ইউনিট ৯

প্রাক্কলন (ESTIMATION)

ভূমিকাঃ

প্রাক্কলন পরিসংখ্যান তত্ত্বের একটি গুরুত্ব পূর্ণ অধ্যায়। গবেষণার বিভিন্ন ক্ষেত্রে নমুনা নেওয়ার প্রয়োজন হয়। তথ্যবিশ্বে বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যের নমুনা অন্তর্ভূক্ত। তাই নমুনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনা তত্ত্বের উপর নির্ভর করে তথ্যবিশ্বের প্রকৃতি সম্বন্ধে ধারণা করা সহজ হয়। আবার অনেক সময় কোন গবেষক বা পরিসংখ্যানবিদ পরামান নির্ণয় সাপেক্ষ্যে তথ্যবিশ্বের ধারণা লাভ করেন। এ অধ্যায়ে কি ভাবে পরামান প্রাাক্কলন করা হয় যে সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এ ইউনিট পাঠ শেষে আপনি বলতে ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন

- প্রাক্কলন ও প্রাক্কলন পদ্ধতি
- প্রাক্কলনের ধর্ম ও প্রমাণ
- বিন্দু প্রাক্কলন
- সীমানা প্রাক্কলন
- বিভিন্ন সমস্যার সমাধান-

পাঠ-৯.১ প্রাক্কলন (Estimation)

ভূমিকাঃ

প্রাক্কলন পরিসংখ্যানতত্ত্বে প্রয়োজনীয় ও গুরুত্বপূর্ণ অংশ। নমুনার বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যের প্রকৃতি নির্ণয় করে তথ্যবিশ্বের বিভিন্ন পরামান প্রাক্কলন করা হয়। ফলে তথ্যবিশ্বের অনুরূপ বৈশিষ্ট্যগুলি নিরূপন করে তথ্যবিশ্বের একটি সুস্পষ্ট ধারণা দেওয়া সম্ভব হয়। এ পাঠে পরামান প্রাক্কলন পদ্ধতি আলোচনা করা হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন-

- প্রাক্কলন কি
- প্রাক্কলনের প্রকারভেদ
- প্রাক্কলন সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান

বিষয়বস্তু

প্রাক্কলন (Estimation)

আমরা জানি, নমুনা তথ্যবিশ্বের একটি অংশ মাত্র, সম্ভাবনা তত্ত্বের উপর নির্ভর করে তথ্যবিশ্বের প্রকৃতি সম্বন্ধে সুস্পষ্ট ধারণা পাওয়া সম্ভব। জানা নমুনা থেকে অজানা তথ্যবিশ্বের সম্বন্ধে ধারণা করতে যে বিজ্ঞান সম্মত তত্ত্ব গড়ে উঠেছে তাহাই অনুমান তত্ত্ব। প্রাক্কলন অনুমান তত্ত্বের একটি অংশ।

প্রাক্কলক (Estimator): তথ্যবিশ্বের এক বা একাধিক পরামান (Parameter) অজানা থাকতে পারে। নমুনার উপর নির্ভর করে এ সমস্ত অজানা পরামান নির্ণয় করা প্রয়োজন। যে পদ্ধতিতে এ সমস্ত পরামান নির্ণয় করা হয় তাকে প্রাক্কলক (Estimator) বলে।

প্রাক্কলক সাধারণত দৈব নমুনার একটা ফাংশন। বিভিন্ন নমুনা হতে এর প্রাক্কলিত মান পাওয়া যায়। দৈব নমুনার গড় ও ভেদাংকের মানকে যথাক্রমে $\bar{x}$ও s^2দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

প্রাক্কলিত মান (Estimate): প্রাক্কলকের একটি বিশেষ মানকে প্রাক্কলিত মান বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ আমরা বলতে পারি- গড় μ এর প্রাকক্লিত মানকে $\bar{x}$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। অনুরূপভাবে, ভেদাঙ্ক σ^2 এর প্রাক্কলিত মানকে s^2 দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ : নওয়াপাড়া শঙ্কর পাশা উচ্চ বিদ্যালয় বাংলাদেশ উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের একটি টিউটোরিয়াল কেন্দ্র। উক্ত কেন্দ্রের ১০ জন ছাত্র/ছাত্রীর বয়স ২৫, ২০, ১৮, ২৬, ৪২, ৩২, ৩০, ২৯, ৩১, ২৭। উহাদের গাণিতিক গড়-

$$\bar{x} = \frac{25 + 20 + 18 + 26 + 42 + 32 + 30 + 29 + 31 + 27}{10}$$

$$= \frac{280}{10}$$

= ২৮

মনে করি, উক্ত তথ্যবিশ্ব হতে ২৬, ৩২, ৩০, ২৭, ২০ দৈব ক্রমে চয়ন করা একটি নমুনা। তাই তথ্যবিশ্বের পরামান $\bar{x}$এর প্রাক্কলক হবে-

$$\bar{\bar{x}} = \frac{26 + 32 + 30 + 27 + 20}{5}$$

$$= \frac{135}{5}$$

= ২৭

এখানে গানিতিক গড় μ এর প্রাক্কলক $\bar{x}$=২৮ এবং প্রাক্কলিত মান $\bar{x}$= ২৭

নিজে করুন: তথ্যবিশ্ব [১১, ১২, ১৩, ১৪, ১৫, ১৬, ১৭, ১৮, ১৯, ২০] প্রাককলন(Estimation) থেকে ৪ আকার বিশিষ্ট নমুনার পরামান μ এর প্রাক্কলিত মান নির্ণয় করুন।

