ইউনিট ৮

বিন্যাস, সমাবেশ, নির্ণায়ক ও ম্যাট্রিক্স
(Permutation, Combination Determinant and Matrix)

ভূমিকাঃ

আমরা জানি বিন্যাস, সমাবেশ, নির্ণায়ক ও ম্যাট্রিক্স গণিত শাস্ত্রের গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। তথ্যসমূহের পরিসংখ্যানিক বিশ্লেষনের জন্যও এগুলো গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে থাকে। তথ্যসমূহের পরিসংখ্যানিক যাচাই ষ্ট্যাটিষ্টিক নির্ণয় করতে নির্ণায়ক ব্যাপক কাজে লাগে। সুতরাং এ ইউনিটে বিন্যাস, সমাবেশ, নির্ণায়ক ও ম্যাট্রিকস সম্পর্কে প্রাথমিক ধারণা দেওয়া হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এ ইউনিট শেষে আপনি বলতে পারবেন

- বিন্যাস
- সমাবেশ
- নির্ণায়ক
- ম্যাট্রিক্স

পাঠ-৮.১ বিন্যাস (Permutation)

ভূমিকা

এ পাঠে বিন্যাস সম্পর্কে আলোচনা করা হল

এ পাঠ শেষে আপনি -

- বিন্যাসের সংজ্ঞা বলতে পারবেন
- কিভাবে বিন্যাস গঠন করা যায় বলতে পারবেন
- বিন্যাসের সংজ্ঞা নির্ণয় করতে পারবেন
- বিন্যাস সম্পর্কিত কতিপয় সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

বিন্যাস ঃ কতকগুলো বস্তু থেকে কয়েকটি বা সবকটি বস্তু একবারে নিয়ে নির্দিষ্ট ক্রম অনুযায়ী যত প্রকারে সাজানো যায় তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি বিন্যাস বলে।

বিন্যাস সংখ্যা ঃ

i) মনেকরি, n সংখ্যক বস্তু আছে এবং এদের r সংখক ($r<n$) বস্তু একবার নিয়ে সাজাতে হবে।

এক্ষেত্রে n বস্তু থেকে r বস্তু নিয়ে সাজানোর সংখ্যা হবে-

n_{pr} = **Error!**

$= n(n-১)(n-২)$ .... $(n-r+১)$

ii) আবার n সংখ্যক বস্তু থেকে n সংখ্যক বস্তু একবার নিয়ে সাজানোর সংখ্যা হবে $n!$ এবং

$n! = n(n-১)(n-২)(n-৩)$ ৩.২.১

উদাহরণ-১:

x, y, z তিনটি অক্ষর থেকে ২টি করে অক্ষর নিয়ে পর পর সাজালে ৩_{p2}= ৬টি সংখ্যা পাওয়া যাবে এবং এগুলো হল ঃ xy, xz, yx, yz, zx, zy

আবার তিনটি করে নিয়ে সাজালে $৩! = ৩(৩-১) =$ ৬টি সংখ্যা পাওয়া যাবে এবং এগুলো হল - xyz, xzy, yxz, yzx, zxy, zyx

উপরের প্রাপ্ত প্রত্যেকটিকে বলা হয় এক একটি বিন্যাস।

উদাহরণ -২ ঃ

৫_{p3}, ৭_{p3}, ৫! এর মান নির্ণয় করুন ।

সমাধান ঃ

আমরা জানি, n_{pr} = **Error!**

$$\therefore \quad ৫_{p3} = \frac{5!}{3!} = ২০$$

$$৭_{p3} = \textbf{Error!} = \frac{7!}{4!}$$

$$= \frac{7\square6\square5\square4!}{4!} = ২১০$$

$$৫! = ৫\times৪\times৩\times২ = ১২০$$

iii) বস্তুগুলির পূনরাবৃত্তি ঘটতে পারে এসব ক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা ঃ

মনেকরি, n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু আছে এবং এদের মধ্যে থেকে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা হবে n^r যেখানে কোন বস্তু r সংখ্যকবার পূনরাবৃত্তি ঘটতে পারে।

প্রথম স্থানটি পূরণ করা যায় n প্রকারে দ্বিতীয় স্থানটি পূরন করা যায় n প্রকারে কেননা সবগুলো বস্তুই পূনরায় ব্যবহার করা যায়। সুতরাং $n \times n = n^২$ প্রকারে প্রথম ও দ্বিতীয় স্থান পূরণ করা যায়।

তৃতীয় স্থানটিও অনুরূপভাবে n সংখ্যক উপায়ে পূরন করা যায়। অতএব, ১ম, ২য় ও ৩য় স্থান $n^২ \times n = n^৩$ উপায়ে পূরণ করা যায়।

অতএব বলা যায় যে, r সংখ্যক স্থান n^rসংখ্যক উপায়ে পূরন করা যায়।

অর্থাৎ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= n^r$

উদাহরণ -৩ ঃ

২, ৩, ৪, ৫, ৬ এই অংকগুলির প্রত্যেকটিকে যে কোন সংখ্যকবার নিয়ে ৪ অংক বিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়।

সমাধান ঃ

এখানে একই বস্তুর অংক ৪ সংখ্যকবার পূনরাবৃত্তি ঘটতে পারে। সুতরাং ৫টি অংক থেকে প্রতিবারে ৪টি অংক নিয়ে বিন্যাসের সংখ্যা হবে, ৫^4= ৬২৫

সারসংক্ষেপ ঃ

বিন্যাস হল কতগুলো বস্তু থেকে কয়েকটি বা সবকয়টি বস্তু নিয়ে নির্দিষ্ট ক্রম অনুযায়ী যত প্রকার সাজান যায় সেই সংখ্যা।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন - ৮.১ ঃ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন:

১। ৪$_{p2}$-এর মান কত।

ক) ১০ খ) ১২

গ) ৪ ঘ) ২

২। ৬$_{p3}$এর মান কত?

