob [z ≤ -z_1] = Prob [–z_1 ≤ z ≤ ০] + Prob [০ ≤ z ≤ +∞]

উদাহরণস্বরূপ, z = -২.৩৮ হলে

Prob [z ≥ -২.৩৮] = Prob [-২.৩৮≤ z ≤ ০] + Prob [০ ≤ z ≤ +∞]

=.৪৯১৩ + .৫০

= .৯৯১৩



চিত্র: ঋনাত্মক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

ক্ষেত্র-৬. Prob [$z_1 \leq z \leq z_2$] এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় :

z_1এবং z_2উভয়ই ধনাত্মক হলে

Prob [$z_1 \leq z \leq z_2$] = Prob [$০ \leq z \leq z_2$] - Prob [$০ \leq z \leq z_1$]

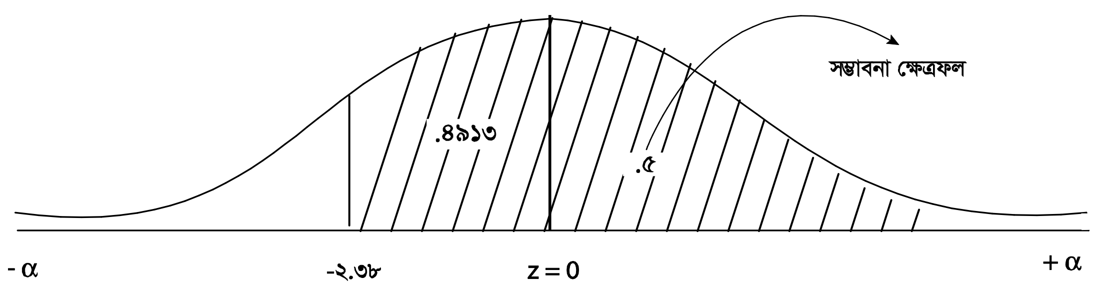
উদাহরণস্বরূপ, z_1= ১.৩৫ ও z_2= ৩.২৭ হলে

Prob [১.৩৫ ≤z ≤ ৩.২৭)] = Prob [০≤z ≤ ৩.২৭] - Prob [০≤z ≤ ১.৩৫]

= .৪৯৯৫ - .৪১১৫

= .০৮৮০

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = .০৮৮০



চিত্র: উভয়-ই ধনাত্মক হলে তার ক্ষেত্রফল

৭. Prob [$-z_1 \leq z \leq -z_2$] এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় :

যখন, z_1এবং z_2উভয়ই ঋনাত্মক -

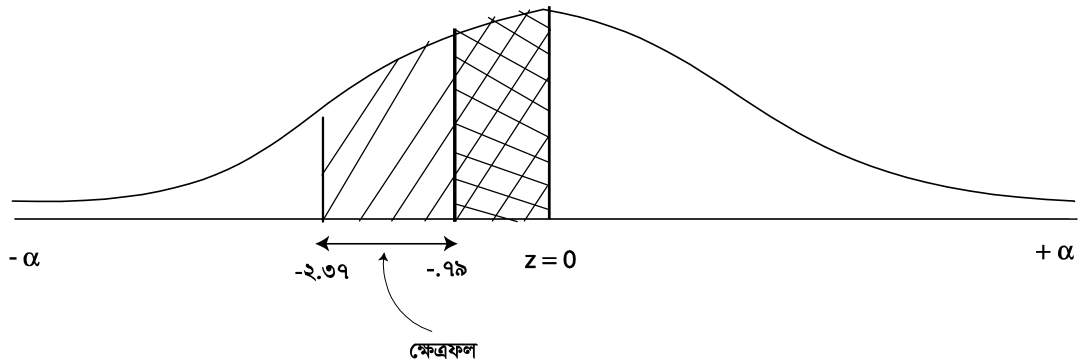
তখন, Prob [$-z_1 \leq z \leq -z_2$] = Prob [$-z_1 \leq z \leq ০$] - Prob [$-z_2 \leq z \leq ০$]

উদাহরণস্বরূপ, z_1= -২.৭৯ এবং z_2= -.৭৯ হলে

Prob [-২.৩৭ ≤z ≤–.৭৯] = Prob [-২.৩৭≤z ≤ ০] – Prob [-.৭৯≤z ≤ ০]

= .৪৯১১ - .২৮৫২

= .২০৫৯



চিত্র: উভয়-ই ঋনাত্মক ক্ষেত্র হলে তার ক্ষেত্রফল

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = .২০৫৯

সার সংক্ষেপ:

পরিমিত সম্ভাবনা সারণী ব্যবহার করে পরিমিত রেখার আওতাধীন যে কোন নির্দিষ্ট অংশের সম্ভাবনা নির্ণয় করা যায়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৫.৪ঃ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (|) চিহ্ন দিন:

১। পরিমিত রেখার মধ্যবিন্দু রেখাটিকে ভাগ করে

ক) সমান ভাবে খ) সমান চার ভাগে

গ) সমান দশ ভাগে ঘ) সমান একশত ভাগে

সত্য/মিথ্যা নির্ণয়ঃ

২। পরিমিত বিন্যাসের সম্পূর্ন ক্ষেত্রের মান ১

৩। P_{rob} [-∞ < z < ০] ≠ P_{rob} [০ < z <+ ∞

শুণ্যস্থান পূরণ ঃ

৪। পরিমিত বিন্যাস একটি .... ।

৫। পরিমিত বিন্যাসের ব্যবহারের মধ্যে সারনীর ব্যবহার .... ।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন-৫

রচনামূলক প্রশ্ন

১। পরিমিত বিন্যাসের সংজ্ঞা লিখুন। পরিমিত বিন্যাসের ধর্ম ও ব্যবহারগুলি লিখুন।

২। পরিমিত রেখা সম্পর্কে লিখুন। পরিমিত বিন্যাসের গড় ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় করুন।

৩। আদর্শ পরিমিত চলকের বিন্যাসের সংজ্ঞা লিখুন। পরিমিত বিন্যাসের ধর্মগুলি লিখুন।

৪। কোন কোন শর্ত সাপেক্ষে দ্বিপদী বিন্যাস পরিমিত বিন্যাসে রূপ নেয়। একটি পরিমিত রেখার $\bar{x}=২০$, এবং $\sigma=১০$। চলকের মান ১০ এবং ৪৫ এর মধ্যে থাকার সম্ভাবনা বের করুন।

৫। পরিমিত বিন্যাসের সম্পর্কে লিখুন। একটি নিরপেক্ষ মুদ্র ২০০ বার নিক্ষেপ করলে প্রাপ্ত হেড এর সংখ্যা ক) ৮০টি বা অধিক খ) ৮০টি হতে ১২০টি হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা:

৫.১: ১। খ ২। গ ৩। ঘ ৪। গসিয়ান ৫। $n!=\sqrt{২\pi}\, e^{-n} n^{n+\frac{১}{২}}$ ৬। সত্য ৭। সত্য।

৫.২: ১। ক ২। মিথ্যা ৩। সত্য ৪। মিথ্যা ৫। f (x; ০,১) ৬। ১ ৭। গ ৮। ক ৯। খ

৫.৩: ১। খ ২। খ ৩। মিথ্যা ৪। সত্য ৫। সত্য ৬। অবিচ্ছিন্ন চলকের ৭। ৪/৫ অংশ ৮। ১

৫.৪: ১। ক ২। সত্য ৩। মিথ্যা ৪। সুষম বিন্যাস ৪। বহুল প্রচলিত।