কোন তথ্যবিশ্বের উপাদানগুলির একটি বৈশিষ্ট্যকে দৈব চলক x দ্বারা প্রকাশ হলে উহার সম্ভাবনা ঘণত্ব ফাংশন $f(x;\theta)$ যেখানে θ পরামানটি অজানা ; যদি $x_1, x_2 ......, x_n$ দৈব নমুনা হয় তাহলে নমুনার n সংখ্যক মানের উপর ভিত্তি করে পরামান যে পদ্ধতিতে নির্ণয় করা হয় তাকে প্রাক্কলন বলে।

প্রাক্কলন দু'প্রকার

১। বিন্দু প্রাক্কলন (Point estimation)

২। অন্তর প্রাক্কলন (Interval estimation)

১। বিন্দু প্রাক্কলন (Point estimation): বিন্দু প্রাক্কলন পর্যবেক্ষিত নমুনার ফাংশনের একটি মানকে পরামান হিসাবে অনুমান করে নির্ণয় করার পদ্ধতি। ধরা যাক, θ একটি পরামান। এর প্রাক্কলনের জন্য যদি নমুনাঙ্ক T ব্যবহার করা হয়, তবে T কে বলা হয় θ এর প্রাক্কলক এবং কোন বিশেষ নমুনালব্ধ T এর মানকে বলা হবে প্রাক্কলিত মান।

২। অন্তর প্রাক্কলন (Interval estimation): তথ্যবিশ্বের কোন নমুনা থেকে প্রাপ্ত পরামান প্রাক্কলনের ক্ষেত্রে দুটি সীমা (Interval) নির্দিষ্ট করে উহার মধ্যে সম্ভাবনাসহ প্রয়োজনীয় পরামান ধারণ করাকে অন্তর প্রাক্কলন বলে। যে অন্তর একটি নির্দিষ্ট সম্ভাবনাসহ পরামানকে ধারণ করে তাকে আস্থা অন্তর বলে। এবং এ সম্ভাবনাকে আস্তার সহগ বা আস্থাঙ্ক বলে। যে সীমানার মধ্যে পরামান অবস্থান করে তাদের মধ্যে নিম্ন মানকে নিম্ন সীমা ও উচ্চ মানকে উচ্চ সীমা বলে।

সারসংক্ষেপ:

প্রাকক্লকের একটি বিশেষ মানকে প্রাক্কলিত মান বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৯.১

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (|) চিহ্ন দিন:

১। যে পদ্ধতিতে পরামান নির্ণয় করা হয় তাকে কি বলে

ক) প্রপঞ্চক খ) প্রাক্‌কলন

গ) ভেদাঙ্ক ঘ) মোমেন্ট

সত্য/মিথ্যা নির্ণয়ঃ

২। প্রাক্‌কলন নমুনা তত্ত্বের একটি অংশ

৩। প্রাক্‌কলকের একটি বিশেষ মানকে প্রাকক্‌লিত মান বলা হয়

শুণ্যস্থান পূরণ ঃ

৪। $\bar{X}$এর প্রাকক্‌লিত মানকে ----------- দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

৫। S^2এর প্রাকক্‌লিত মানকে -------- দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

৬। প্রাকক্‌লন দুই প্রকার ------------ ও ----------- ।

বাক্য মিলানো ঃ

৭। তথ্য বিশ্বের কোন নমুনা থেকে প্রাপ্ত পরামান প্রাক্‌কলনের ক্ষেত্রে	ক) করে তাকে আস্থা অন্তর বলে
৮। যে অন্তর একটি নির্দিষ্ট সম্ভাবনা সহ পরামান ধারণ	খ) প্রাক্‌কলিত মান বলা হয়
৯। প্রাক্‌কলের একটি বিশেষ মানকে	গ) দুইটি সীমা নির্দিষ্ট করে।

পাঠ-৯.২ প্রাক্‌কলন পদ্ধতি (The methods of estimation)

ভূমিকা

আমরা পূর্ব পাঠে প্রাক্কলক সম্পর্কে আলোচনা করেছি। সেখানে বলা হয়েছে তথ্যবিশ্বে এক বা একাধিক পরামান অজানা থাকতে পারে। নমুনার উপর নির্ভর করে এ সব অজানা পরামান পরিমাপ জানার প্রয়োজন হয়। যে সব পদ্ধতিতে এ সব পরামান পরিমাপ করা যায় সেই সব পরিমাপ পদ্ধতিকে প্রাক্কলন পদ্ধতি বলা হয়।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন

- প্রাক্কলন পরিমাপ পদ্ধতি
- প্রাক্কলিত পরামানের বৈশিষ্ট্য

বিষয়বস্তু ঃ পরামান প্রাক্কলন করতে পরিসংখ্যানিক কতকগুলো পদ্ধতি রয়েছে। যে সব পদ্ধতিতে পরামান পরিমাপ করা হয় তাকে প্রাক্কলন পদ্ধতি বলে। নিম্নে কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ প্রাক্কলন পদ্ধতি বর্ণনা করা হল:

১। পরিঘাত পদ্ধতি (Method of moment)

২। ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতি (Method of least square)

৩। গরিষ্ঠ সম্ভাব্য পদ্ধতি (Ma*x*imum likelihood method)

৪। ন্যূনতম কাই বর্গ পদ্ধতি (Method of minimum chi-square)

৫। ন্যূনতম দূরত্ব পদ্ধতি (Method of minimum distance)