ক) ৬ খ) ১২০

গ) ৩ ঘ) ১২

৩। ৫! এর মান কত?

ক) ১০০ খ) ১২০

গ) ৬০ ঘ) ২০

৪। বস্তুগুলির পূনরাবৃত্তি ঘটতে পারে এসব ক্ষেত্রে বিন্যাসের সংখ্যা কত?

ক) n^r খ) n!

গ) n_{pr} ঘ) কোনটিই নয়

সত্য/মিথ্যা ঃ

৫। n! = n(n-১) (n-২) ৩. ২. ১

শুণ্যস্থান পূরণ ঃ

৬। বস্তুগুলির পূনরাবৃত্তি ঘটতে পারে এ ক্ষেত্রে বিন্যাসের r সংখ্যক স্থান -------- সংখ্যক উপায়ে পূরন করা যায়।

৭। n সংখ্যক বস্তু থেকে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে সাজানো সংখ্যা n_{pr}= -------- ।

বাক্য মিলানো

৮। n_{P_r} ৯। n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস হতে পুনরাবৃত্তি ঘটিয়ে r সংখ্যক জিনিস	ক) নিয়ে গঠিত বিন্যাসের সংখ্যা n^r খ) $\frac{n!}{(n-r)!}$

পাঠ-৮.২ সমাবেশ (Combination)

ভূমিকা

এ পাঠে সমাবেশ সম্পর্কে আলোচনা করা হল।

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি -

- সমাবেশের সংজ্ঞা বলতে পারবেন
- সমাবেশ গঠন করার উপায় বলতে পারবেন
- সমাবেশ সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন

সমাবেশ (Combination)

কতগুলো ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যক বস্তু থেকে কয়েকটি বস্তু নিয়ে যে দল বা গ্রুপ গঠন করা হয় তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি সমাবেশ বলে।

ধরা যাক, a, b, c ৩ জন খেলোয়াড়। এর মধ্যে ২ জন করে খেলোয়াড় নিয়ে নিম্নলিখিত দল গঠন করা যায়।

ab, ac, bc

এদের প্রত্যেকটিকে বলা হয় এক একটি সমাবেশ।

n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু থেকে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশের সংখ্যা

$n_{cr}=$ **Error!**

প্রমাণঃ

n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু থেকে প্রত্যেকবার r সংখ্যক বস্তু নিলে সমাবেশ সংখ্যা হয় n_{cr}

এখন প্রত্যেক সমাবেশে বা দলে r সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু আছে এবং এদেরকে নিজেদের মধ্যে r! উপায়ে সাজানো যায়। অর্থাৎ প্রতিটি সমাবেশ থেকে r! সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায়।

অতএব, n_{cr} সংখ্যক সমাবেশ থেকে $n_{cr}\times r!$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায়।

সুতরাং $n_{cr}\times r! = n_{pr}=$ **Error!**

বা, $n_{cr} =$ **Error!**

(প্রমাণিত)

মন্তব্য ঃ

n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু থেকে সবগুলো

বস্তু নিয়ে সমাবেশের সংখ্যা

$n_{cn} = \frac{n!}{n!o!} =$ ১, (০! = ১)

উদাহরণ -১ ঃ

৬ বাহু বিশিষ্ট একটি সমতলিক ক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দুগুলির সংযোগ রেখা দ্বারা কতগুলো ত্রিভূজ গঠন করা যায় নির্ণয় করুন ।

সমাধান ঃ

সমতলিক ক্ষেত্রের সর্বমোট ৬টি কৌনিক বিন্দু আছে। ৩টি কৌনিক বিন্দু দ্বারা একটি ত্রিভুজ গঠন করা যায়।

$\therefore$ ত্রিভূজের সংখ্যা হবে ৬$_{c3}$= **Error!**

$$= \frac{6\square5\square4\square3!}{3!\square3!}$$

$$= \frac{6\square5\square4}{3\square2}$$

= ২০ টি

$\therefore$ নির্ণেয় ত্রিভূজের সংখ্যা ২০টি হবে।

উদাহারণ-২ ঃ

CAMBRIDGE শব্দটির বর্ণগুলি থেকে ৫টি বর্ণ নিয়ে সমাবেশের সংখ্যা বের করুন।

সমাধান ঃ

CAMBRIDGE শব্দটিতে মোট ৯টি বর্ণ আছে। ৫টি বর্ণ নিয়ে গঠিত সমাবেশের সংখ্যা

৯$_{c5}$ = **Error!**

$$= \frac{9\square8\square7\square6\square5!}{5!\square4!}$$

$$= \frac{9\square8\square7\square6}{4\square3\square2}$$ = ১২৬ টি

$\therefore$ নির্ণেয় সমাবেশের সংখ্যা ১২৬টি ।

উদাহরণ -৩ ঃ

৬জন খেলোয়াড় থেকে ২জন করে ৩টি দল গঠন করতে হবে। কত প্রকারে এই দল গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ

৬জন খেলোয়াড় থেকে ২জন করে ১ম দল

৬$_{c2}$ = **Error!** = ১৫ উপায়ে গঠন করা যায়।

২য় দল বাকী (৬-২) = ৪ জন খেলোয়াড় থেকে ২জন করে।

৪$_{c2}$ = **Error!** = ৬ উপায়ে গঠন করা যায়।

৩য় দল অবশিষ্ট (৪-২) = ২ জন খেলোয়াড় থেকে ২জন করে।

২$_{c2}$ = **১** উপায়ে গঠন করা যায়।

$\therefore$ ৩টি দল গঠনের মোট উপায় = **১৫**×**৬**×**১** = **৯০**

নিজে করুন: UNIVERSITY শব্দটির বর্ণগুলি থেকে স্বরবর্ণগুলি নিয়ে সমাবেশের সংখ্যা নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ ঃ

n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু থেকে প্রত্যেকবার r সংখ্যক বস্তু নিলে সমাবেশ সংখ্যা হয় n_{cr}

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৮.২:

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন:

১। n_{cr}এর মান কত?