উপরের পাঁচ প্রাকক্লন পদ্ধতির মধ্যে প্রথম তিনটি আলোচনা করা হলঃ

১। পরিঘাত পদ্ধতি (Method of moment): পরামান প্রাক্কলনের সবচেয়ে প্রাচীন পদ্ধতি হল পরিঘাত পদ্ধতি। আমরা এখানে ধরে নেই, নমুনার পরিঘাতগুলি তথ্যবিশ্বের পরিঘাতগুলির প্রাক্কলিত মান। এ ক্ষেত্রে তথ্যবিশ্বের যতগুলি পরামান প্রাক্কলন করতে হয় নমুনা ও তথ্যবিশ্বের ততগুলি পরিঘাত নিয়ে সমীকরণ করে উক্ত পরামানগুলি নির্ণয় করা হয়। r সংখ্যক পরিঘাত প্রাক্কলন করার জন্য নমুনা ও তথ্যবিশ্বের r সংখ্যক পরিঘাত নিয়ে সমীকরণ করতে হয় অর্থাৎ μ_r' এবং m_r' যথাক্রমে তথ্যবিশ্ব ও নমুনার rতম পরিঘাত হলে, rটি পরামান প্রাক্কলনের সমীকরণ হবে

$$\mu'_১ = m'_১ \;,\; \mu'_২ = m'_২ \;,\; \mu_r' = m_r'$$

উদাহরণ: পৈসুঁ বিন্যাস হতে পরিঘাত পদ্ধতিতে ইহার প্রাক্কলিত মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করি m পরামান বিশিষ্ট পৈসুঁ বিন্যাসের সম্ভাবনা ঘণত্ব ফাংশন-

$$\partial(x;m) = \frac{e - mmx}{x!};\ x = 0\ 1...............$$

অতএব, প্রথম পরিঘাত = $\mu'_১ = E[xf(x;m)]$

$= m$

নমুনা থেকে প্রাপ্ত নমুনা গড় $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} xi \,/n$

অতত্রব $\mu_r' = \hat{m} = \mu_r'$

নিজে করুন ঃ

১. পরিমিত বিন্যাসের ক্ষেত্রে পরিঘাত পদ্ধতিতে পরামান μ ও $\sigma^২$ এর প্রাক্কলিত মান নির্ণয় করুন?

[Hints : $\mu_১' = E[x] = \mu$

$\mu_২' = E(x^২) = \sigma^২+\mu^২$]

২. দ্বিপদী বিন্যাসের ক্ষেত্রে পরিঘাত পদ্ধতিতে পরামান μ এর প্রাক্কলিত মান নির্ণয় করুন।

৩। পৈসুঁ বিন্যাসের ক্ষেত্রে পরিঘাত পদ্ধতিতে পরামান $s^২$ এর প্রাক্কলিত মান নির্ণয় করুন।

৩। ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতি [Methood of least square]

ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতির মুল ধারণা হল পরামান এমনভাবে প্রাক্কলন করতে হবে যাহার বিচ্যুতির বর্গ সমষ্টি ন্যূনতম হবে" পরামান ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতির মাধ্যমে নির্ণয় করাকে বলা হয় ন্যূনতম বর্গ প্রাক্কলিত মান। এ পদ্ধতিতে নির্ণয়কৃত মান এর কয়েকটি ধর্ম নিম্নে দেওয়া হল :

১। প্রাক্কলিত মানগুলি পক্ষপাতহীন

২। প্রাক্কলিত ভেদাঙ্ক সবচেয়ে ছোট

৩। প্রাক্কলকগুলি সর্বোত্তম রৈখিক পক্ষপাতহীন প্রাক্কলক

গরিষ্ঠ সম্ভাব্য প্রাক্কলন পদ্ধতি: মনে করি x_i; i = ১,২..........n কোন দৈব নমুনার n সংখ্যক পর্যবেক্ষিত মান যার সম্ভাবনা ঘনত্ব ফাংশন $f(x;\theta);\theta$ অজানা পরামান। θ এর একাধিক মান থাকতে পারে। যদি θ এর মান স্থির থাকে তবে, x_i;i = ১, ২..........n এর যুক্ত সম্ভাবনা ফাংশনকে $f(x_১;x_২\ldots\ldots x_n;\theta)$ দ্বারা চিহ্নিত করা যায় যা নমুনার পর্যবেক্ষিত মানের উপর নির্ভরশীল। এ ক্ষেত্রে প্রাপ্ত ফাংশনকে θ এর সম্ভাব্য ফাংশন (Likelihood function) বলে এবং $L[\theta|x_১,x_২\ldots\ldots x_n]$ দ্বারা সুচিত করা হয়। গরিষ্ঠ সম্ভাব্য নীতি অনুযায়ী θ এর সেই মানটি গরিষ্ট সম্ভাব্য প্রাক্কলিত মান যা সম্ভাব্য ফাংশনকে সর্ববৃহৎ মান দেয়" অর্থাৎ প্রাক্কলিত মান $\hat{\theta}$ কে পরামানের গরিষ্ঠ সম্ভাব্য প্রাক্কলক বলা হবে যখন,

$L[\hat{\theta}|x_১, x_২ \ldots\ldots x_n] \geq L[\theta|x_১, x_২,\ldots\ldots x_n]$

অর্থাৎ $L[\hat{\theta}|x_১,x_২\ldots\ldots x_n] = \text{Max}L[\theta|x_১,x_২,\ldots\ldots x_n]$

সংক্ষিপ্তভাবে লিখলে আমরা পাই-$L[\hat{\theta}] = \text{Max}L[\theta| x_১ x_২ \ldots\ldots x_n]$

গরিষ্ঠ সম্ভাব্য প্রাক্কলিতমান নির্ণয় করতে নিম্নে শর্ত দুইটি মেনে চলতে হয়।

১। **Error!** এবং

২। [**Error!**

$\theta = \hat{\theta}$

উপরিলিখিত সমীকরণের সমাধান থেকে θ এর যে মান পাওয়া যায় তাহাই θ এর গরিষ্ঠ প্রাক্কলিত মান।

গরিষ্ঠ সম্ভাব্য প্রাক্কলিত মানের ধর্মগুলি নিম্নে দেওয়া হল:

১। সাধারণ কয়েকটি শর্ত সাপেক্ষে গরিষ্ঠ সম্ভাব্য প্রাক্কলন সামঞ্জস্য হয়।

২। সাধারণ কয়েকটি শর্তসাপেক্ষ প্রাক্কলক পরিমিত বিন্যাস অনুসরণ করে।

৩। যদি পরামানের জন্য পর্যাপ্ত প্রাক্কলকের অস্তিত্ব থাকে তবে ইহা সব সময়ই গরিষ্ঠ সম্ভাব্য প্রাক্কলকের ফাংশন হয়-

৪। গরিষ্ঠ সম্ভাব্য প্রাক্কলক অভিন্ন মান মেনে চলে।

উদাহরণ: গরিষ্ঠ সম্ভাব্য প্রাক্কলন পদ্ধতির সাহায্যে দ্বিপদী বিন্যাসের প্রাক্কলন বিন্দু নির্ণয় করুন।

সমাধান: দ্বিপদী বিন্যাসের পরামান P যুক্ত বিন্যাসের সম্ভাবনা ফাংশন হল:

$$L(\theta) = f(x;p) = \binom{n}{x} p^{\sum_{i=1}^{n} x} (1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(n-x)} \quad ; x= ০, ১ \ldots\ldots\ldots\ldots , x$$

$$=> \text{Log } L(p) = \text{Log}\left[\frac{n}{x}\right] + \sum_{i=1}^{n} x \text{ Logp} + \textbf{Error!}$$

এখন, **Error!**= ০ শর্তসাপেক্ষে p এর মান নির্ণয় করতে হবে।

$$\text{অর্থাৎ, } \textbf{Error!} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x}{p} \textbf{ -Error!} = ০$$

$$=> \textbf{Error!-pError!} = ০$$

$$\sum_{i=1}^{n} x - \sum_{i=1}^{n} xp - p\sum_{i=1}^{n} n + p\sum_{i=1}^{n} x = ০$$

$$\text{or } \sum_{i=1}^{n} x - pn = ০$$

$$=> p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x}{n} = x$$

$$\therefore \; = x$$

অতএব, $\bar{x} = \Sigma xi/n$ হবে p এর গরিষ্ঠ সম্ভাব্য প্রাক্কলিত মান।

নিজে করুন:

পৈসুঁ বিন্যাসের ক্ষেত্রে গরিষ্ঠ সম্ভাব্য প্রাক্কলিত মান নির্ণয় করুন।

উপরে উল্লিখিত প্রাক্কলন পদ্ধতিগুলির মধ্যে গরিষ্ঠ সম্ভাব্য প্রাককলন পদ্ধতি সবচেয়ে সহজ এবং খুবই গুরুত্বপূর্ণ। কারণ এ পদ্ধতি অনেকগুলি অভিপ্রেত লক্ষণের অধিকারী।

সার সংক্ষেপ ঃ

যে সকল পদ্ধতিতে পরামান নির্ণয় করা হয় তাকে প্রাক্কলন পদ্ধতি বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৯.২ঃ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন:

১। মান হিসাবে ধরা হয় নিচের কোনটি প্রাক্কলিত-

ক) তথ্য খ) পরামান

গ) সংশ্লেষ ঘ) নির্ভরন

২। নিচের কোনটি প্রাকক্লিত পদ্ধতি নয়

ক) গরিষ্ঠ সম্ভাব্য পদ্ধতি খ) নূন্যতম বর্গ পদ্ধতি

গ) সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় পদ্ধতি ঘ) নূন্যতম কাই বর্গ পদ্ধতি

সত্য/মিথ্যা নির্ণয়ঃ

৩। পরামান নির্নয়ের সবচেয়ে প্রাচীন পদ্ধতি হল পরিঘাত পদ্ধতি

৪। গরিষ্ট সম্ভাব্য নীতি অনুযায়ী এর সেই মানটি গরিষ্ট সম্ভাব্য প্রাকক্লিত মান যা সম্ভাব্য ফাংশনকে সর্ববৃহৎ মান দেয়।

শুণ্যস্থান পূরণ ঃ

৫। ------- প্রাক্কলন পদ্ধতি সবচেয়ে সহজ ও খুবই গুরুত্বপূর্ন।

৬। গরিষ্ঠ সম্ভাব্য নীতি অনুযায়ী এর সেই মান মানটি গরিষ্ঠ সম্ভাব্য প্রাক্কলিত মান যা সম্ভাব্য ফাংশনকে ----------- ।

৭। পরামান ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতিতে নির্ণয় করাকে বলা হয় --------- ।

পাঠ-৯.৩ প্রাক্কলনের ধর্ম ও প্রমাণ (Properties of Estimation and it's Proof)