ক) **Error!** খ) **Error!**

গ) $\frac{n!}{r!}$ ঘ) কোনটিই নয়

২। n_{cn}এর মান কত?

ক) n খ) ১

গ) r ঘ) কোনটিই নয়।

৩। O! এর মান কত?

ক) ০ খ) ১

গ) n ঘ) কোনটিই নয়।

৪। ৪$_{c1}$এর মান কত?

ক) ৪ খ) ৪-১

গ) ১ ঘ) কোনটিই নয়।

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন:

৫। n_{c_r} সংখ্যক সমাবেশ থেকে $n_{P_r} \times r!$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায়।

শুণ্যস্থান পূরণঃ

৬। $n_{c_r} \times r! =$ --------------- ।

৭। n সংখ্যক বস্তু নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা $n_{c_r} =$ -------------- ।

বাক্য মিলানো:

৮। n_{C_r}	ক) n_{P_r}
৯। $n_{c_r} \times r!$	খ) $n!/r!(n-r)!$

পাঠ-৮.৩ নির্ণায়ক (Determinant)

ভূমিকা

এ পাঠে নির্ণায়ক সম্পর্কে আলোচনা করা হল।

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি -

- নির্ণায়কের সংজ্ঞা বলতে পারবেন
- নির্ণয়াকের সারি এবং কলাম সম্পর্কে বলতে পারবেন
- নির্ণায়ক নির্ণয় করতে পারবেন।

নির্ণায়কের সংজ্ঞা

বিশেষ আকারে লিখিত নির্দিষ্ট এক প্রকারের রাশিকে নির্ণায়ক বলে।

মনে করি,

$a_1 x + b_1 =$ ০ .... (i)

এবং $a_2 x + b_2 =$ ০ ....(ii)

এখন সমীকরণ (i) থেকে পাওয়া যায় $x = -\frac{b_1}{a_1}$

এই x এর মান সমীকরণ (ii)-এ বসায়ে পাওয়া যায় $a_2\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)+b_2 = 0$

অর্থাৎ $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ....(iii)

সমীকরণ (iii) এর শর্ত সাপেক্ষে x এর একই মান দ্বারা সমীকরণ (i) এবং (ii) উভয়ই সিদ্ধ হয়।

সমীকরণ (iii) এর বাম পক্ষের রাশি $a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ কে নির্ণায়ক বলে।

a_1, b_1, a_2, b_2 কে নির্ণায়কের উপাদান বলা হয়। উপাদানগুলির অনুভূমিক বিন্যাসকে সারি এবং লম্ব বিন্যাসকে কলাম বলা হয়। নির্ণায়কে সারি ও কলামের সংখ্যা সমান থাকে এবং এ সংখ্যা হল নির্ণায়কের মাত্রা।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়কে ২টি সারি ও ২টি কলাম আছে। সুতরাং এটা একটি দ্বিমাত্রিক নির্ণায়ক।

ত্রিমাত্রিক নির্ণায়ক নিম্নরূপ ঃ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়কের মান নির্ণয় ঃ

একটি ত্রিমাত্রিক নির্ণায়কের মান নিম্নলিখিত উপায়ে পাওয়া যায়।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2$$

$= (a_{১}b_{২}c_{৩} + a_{২}b_{৩}c_{১} + a_{৩}b_{১}c_{২}) - (a_{১}b_{৩}c_{২} + a_{২}b_{১}c_{৩} + a_{৩}b_{২}c_{১})$

পদ্ধতি ঃ

i) ১ম সারির উপাদান ৩টি দিয়ে যথাক্রমে তিনটি দ্বিতীয় মাত্রার নির্ণায়কে গুন করা হয়েছে এবং এ গুনগুলোর আগে পর্যায়ক্রমে যোগ ও বিয়োগ চিহ্ন দেয়া হয়েছে।

ii) ১ম সারির নির্দিষ্ট উপাদানগুলি যে সারি ও কলামে অবস্থিত, ঐ সারি ও কলাম মূল নির্ণায়ক থেকে বাদ দিয়ে দ্বিতীয় মাত্রার নির্ণায়ক গঠিত হয়েছে।

iii) দ্বিতীয় মাত্রার নির্ণায়ককে ভাঙ্গানো বা বিস্তৃতি করা হয়েছে।

iv) বীজগণিতীয় সমষ্টির মাধ্যমে নির্ণায়ক মুক্ত করে নির্ণায়কের মান নির্ণয় করা হয়েছে। উপরের পদ্ধতি পূন:পূনঃ প্রয়োগ করে যে কোন নির্ণায়কের মান পাওয়া যায়।

উদাহরণ -১ ঃ

নিম্নের নির্ণায়কের মান নির্ণয় করুন ।

i) $\begin{vmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}$ ii) $\begin{vmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{vmatrix}$ iii) $\begin{vmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \\ -3 \end{vmatrix}$

সমাধান ঃ

i) $\begin{vmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}$ = ২৪-১২ =১২

ii) $\begin{vmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{vmatrix}$ = ৮-০ =৮

iii) $\begin{vmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \\ -3 \end{vmatrix}$ = -১৮+১৫ = -৩