ভূমিকা

প্রাক্কলন শুধু নির্ণয় করলেই সব সমস্যার সমাধান হয় না। প্রাক্কলিত পরামান এর বৈশিষ্ট্য বা ধর্ম জানার প্রয়োজন। একটি ভাল পরামানের কিছু ভাল বৈশিষ্ট্য বা ধর্ম এ পাঠে আলোচনা করা হল।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন

- প্রাক্কলনের ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য
- ধর্মের প্রমাণ
- বিভিন্ন সমস্যার সমাধান

বিষয়বস্তু ঃ

আমরা আগেই জেনেছি বিন্দু প্রাক্কলনের পর্যবেক্ষিত নমুনা ফাংশনের একটি মানকে পরামান হিসাবে অনুমান করা হয় যার মধ্যে কিছু ভাল বৈশিষ্ট্য আছে। তবে R.A ফিশারের মতে একটি পরামান তখনই সর্বোত্তম প্রাক্কলক হবে যখন প্রাক্কলকের নিম্নের বৈশিষ্ট্যগুলি থাকবে:

১। সামঞ্জস্য (Consistency)

২। দক্ষতা (Efficiency)

৩। পর্যাপ্ততা (Sufficiency)

এ ছাড়া সি গাউস এর মতে প্রাক্কলকের আর একটি গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য রয়েছে তা হল

৪। পক্ষপাতহীনতা (Unbiasedness)

১। সামঞ্জস্য (Consistency) ঃ প্রাক্কলকের একটি গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য হল সামঞ্জস্য। নমুনার আকার ক্রমশ: বৃদ্ধি পাওয়ার সঙ্গে সঙ্গে প্রাক্কলকের মান যদি সম্ভাবনা সুত্রের পরামানের মানের খুব নিকটবর্তী হয় তবে এরূপ প্রাক্কলককে সামঞ্জস্য প্রাক্কলক বলা হয়। যদি T, n আকার বিশিষ্ট নমুনা থেকে প্রাপ্ত পরামান θ এর একটি প্রাক্কলক মান হয় তা হলে T-কে সামঞ্জস্য প্রাক্কলক বলা হবে যদি-

$\text{Lim Prob}[|T-\theta|\leq\in] =$ ১ হয়

এখানে $\in$ খুবই ছোট ধনাত্মক রাশি।

২। দক্ষতা (Efficiency)ঃ কয়েকটি সামঞ্জস্য প্রাক্কলকের মধ্যে যে প্রাক্কলকের ভেদাঙ্ক সবচেয়ে ছোট তাকে দক্ষ প্রাক্কলক (efficient estimator) বলে। যদি $T_১$ এবং $T_২$ দু'টি সামঞ্জস্য প্রাক্কলক হয় যাদের ভেদাঙ্ক যথাক্রমে $\sigma_১^২$ এবং $\sigma_২^২$ তবে $T_১$, $T_২$ অপেক্ষা দক্ষ প্রাক্কলক হবে যদি $\sigma_১^২ < \sigma_২^২$ হয়। দক্ষতাকে অন্যভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়-

দক্ষতা (efficiency) এর সংজ্ঞা ঃ

যদি $T_১$ কোন পরামান θ এর সবচেয়ে দক্ষ প্রাক্কলক হয় যার ভেদাঙ্ক $\sigma_১^২$ এবং $T_২$ যদি অন্য একটি প্রাক্কলক হয় যার ভেদাঙ্ক $\sigma_২^২$ তবে $T_২$ এর দক্ষতাকে E দ্বারা প্রকাশ করলে $E = \sigma_১^২ / \sigma_২^২ \le ১$।

পর্যাপ্ততা (Sufficiency)ঃ একটি প্রাক্কলক T-কে তখনই পর্যাপ্ত প্রাক্কলক বলা হবে যখন ইহার পরামান সম্বন্ধে নমুনায় সমস্ত তথ্য থাকে অর্থাৎ যদি x_i ; i = ১,২........*n* একটি দৈব নমুনা হয় যা $f(x;\theta)$ থেকে চয়ন করা হয়েছে, তবে প্রাক্কলক x_i ; i = ১,২.........n এর যুক্ত সম্ভাবনা ঘণত্ব ফাংশনকে নিম্নরূপে দেখানো যায়-

পর্যাপ্ততা = $f(x_i$; i = ১, ২.............n;θ) = f(t/θ)h(*x*i ; i = ১,২........n)

যেখানে ডান দিকের উৎপাদক দুটির প্রথমটি t ও θ এর উপর নির্ভরশীল এবং দ্বিতীয়টি θ এর উপর নির্ভরশীল নয়। t প্রাক্কলক T এর একটি প্রাক্কলিত মান। মনে রাখতে হবে, পর্যাপ্ততা প্রাক্কলকের ধর্ম নহে, এটা নমুনাঙ্কের ধর্ম মাত্র।

পক্ষপাতহীনতা (Unbiasedness): পক্ষপাতহীনতা সি গাউস সর্বপ্রথম উল্লেখ করেন। তার মতে একটি প্রাক্কলক t কে তখনই পরামান θ এর পক্ষপাতহীন প্রাক্কলক বলা হবে যখন-

$E[T] = \theta$।

এখানে $[E[T]-\theta]$ কে পক্ষপাত এর পরিমাপ বলা হয়। এ পরিমাপ ধনাত্মক অথবা ঋনাত্মক হতে পারে। বিন্দু প্রাক্কলনের আর একটি উৎকৃষ্ট বৈশিষ্ট্য বিদ্যমান তা হল লঘিষ্ঠ ভেদাঙ্ক পক্ষপাতশুণ্য প্রাক্কলক (Minimum variance unbiased estimator)

লঘিষ্ঠ ভেদাঙ্ক পক্ষপাত শূণ্য প্রাক্কলক (Minimum variance unbiased estimator)ঃ

T এর মধ্যগামিতার মাপ, প্রত্যাশা E(T) যদি θ এর সমান হয় তবে T কে θ এর পক্ষপাতশূণ্য প্রাক্কলক বলে। সকল পক্ষপাতশূণ্য প্রাক্কলকের মধ্যে যার বিস্তৃতী। সাধারণত ভেদাঙ্ক সবচেয়ে কম অর্থাৎ যার ভেদাঙ্ক অন্য যে কোন পক্ষপাতশুন্য প্রাক্কলকের ভেদাঙ্কের চেয়ে ছোট তাকেই লঘিষ্ঠ-ভেদাঙ্ক পক্ষপাতশুণ্য প্রাক্কলক বলে।

রাও-ক্রেমার (Rao-cramer's) এর সূত্রানুযায়ী θ পক্ষপাতশুন্য প্রাক্কলক সমূহের ভেদাঙ্কের অধঃ সীমা হল

Error!২

বা **Error!**

কয়েকটি শর্তসাপেক্ষে।

তখন {E[T]-θ} কে বলা হয় পক্ষপাত এর পরিমাপ। যদি এ পরিমাপ ধনাত্মক হয় তাকে বলা হবে ধনাত্মক পক্ষপাত প্রাক্কলক অথবা ঋনাত্মক হলে বলা হবে ঋনাত্মক পক্ষপাত প্রাক্কলক।

সারসংক্ষেপ:

T এর মধ্যগামিতার মাপ, প্রত্যাশা E(T) যদি θ এর সমান হয় হবে T কে θ এর পক্ষপাত শুন্য প্রাক্কলক বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৯.৩ঃ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নঃ

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিনঃ

১। সামঞ্জস্য, দক্ষতা, পর্যাপ্ততা কার বৈশিষ্ট্য

ক) ভেদাংকের খ) প্রাক্কলকের

গ) গড়ের ঘ) সংশ্লেষাংকের

২। কে বলেছেন প্রাকক্লনের বৈশিষ্ট্য হল পক্ষপাতহীনতা

ক) ফিশার খ) উইনার

গ) গাউস ঘ) গোল্ডেন

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় ঃ

৩। প্রাকক্লকের একটি গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য হল সামঞ্জস্য।

৪। প্রাকক্লক T কে তখনই পরামান θ এর পক্ষপাতহীন প্রাকক্লক বলা হবে যখন $E(T)$ □ θ

শুণ্যস্থান পূরণ ঃ

৫। লঘিষ্ঠ ভেদাংক পক্ষপাতশুন্য প্রাকক্লক, ------ একটি বৈশিষ্ট্য

৬। ক্রেমার রাও এর সুত্রানুযায়ী θ পক্ষপাতশুন্য প্রাকক্লক সমূহের ভেদাংকের অধঃসীমা হল ------- বা ------।

৭। $[E[T]-\theta]$ -------- এর পরিমাপ বলা হয়

৮। পর্যাপ্ততা ---------- ধর্ম নহে। এটা --------- ধর্ম মাত্র।

পাঠ-৯.৪ অন্তর প্রাক্কলন (Interval Estimation)

ভূমিকাঃ

তথ্যবিশ্বের পরামান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে নমুনা থেকে প্রাপ্ত একটি মাত্র মানের সাহায্যে বিন্দু প্রাক্কলন বের করা হয়। কিন্তু বাস্তব ক্ষেত্রে এ ধরনের প্রাক্কলনে অনেক সময় সঠিক মান নির্ণয় করা সম্ভব হয় না। তাই অন্তর প্রাক্কলনের সাহায্যে এ সব সমস্যার সমাধান করা হয়।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন

- অন্তর প্রাক্কলন কি
- অন্তর প্রাক্কলন পদ্ধতি
- উদাহরণ সহ ব্যাখ্যা।

বিষয়বস্তুঃ

অন্তর প্রাক্কলনের দুইটি সীমা নির্দিষ্ট করা হয় যা একটি নির্দিষ্ট সম্ভাবনাসহ প্রয়োজনীয় পরামানটি ঐ সীমার মধ্যে অবস্থান করে।

আস্থা অন্তর (Confidence Interval): যে অন্তর একটি নির্দিষ্ট সম্ভাবনাসহ পরামানকে ধারণ করে তাকে আস্থা অন্তর (Confidence Interval) বলে। অন্তরের আস্থাকে $c_১$ এবং c_2 দ্বারা প্রকাশ করলে করা হয়।

মনে করি x_i ; i = ১,২ ....n একটি দৈব নমুনার n সংখ্যাক মান যার সম্ভাবনা ঘনত্ব ফাংশন $f(x;\theta)$ থেকে নেওয়া হয়েছে। যদি $c_১$ এবং $c_২$ ($c_১ < c_২$) প্রাপ্ত নমুনার মান থেকে নির্ণয় করা হয়, তাহলে পরামান θ এর (১-α)% আস্থা অন্তর (Confidence interval) কে নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা যায়,

আস্থা অন্তর,

$$CI = Prob\{c_১ \leq \theta \leq c_২\} = ১-\alpha$$

এখানে $c_১$ ও $c_২$ কে যথাক্রমে নিম্ন সীমা ও উর্দ্ধ সীমা বলা হয়। যেহেতু পরামান θ–এর অন্তর [c১, c২], (১-α) সম্ভাবনা নিয়ে অবস্থান করে তাই (১-α)% আস্থা অন্তর (Contidence interval) বলে। (১-α) কে আস্থা অন্তরের অন্তর সহগ বা আস্থাংক (Co-efficiant of confidence) বলা হয়। α কে যথার্থতা মাত্রা বলা হয়। তাই [$c_১ \leq \theta \leq c_২$] কে পরামান θ এর (১-α)% আস্থা অন্তরের প্রাক্কলিত মান বলা হয়।