উদাহরণ -২ ঃ

নিম্নের নির্ণায়কের মান নির্ণয় করুন ।

2
|1|
|2|
|5|
|3|
|4|
|8|
|6|
|7|

সমাধান ঃ

2
|1|
|2|
|5|
|3|
|4| |3| |5| |5|
|8| |4| |4| |3|
|6| |6| |8| |8|
|7|= ২|7|-১|7|+ ২|6|

= ২(২১-২৪) -১(৩৫-৩২) +২(৩০-২৪)

= -৬ -৩ +১২

=৩

নিজে করুন:

নিম্নের নির্ণায়কের মান নির্ণয় করুন ।

5
|7|
|9|
|4|
|6|
|8|
|3|
|2|
|10|এর মান নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ ঃ

বিশেষ আকারে লিখিত নির্দিষ্ট এক প্রকারের রাশিকে নির্ণায়ক বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৮.৩

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নঃ

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন

১। কোনটি নির্ণায়ক ?

ক) $\begin{pmatrix} a1 \\ b1 \\ a2 \\ b2 \end{pmatrix}$ খ) $\begin{vmatrix} a1 \\ b1 \\ a2 \\ b2 \end{vmatrix}$

গ) $\begin{bmatrix} a1 \\ b1 \\ a2 \\ b2 \end{bmatrix}$ ঘ) কোনটিই নয়।

২। নির্ণায়কের মাত্রা কার সমান?

ক) সারি বা কলাম সংখ্যা খ) উপাদানের সংখ্যা

গ) নির্ণায়কের মান ঘ) কোনটিই নয়

৩। $\begin{vmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}$এর মান কত?

ক) ৫খ) ১৪

গ) -১৪ ঘ) ২০

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় ঃ

৪। $a_1, a_2, b_1, b_2,$ কে নির্ণায়কের উপাদান বলে

৫। $a_১= \begin{vmatrix} a_১ & b_১ \\ a_২ & b_২ \end{vmatrix}$ কে মেট্রিক্স বলে।

৬। কোন নির্ণায়কে ২টি সারি ও ২ কলাম থাকলে তাকে দ্বিমাত্রিক নির্ণায়ক বলে।

শুণ্যস্থান পূরণ ঃ

৭। $a_1,\ b_2 - a_2, b_1 = \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{vmatrix}$কে ---------- ।

৮। নির্ণায়কের উপাদানগুলির অনুভূমিক বিন্যাসকে ----------------- ।

বাক্য মিলানো ঃ

৯। নির্ণায়কে সারি ও কলামের সংখ্যা	ক) ২টি সারি ও ২টি কলাম আছে। সুতরাং এটা একটি দ্বিমাত্রিক নির্ণায়ক।
১০। $\begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের	খ) সমান থাকে এবং এ সংখ্যা হল নির্ণায়কের মাত্রা।

পাঠ-৮.৪ নির্ণায়কের বিভিন্ন গুনাবলীসহ প্রমাণ

ভূমিকাঃ

এ পাঠে নির্ণায়কের বিভিন্ন গুণাবলী প্রমাণ করা হল।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি -

- নির্ণায়কের বিভিন্ন গুণাবলী বলতে পারবেন
- নির্ণায়কের গুণাবলী প্রমাণ করতে পারবেন

গুণাবলী -১ ঃ

কোন নির্ণায়কের সারি এবং কলামসমূহ পরস্পর স্থান পরিবর্তন করলে নির্ণায়কের মান পরিবর্তন না হয়ে একই থাকে।

প্রমাণ ঃ

মনে করি, $B = \begin{vmatrix} a1 \\ b1 \\ a2 \\ b2 \end{vmatrix}$

সারি বা কলাম পরিবর্তন করে নির্ণায়ক হয় $B' = \begin{vmatrix} a1 \\ a2 \\ b1 \\ b2 \end{vmatrix}$

এখন, $B = a_1b_2 - a_2b_1$

আবার $B' = a_1b_2 - a_2b_1$

অতএব, $B = B'$

অনুরূপভাবে ত্রিমাত্রিক নির্ণায়কের ক্ষেত্রেও সারি এবং কলামসমূহ পরস্পর স্থান পরিবর্তন করে দেখান যায় যে, $B = B'$ (প্রমাণিত)।

গুণাবলী - ২ ঃ

কোন নির্ণায়কের দুটি কলাম বা সারি ঠিক একরকম হলে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

প্রমাণ ঃ

মনে করি, $B = \begin{vmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \\ a1 \\ a2 \\ a3 \\ b1 \\ b2 \\ b3 \end{vmatrix}$

নির্ণায়ক দুটি সারি ঠিক একরকম

প্রমাণ করতে হবে যে, B = ০

এখন নির্ণায়কটির মান -

$B= a_{১}(a_{২}b_{৩} - a_{৩}b_{২}) - a_{২}(a_{১}b_{৩} - a_{৩}b_{১}) + a_{৩}(a_{১}b_{২} - a_{২}b_{১})$

$= a_{১}a_{২}b_{৩} - a_{১}a_{৩}b_{২} - a_{১}a_{২}b_{৩} + a_{২}a_{৩}b_{১} + a_{১}a_{৩}b_{২} - a_{২}a_{৩}b_{১}$

= ০ (প্রমাণিত)

গুণাবলী ঃ ৩

যদি কোন নির্ণায়কের দুইটি পাশাপাশি সারি বা কলাম পরস্পর স্থান পরিবর্তন করে তবে নির্ণায়কের চিহ্ন পরিবর্তন হয় কিন্তু মান একই থাকে।

প্রমাণ ঃ

মনে করি, প্রদত্ত নির্ণায়ক $B = \begin{vmatrix} a1 \\ b1 \\ a2 \\ b2 \end{vmatrix}$