অন্তর ব্যাপ্তি নির্ণয় পদ্ধতিঃ

১। গড়ের আস্থা অন্তর নির্ণয় যখন $\sigma^২$ এর মান জানা।

২। গড়ের আস্থা অন্তর নির্ণয় যখন $\sigma^২$ এর মান অজানা।

৩। ভেদাঙ্কের আস্থা অন্তর নির্ণয়।

পরিমিত বিন্যাসের ক্ষেত্রে গড়ের আস্থা অন্তর নির্ণয় ঃ

মনে করি x_i ; i = ১,২............n একটি দৈব নমুনার n সংখ্যক মান যা $f(x;\theta) = N(\mu,\sigma^২)$,পরিমিত বিন্যাস হতে নেওয়া হয়েছে, পরামান (১-α)% = ৯৫% আস্থা অন্তর নির্ণয় করতে হবে যখন $\sigma^২$ এর মান জানা আছে।

এখানে গড়ের বিন্যাস $N(\mu,\sigma^২/n)$,

এখন আদর্শ পরিমিত চলক,

$Z = \frac{x - m}{s/\sqrt{n}}$; Z এর গড় মান x = ০ এর $\sigma^২$ =১

অতএব, Prob[-$c_১ \le Z \le c_১$] = (১-α)

=> Prob[-১.৯৬≤ $\frac{x - m}{s/\sqrt{n}}$ ≤১.৯৬] =.৯৫

পরিমিত বিন্যাস টেবিল হতে পাই

$c_১$ = -১.৯৬ এবং $c_২$ = ১.৯৬

$$\text{or, Prob}\left[\frac{-১.৯৬\sigma}{\sqrt{n}} \le x - \mu \le \frac{+১.৯৬\sigma}{\sqrt{n}}\right] = .৯৫$$

$$\text{or Prob}\left[x - \frac{-১.৯৬\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le x + \frac{+১.৯৬\sigma}{\sqrt{n}}\right] = .৯৫$$

অর্থাৎ $\left[x - \frac{১.৯৬\sigma}{\sqrt{n}} x + \frac{১.৯৬\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ কে যথাক্রমে μ এর ৯৫% নিম্নসীমা ও উর্ধ্বসীমা বলা হয়।

নিজে করুনঃ

১। পরিমিত বিন্যাসের ক্ষেত্রে নিজে করুন : ৯৯% আস্থা সীমা নির্ণয় করুন যখন ভেদাঙ্ক σ^2 জানা আছে।

২। দ্বিপদী বিন্যাসের ক্ষেত্রে ৯৫% আস্থা সীমা নির্ণয় করুন যখন ভেদাঙ্ক জানা থাকে

৩। পৈসুঁ বিন্যাসের ক্ষেত্রে ৯৫% আস্থা সীমা নির্ণয় করুন যখন ভেদাঙ্ক জানা থাকে।

পরিমিত বিন্যাসের আস্থা অন্তর যখন ভেদাঙ্ক σ^2 এর মান অজানা।

মনে করি x_i ; i = ১,২.........n একটি দৈব নমুনার n সংখ্যক মান যা $f(x ; \theta) = N(\mu, \sigma^২)$ পরিমিত বিন্যাস থেকে চয়ন করা হয়েছে। আমরা আস্থা অন্তর নির্ণয় করবো যখন ভেদাঙ্কের মান অজানা।

এখানে, গড়, $\overline{x}$ এবং ভেদাঙ্ক, S^2 নির্ণয় করতে হবে-

$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} xi/n$ এবং $S^২$ = **Error!**

এ ক্ষেত্রে, বিন্যাসটি t বিন্যাস অনুসরন করবে, অর্থাৎ $t = \frac{x - m}{s/\sqrt{n}}$ যার স্বাধীন মাত্রা n-১

অতএব,

Prob $\left[- t.025 £\frac{x - m}{s/\sqrt{n}} £ t.025\right]$ = .৯৫

Prob[x - t.025 s/$\sqrt{n}$£ m £ x + t.025 s/$\sqrt{n}$]= .৯৫

অতএব, [x - t.025s/$\sqrt{n}$ x + t.025 s/$\sqrt{n}$]কে পরামান μ এর ৯৫% আস্থা অন্তর বলা হয়।

নিজে করুন :

১। পরিমিত বিন্যাসের ক্ষেত্রে ৯০% আস্থা অন্তর নির্ণয় করুন যখন ভেদাঙ্কের মান অজানা

২। দ্বিপদী বিন্যাসের ক্ষেত্রে ৯৯% আস্থা অন্তর নির্ণয় করুন যখন ভেদাঙ্কের মান অজানা