প্রদত্ত নির্ণায়কটি ১ম ও ২য় সারির স্থান পরিবর্তন করে হয়

$B' = \begin{vmatrix} a2 \\ b2 \\ a1 \\ b1 \end{vmatrix}$

দেখাতে হবে যে, B' = -B

এখন $B' = a_{২}b_{১} - a_{১}b_{২}$

$= -(a_{১}b_{২} - a_{২}b_{১})$

$= -B$

ত্রিমাত্রিক নির্ণায়ক

$$B = \begin{vmatrix} a1 \\ b1 \\ c1 \\ a2 \\ b2 \\ c2 \\ a3 \\ b3 \\ c3 \end{vmatrix}$$

প্রথম ও দ্বিতীয় সারির স্থান পরিবর্তন করে হয়

$$B' = \begin{vmatrix} a2 \\ b2 \\ c2 \\ a1 \\ b1 \\ c1 \\ a3 \\ b3 \\ c3 \end{vmatrix}$$

এক্ষেত্রেও দেখানো যায় যে,

$B' = -B$

গুণাবলী - ৪ ঃ

যদি কোন নির্ণায়কের কোন সারি বা কলামের প্রত্যেকটি উপাদানকে একই সংখ্যা দ্বারা গুন করা হয় তবে ঐ নির্ণায়কের মানকেও একই সংখ্যা দ্বারা গুন করতে হবে।

প্রমাণ ঃ

মনে করি একটি দ্বিমাত্রিক নির্ণায়ক $B = \begin{vmatrix} a1 \\ a2 \\ b1 \\ b2 \end{vmatrix}$

প্রদত্ত নির্ণায়কটি ১ম সারির প্রত্যেকটি উপাদানকে k দ্বারা গুন করলে হয়

$$\begin{vmatrix} ka1 \\ ka2 \\ b1 \\ b2 \end{vmatrix} = B'$$

দেখাতে হবে যে, $B' = kB$

এখন $B' = ka_{১}b_{২} - ka_{২}b_{১}$

$$= k(a_১b_২ - a_২b_১)$$

$$=kB$$

$\therefore\ B' = kB$

অনুরূপভাবে ত্রিমাত্রিক নির্ণায়কের ক্ষেত্রেও প্রমাণ করা যায়।

$B' = kB$

সারসংক্ষেপ ঃ

কোন নির্ণায়কের সারি ও কলামসমূহ পর□র স্থান পরিবর্তন করলে নির্ণায়কের মান পরিবর্তন হয় না।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৮.৪:

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন:

১। কোন নির্ণায়কের সারি এবং কলামসমূহ পরস্পর স্থান পরিবর্তন করলে নির্ণায়কটির মান কেমন হবে?

ক) মান পরিবর্তন হয়   খ) মান একই থাকে

গ) মান ঋনাত্মক হয়   ঘ) মান ধনাত্মক হয়

২। কোন নির্ণায়কে দুটি কলাম অথবা সারি একরকম হলে এর মান কত হবে।

ক) শূন্য   খ) ঋনাত্মক

গ) ধনাত্মক   ঘ) কোনটিই নয়।

৩। ৩ $\begin{vmatrix}4\\1\\2\\3\end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান কত ?

ক) ১৭   খ) ৩০

গ) ১২   ঘ) কোনটিই নয়

৪। B $\begin{vmatrix}a1\\a2\\b1\\b2\end{vmatrix}$ এবং $B' = \begin{vmatrix}a2\\b2\\a1\\b1\end{vmatrix}$ হলে কোনটি সত্য?

ক) $B' = B$ খ) $B' = -B$

গ) $B' = ০$ ঘ) কোনটিই নয়

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় ঃ

৫। কোন নির্ণায়কের সারি ও কলামসমূহ পরিবর্তন করলে নির্ণায়কটির মান পরিবর্তন হয়।

শুণ্যস্থান পূরণ ঃ

৬। কোন নির্ণায়কের ------------ বা -------- ঠিক এক রকম হলে নির্ণায়কের মান ---------------- হবে।

বাক্য মিলানো ঃ

৭। কোন নির্ণায়কের দুটি পাশাপাশি সারি ও কলাম পরস্পর স্থান পরিবর্তন করলে	ক) গুন করলে ঐ নির্ণায়কের মানকেও একই সংখ্যা দ্বারা গুন করতে হবে।
৮। নির্ণায়কের কোন সারি বা কলামের প্রত্যেকটি উপাদানকে একই সংখ্যা দ্বারা	খ) নির্ণায়কের চিহ্ন পরিবর্তন হয় কিন্তু মানের পরিবর্তন হয় না।

পাঠ-৮.৫ ম্যাট্রিক্স (Matrix)

ভূমিকা:

এ পাঠে ম্যাট্রিক্স সম্পর্কে আলোচনা করা হল।

এই পাঠ শেষে আপনি -

- ম্যাট্রিক্স সম্পর্কে বলতে পারবেন
- ম্যাট্রিক্সের অর্ডার সম্বন্ধে লিখতে পারবেন
- ম্যাট্রিক্সের সমতা সম্পর্কে বলতে পারবেন

ম্যাট্রিক্সের ধারণা ঃ

পূর্বের পাঠে আমরা নির্ণায়ক সম্পর্কে ধারণা করেছি। একটি দ্বিমাত্রিক নির্ণায়ক নিম্নরূপ-

$$\begin{vmatrix} a1 \\ b1 \\ a2 \\ b2 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়কের অনুরূপ সমীকরনের ধ্রুবকগুলোকে (a_1, a_2, b_1, b_2) সারি ও কলাম আকারে সাজালে যে আয়তাকার বিন্যাস পাওয়া যায় তাকে ম্যাট্রিক্স বলে। ধ্রুবগুলোর অনুভূমিক এবং উলম্ব বিন্যাসকে যথাক্রমে সারি ও কলাম বলা হয়। ম্যাট্রিক্স বোঝাতে দুইটি তৃতীয় বন্ধনী [ ] বা দুইটি প্রথম বন্ধনী ( ) ব্যবহার করা হয়।

যেমন - $\begin{pmatrix} a1 \\ b1 \\ a2 \\ b2 \end{pmatrix}$ এব ং $\begin{bmatrix} a1 \\ b1 \\ a2 \\ b2 \end{bmatrix}$ দুইটি ম্যাট্রিক্স।

ম্যাট্রিক্স গঠনকারী সংখ্যা $a_১$, $a_২$, $b_১$, $b_২$ ইত্যাদিকে ম্যাট্রিক্সের উপাদান বলা হয়।

ম্যাট্রিক্সের সারি বা কলামের সংখ্যার উপর ভিত্তি করে ম্যাট্রিক্সের অর্ডার বা মাত্রা নির্ণয় করা হয়। সাধারণতঃ সারি বা কলাম নির্দেশ করার জন্য প্রত্যেক উপাদানে দুটি Subscript ব্যবহৃত হয় । যেমন :- $\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{14} \\ b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \\ b_{24} \\ b_{31} \\ b_{32} \\ b_{33} \\ b_{34} \end{bmatrix}_{3\square 4}$

এবং এর সারি সংখ্যা ৩ এবং কলামের সংখ্যা ৪। অতএব উক্ত ম্যাট্রিক্সেকে ৩*৪ মাত্রার ম্যাট্রিক্স বলা হয়। একটি ম্যাট্রিক্সের p সংখ্যক সারি ও q সংখ্যক কলাম হলে উক্ত ম্যাট্রিক্সকে p*q ম্যাট্রিক্স বলে। যদি $p = q$ হয় তবে ম্যাট্রিক্সটি বর্গ ম্যাট্রিক্স আবার $p \neq q$ হলে ম্যাট্রিক্সটি আয়তাকার ম্যাট্রিক্স । নিম্নে কতগুলি ম্যাট্রিক্সের উদাহরণ দেয়া হল।

i) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}_{2\square 3}$ একটি ২×৩ ম্যাট্রিক্স

ii) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ একটি ৩×৩ বর্গ ম্যাট্রিক্স

iii) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}_{3 \times 2}$ একটি ৩×২ ম্যাট্রিক্স

পূর্বেই বলা হয়েছে বিভিন্ন সমীকরণকে ম্যাট্রিক্স আকারে লেখা যায়। যেমন : ৩x + ৫y = ০ এবং ৫x + ৭y = ০ সমীকরণের নিম্নরূপ ম্যাট্রিক্স আকারে লেখা যায়।

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ০$$

ম্যাট্রিক্সের সমতা ঃ

যদি দুইটি ম্যাট্রিক্সের মাত্রা সমান হয় এবং একটির উপাদানের মান অন্যটির অনুরূপ উপাদানের মানের সমান হয় তবে ম্যাট্রিক্স দুটি সমান হবে।

যেমন :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

যখন $a_{১১} = b_{১১}$ $a_{১২} = b_{১২}$ $a_{১৩} = b_{১৩}$

$a_{২১} = b_{২১}$ $a_{২২} = b_{২২}$ $a_{২৩} = b_{২৩}$

সারসংক্ষেপ ঃ

কোন সমীকরণের ধ্রুবক গুলোকে সারি ও কলাম আকারে সাজালে যে আয়তাকার বিন্যাস পাওয়া যায় তাকে ম্যাট্রিক্স বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন - ৮.৫

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন:

১। ম্যাট্রিক্স বোঝাতে কোনটি ব্যবহৃত হয় ?

ক) | | খ) [ ]

গ) ( ]   ঘ) [ )

২। ম্যাট্রিক্সের মাত্রা কিসের উপর নির্ভর করে ?

ক) সারি ও কলাম   খ) শুধু সারি

গ) শুধু কলাম   ঘ) কোনটিই নয়

৩। একটি ম্যাট্রিক্সকে কখন বর্গ ম্যাট্রিক্স বলা হয় ?

ক) $p = q$ খ) $p \neq q$

গ) $p > q$ ঘ) $p < q$

৪। $\begin{matrix} 2 \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{matrix}$ ম্যাট্রিক্সটি কত মাত্রার ?

ক) ৩ × ২   খ) ২ × ৩

গ) ৩ × ৩   ঘ) কোনটিই নয়।

সত্য/মিথ্যা নির্ণয়ঃ

৫। ম্যাট্রিক্স বোঝাতে দুটি তৃতীয় বন্ধনী বা দুটি প্রথম বন্ধনী ব্যবহার করা হয়।

৬। ম্যাট্রিক্সের সারি বা কলামের সংখ্যার উপর ভিত্তি করে ম্যাট্রিক্সের মাত্রা নির্ণয় করা হয়।

শুণ্যস্থান পূরণঃ

৭। ম্যাট্রিক্সের সারি বা কলাম নির্দেশ করার জন্য প্রত্যেক উপাদানে দুটি --------- ব্যবহার করা হয়।

৮। কোন ম্যাট্রিক্সের তিনটি সারি ও ৪টি কলাম থাকলে উক্ত ম্যাট্রিক্সের মাত্রা --- ।

বাক্য মিলানো ঃ

৯। কোন ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম যদি সমান হয় তবে	ক) উপাদানের মানের সমান হয় তবে ম্যাট্রিক্স দুটি সমান ম্যাট্রিক্স হবে।
১০। যদি দুইটি ম্যাট্রিক্সের মাত্রা সমান ও একটির উপাদানের মান অন্যটির	খ) উক্ত ম্যাট্রিক্স কে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলা হবে।