৩। পৈসুঁ বিন্যাসের ক্ষেত্রে ৯৯% আস্থা অন্তর নির্ণয় করুন যখন ভেদাঙ্কের মান অজানা

পরিমিত বিন্যাসের ক্ষেত্রে ভেদাঙ্কের আস্থা অন্তর নির্ণয় ঃ

মনে করি x_i ; i = ১,২.........n একটি দৈব নমুনার n সংখ্যক মান যা f(x;θ) = N(μ, σ২) পরিমিত বিন্যাসের থেকে আস্থা অন্তর নির্ণয় করতে হবে। এখানে $\bar{X}$ও S2যথাক্রমে নমুনাগড় ও ভেদাঙ্ক যাহা ৯৫% সীমার অন্তর হবে।

$$\text{Prob}\left[c২_{.৯৭৫(n-১)} £ \frac{(n-1)s২}{s২} £ c২_{.০২৫(n-১)}\right] = .৯৫$$

$$\text{or, Prob}\left[\frac{(n-১)s২}{c^{২}_{.০২৫(n-১)}} £ s^2 £ \frac{(n-১)s২}{c^{২}_{.৯৭৫(n-১)}}\right] = .৯৫$$

$$\text{অতএব, }\left[\frac{(n-১)s২}{c^{২}_{.০২৫(n-১)}} \frac{(n-১)s২}{c^{২}_{.৯৭৫(n-১)}}\right] = .৯৫$$

σ২ এর ৯৫% আস্থা সীমা বলা হয়।

নিজে করুন :

১। পরিমিত বিন্যাসের ক্ষেত্রে ভেদাঙ্ক অন্তর নির্ণয় করুন যখন আস্থা সীমা ৯০% হবে।

২। দ্বিপদী বিন্যাসের ক্ষেত্রে ভেদাংক অন্তর নির্ণয় করুন যখন আস্থা সীমা ৯০% হবে।

৩। পৈসুঁ বিন্যাসের ক্ষেত্রে ভেদাংক অন্তর নির্ণয় করুন যখন আস্থা সীমা ৯০% হবে।

সারসংক্ষেপ:

অন্তর প্রাক্কলনের দুইটি সীমা নির্দিষ্ট করা হয় যা একটি নির্দিষ্ট সম্ভাবনাসহ প্রয়োজনীয় পরামানটি ঐ সীমার ভিতর অবস্থান করে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৯.৪:

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (|) চিহ্ন দিন:

১। অন্তর প্রাক্কলকের ক্ষেত্রে কয়টি সীমা নির্দিষ্ট থাকে

ক) ৫টি   খ) ৩টি

গ) ২টি   ঘ) ১টি

২। অন্তর প্রাক্কলকের ঊর্ধ্বসীমাকে কি বলা হয়

ক) ঊর্ধ্বসীমা   খ) নিম্নসীমা

গ) অলিক   ঘ) কাল্পনিক

সত্য/মিথ্যা নির্ণয়ঃ

৩। আস্থা অন্তর, CI $= P_{rob}\{c_১ \leq \theta \leq c_২\} =$ ১ - α

যখন $c_১$ = ঊর্ধ্ব সীমা ও $c_২$ = নিম্নসীমা

৪। ”α” কে যথার্থতা মাত্রা বলা হয়।

৫। (১-α) কে অন্তর সহগ বা আস্থাঙ্ক বলা হয়।

শূণ্যস্থান পূরণ ঃ

৬। যদি $c_১$এবং $c_২$ ($c_১ < c_২$) হয় তবে CI =--------

৭। অন্তর [$c_১$,$c_২$] পরামান θ কে (১-α) সম্ভাবনায় নিয়ে অবস্থান করে তাই (১-α)$'$ কে -------।

৮। $c_১ \leq \theta \leq c_২$ কে পরামান θ এর (১-α)% আস্থা অন্তরের .... মান বলা হয়।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন-৯

রচনামূলক প্রশ্ন

১। প্রাক্কলনের সংজ্ঞা লিখুন? বিন্দু প্রাক্কলন ও অন্তর প্রাক্কলনের পার্থক্য লিখুন।

২। পরামান প্রাক্কলনের কয়েকটি পদ্ধতির নাম লিখুন। ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতিটি আলোচনা করুন।

৩। প্রাক্কলনের ধর্মগুলি লিখুন। লঘিষ্ঠ ভেদাঙ্ক পক্ষপাত শুণ্য প্রাক্কলক সম্পর্কে লিখুন।

৪। অন্তর প্রাক্কলকের সংজ্ঞা লিখুন। পরিমিত বিন্যাসের ক্ষেত্রে কিভাবে অন্তর প্রাক্কলকের মান নির্ণয় করা যায়। আলোচনা করুন।

উত্তর মালা

৯.১: ১। খ ২। সত্য ৩। সত্য ৪। $\bar{\bar{x}}$ ৫। $s^{২}$ ৬। বিন্দু প্রাক্কলন ও অন্তর প্রাক্কলন ৭। গ ৮। ক ৯। খ ।

৯.২: ১। খ ২। গ ৩। সত্য ৪। সত্য ৫। গরিষ্ঠ সম্ভাব্য ৬। সর্ববৃহৎ মান দেয় ৭। ন্যূনতম বর্গ প্রাক্কলিত মান

৯.৩: ১। খ ২। গ ৩। সত্য ৪। মিথ্যা ৫। প্রাক্কলকের ৬। $\frac{১}{E\left[\frac{dLog(q)}{dq}\right]}$২ বা $\frac{১}{-E\left[\frac{d^{২}Log(q)}{dq^{২}}\right]}$

৭। পক্ষপাত ৮। প্রাক্কলকের, নমুনাঙ্কের

৯.৪: ১। গ ২। ক ৩। মিথ্যা ৪। সত্য ৫। সত্য ৬। Prob $\{c_{১}<\theta<c_{২}\}=১-\alpha$

৭। অন্তর সহগ বা আস্থাঙ্ক বলে ৮। প্রাক্কলিত মান বলা হয়।