পাঠ-৮.৬ ম্যাট্রিক্সের বিভিন্ন সূত্র ও তার প্রমাণ

ভূমিকা:

এ পাঠে ম্যাট্রিক্সের সূত্রাবলী আলোচনা করা হল।

এই পাঠ শেষে আপনি -

- ম্যাট্রিক্সের যোগ সূত্র বলতে পারবেন
- ম্যাট্রিক্সের গুণন সূত্র বলতে পারবেন
- উদাহরণের মাধ্যমে ম্যাট্রিক্সের যোগ সূত্র ও গুণন সূত্র ব্যবহার করতে পারবেন।

ম্যাট্রিক্সের যোগ সূত্র ঃ

দুটি ম্যাট্রিক্সের মাত্রা একই হলে ম্যাট্রিক্স দুটি যোগ করা যায় এবং যোগফলজনিত ম্যাট্রিক্স একই মাত্রার হয়। অর্থাৎ যদি A ও B উভয় ম্যাট্রিক্সই $p \times q$ মাত্রার হয় তবে (A+B) ম্যাট্রিক্স ও $p \times q$ মাত্রার হবে।

নিয়ম ঃ দুটি ম্যাট্রিক্স যোগ করতে হলে **১**ম-টির প্রত্যেক উপাদানের সাথে ২য়-টির অনুরূপ উপাদান যোগ করতে হবে।

যদি - $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} 2\square3$

এবং $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \end{pmatrix} 2\square3$

তবে $A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} \\ a_{12}+b_{12} \\ a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} \\ a_{22}+b_{22} \\ a_{23}+b_{23} \end{pmatrix} 2\square3$

এখানে A, B ম্যাট্রিক্স এবং (A+B) হল ২ × ৩ ম্যাট্রিক্স।

উদাহরণ - **১** ঃ

$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ হলে A+B নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+4 \\ -4+0 \\ 2+\ -2 \\ 2+4 \\ 5+2 \\ -3+\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \\ 6 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} 2\square 3$$

ম্যাট্রিক্সের গুণসূত্র ঃ

A এবং B দুটি ম্যাট্রিক্সের গুণফল তখনই নির্ণয় করা যায় যখন A ম্যাট্রিক্সের কলামের সংখ্যা B ম্যাট্রিক্সের সারির সমান হয়।

অর্থাৎ $A_{p\square r} \times\ B_{r\square q} = (AB)_{p\square q}$

কিন্তু $AB \neq BA$

মনে করি $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} 2\square 3$

এবং $B \begin{pmatrix} b_{১১}\ b_{১২} \\ b_{২১}\ b_{২২} \\ b_{৩১}\ b_{৩২} \end{pmatrix}_{৩\times২}$

এখানে A ম্যাট্রিক্সের কলামের সংখ্যা ৩ এবং B ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যা ৩। A ও B ম্যাট্রিক্সের গুনফল নিম্নলিখিত উপায়ে পাওয়া যায়।

i) A ম্যাট্রিক্সের ১ম সারির প্রত্যেকটি উপাদানকে B ম্যাট্রিক্সের ১ম কলামের অনুরূপ প্রত্যেকটি উপাদান দিয়ে গুন করতে হবে এবং এ গুনফলের সমষ্টি হল AB ম্যাট্রিক্সের ১ম সারির ১ম উপাদান। একই ভাবে A ম্যাট্রিক্সের ১ম সারির প্রত্যেকটি উপাদানকে B ম্যাট্রিক্সের ২য় কলামের অনুরূপ প্রত্যেকটি উপাদান দিয়ে গুন করে এগুলোর সমষ্টি হল AB ম্যাট্রিক্সের ১ম সারির দ্বিতীয় উপাদান। এভাবে অগ্রসর হয়েই AB এর ১ম সারির সব উপাদান পাওয়া যাবে।

ii) উপরের প্রক্রিয়ায় AB এর সমস্ত সারি নির্ণয় করা যাবে।

সুতরাং

AB =

$$\begin{pmatrix} a_{11}\square b_{11} + a_{12}\square b_{21} + a_{13}\square b_{31} & a_{11}\square b_{12} + a_{12}\square b_{22} + a_{13}\square b_{32} \\ a_{21}\square b_{11} + a_{22}\square b_{21} + a_{23}\square b_{31} & a_{21}\square b_{12} + a_{22}\square b_{22} + a_{23}\square b_{32} \end{pmatrix}$$

উদাহরণ -২ ঃ

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ হলে AB কত?

প্রমাণ করুন যে, $AB \neq BA$

সমাধান ঃ-

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

= **Error!**

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} 2\square 2$$

আবার $BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1+6 \\ -1+6 \\ 0-3 \\ 3-4 \\ -3-4 \\ 0+2 \\ 2+2 \\ -2+2 \\ 0-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \\ -7 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\neq AB$ (প্রমাণিত)

নিজে করুন: $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \\ 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ হলে i) $A \times B$ এর মান নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপঃ

দুটি ম্যাট্রিক্সের মাত্রা একই হলে উহাদের যোগ করা যায় এবং যোগ জনিত ম্যাট্রিক্স একই মাত্রার হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.৬:

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন:

১। কখন দুইটি ম্যাট্রিক্স যোগ করা যায়?

ক) ২টি ম্যাট্রিক্সের মাত্রা সমান হলে খ) ২টি ম্যাট্রিক্সের মাত্রা অসমান হলে

গ) কোন মাত্রা না থাকলে ঘ) কোনটিই নয়

২। ম্যাট্রিক্স A এবং B কখন গুন করা যায়?

ক) A এর কলামের সংখ্যা B এর সারির সংখ্যা সমান হলে

খ) A এর কলামের সংখ্যা B এর কলামের সংখ্যা সমান হলে

গ) A এর সারির সংখ্যা B এর সারির সংখ্যা সমান হলে

ঘ) কোনটিই নয়।

৩। $A=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ হলে A+B = কত?

ক) $\begin{pmatrix}4\\4\\3\\4\end{pmatrix}$ খ) $\begin{pmatrix}4\\4\\2\\4\end{pmatrix}$

গ) $\begin{pmatrix}2\\2\\2\\1\end{pmatrix}$ ঘ) কোনটিই নয়

সত্য/মিথ্যা নির্ণয়ঃ

৪। যদি A ও B উভয়ই ম্যাট্রিক্সের মাত্রা $p\times q$ হয় তবে (A+B) ম্যাট্রিক্সের মাত্রা ও $p\times q$ হবে।

৫। দুটি ম্যাট্রিক্সের যোগ করতে হলে ১মটির প্রত্যেক উপাদানের সাথে ২য়টির অনুরূপ উপাদানের যোগ করার দরকার নেই।

শুণ্যস্থান পূরণ ঃ

৬। $A_{p\square r}\times B_{r\square q}$ = -------------------

৭। $A_{p\square q}\times B_{p\square p}$ = ------------------

বাক্য মিলানো ঃ

৮। A ও B এর গুনফল তখনই নির্নয় করা যায় যখন	ক) = $(A+B)_{2\square 3}$
৯। $A_{2\square 3}$, $B_{2\square 3}$ এর যোগফল	খ) A ম্যাট্রিক্সের কলামের সংখ্যা B ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যার সমান।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন-৮

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্নাবলী

১। বিন্যাস, সমাবেশ, নির্ণায়ক ও ম্যাট্রিক্সের উদাহরণসহ সংজ্ঞা দিন।

২। ৮$_{p}2$, ৭$_{p}5$, ৭! এর মান নির্ণয় করুন।

৩। ৩,৪,৫,৬,৭,৮,৯ এই অংকগুলির প্রত্যেকটিকে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র নিয়ে ৩ অংকের কতগুলি পৃথক সংখ্যা গঠন করা যাবে ?

৪। ৩,৪,৫,৬,৭,৮,৯ এই অংকগুলির প্রত্যেকটিকে যে কোন সংখ্যক বার নিয়ে নিয়ে ৩ অংক বিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাবে ?

৫। একটি শেলফে ২০টি বই আছে। ৫টি করে বই নিয়ে এদেরকে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে ?

৬। ৪$_{c4}$+ ৫$_{c1}$+ ১০$_{c3}$এর মান কত ?

৭। ১০ বাহু বিশিষ্ট একটি সমতলিক ক্ষেত্রের কৌনিক বিন্দুর সংযোগ রেখা দিয়ে কতগুলি ত্রিভূজ আকা যেতে পারে।

৮। AMERICA শব্দটির বর্ণগুলি থেকে প্রত্যেকবার ৩টি বর্ণ নিয়ে কতগুলি শব্দ গঠন করা যায় ?

৯। নিম্নলিখিত নির্ণায়ক সমূহের মান নির্ণয় করুন ?

ক) $\begin{matrix}12\\ \begin{vmatrix}4\\7\\8\\3\\9\\7\\3\\10\end{vmatrix}\end{matrix}$ খ) $\begin{matrix}8\\ \begin{vmatrix}4\\3\\2\\3\\5\\5\\3\\7\end{vmatrix}\end{matrix}$

১০। প্রমাণ করুন যে, $\begin{matrix}1\\ \begin{vmatrix}1\\1\\1\\p\\p^2\\1\\p^2\\p^4\end{vmatrix}\end{matrix}$ = p(p-১) (p^{২}-১)

১১। A = $\begin{matrix}3\\ \begin{pmatrix}5\\8\\6\\3\\2\\1\\-2\\3\end{pmatrix}\end{matrix}$, B = $\begin{matrix}3\\ \begin{pmatrix}-2\\1\\2\\7\\3\\5\\0\\2\end{pmatrix}\end{matrix}$ হলে (২A+B) ম্যাট্রিক্স কত হবে?

১২। A = $\begin{matrix}1\\ \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\end{matrix}$, B = $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ হলে AB কত হবে?

১৩। $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ হলে AB কত ?

প্রমাণ করুন $AB \neq BA$

উত্তরমালাঃ

৮.১ঃ ১। খ ২। খ ৩। খ ৪। ক ৫। সত্য ৬। n^r ৭। ৮। $\dfrac{n!}{(n-r)!}$ খ ৯। ক

৮.২ঃ ১। খ ২। খ ৩। খ ৪। ক ৫। মিথ্যা ৬। n_{p_r} ৭। $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ ৮। খ ৯। ক

৮.৩ঃ ১। খ ২। ক ৩। খ ৪। সত্য ৫। মিথ্যা ৬। সত্য ৭। নির্ণায়ক ৮। সারি ৯। খ ১০। ক

৮.৪ঃ ১। খ ২। ক ৩। খ ৪। খ ৫। মিথ্যা ৬। সারি, কলাম, শুন্য ৭। খ ৮। খ

৮.৫ঃ ১। খ ২। ক ৩। ক ৪। খ ৫। সত্য ৬। সত্য ৭। প্রথম বা তৃতীয় বন্ধনী ৮। ৩×৪ ৯। খ ১০। ক

৮.৬ঃ ১। ক ২। ক ৩। খ ৪। সত্য ৫। মিথ্যা ৬। $AB_{p\times q}$ ৭। $AB_{p\times p}$ ৮। খ ৯। ক