



বীজগণিতিক সূত্রের প্রয়োগ

ভূমিকা

বীজগণিতীয় সূত্রের সাহায্যে বিভিন্ন প্রকার গাণিতিক সমস্যার সমাধান করা যায়। আপনারা ইতোমধ্যে ইউনিট-৩ এ বীজগণিতের বিভিন্ন সূত্রাবলি সম্বন্ধে বাস্তব জ্ঞান লাভ করেছেন। ইউনিট-৪ এ উৎপাদকে বিশেষণে সূত্রাবলির প্রয়োগ সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ করেছেন। বর্তমান ইউনিটে বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে সূত্রগুলোর বিভিন্ন প্রয়োগ সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- 1 গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ.সা.গু) নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন;
- 1 লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল.সা.গু) নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

পাঠ ১ গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক



উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি—

- ১ গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ.সা.গু) সম্পর্কে জানতে পারবেন;
- ১ গ.সা.গু নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।



গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ.সা.গু)

কোন রাশি যদি দুই বা ততোধিক রাশির প্রত্যেকটির গুণনীয়ক হয় তবে তাকে উক্ত রাশিগুলোর সাধারণ গুণনীয়ক বলা হয়। যেমন, ab , ac এবং ad এর সাধারণ গুণনীয়ক হল a । তদ্রূপ (a^2-b^2) এবং (a^3+b^3) এর সাধারণ গুণনীয়ক হল $a+b$

দুই বা ততোধিক রাশির মধ্যে সর্বাধিক সংখ্যক সম্ভাব্য সাধারণ গুণনীয়কগুলোর গুণফলকে ঐ রাশিদ্বয় বা রাশিসমূহের গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (height common factor) বা সংক্ষেপে গ.সা.গু (H.C.F) বলা হয়।
যেমন : $3x^2y^3z^2$, $6x^5y^3z^4$, $15x^4y^3z^2$ এই রাশি তিনটির গ.সা.গু হল $3x^2y^3z^2$

কোন রাশি যদি দুই বা ততোধিক রাশির প্রত্যেকটির গুণনীয়ক হয়, তবে তাকে উক্ত রাশিগুলোর সাধারণ গুণনীয়ক বলা হয়।

গ.সা.গু নির্ণয় প্রণালী

গুণনীয়ক বা উৎপাদকের সাহায্যে এবং ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে গ.সা.গু নির্ণয় করা যায়। এখানে গুণনীয়কের সাহায্যে গ.সা.গু নির্ণয় প্রণালী আলোচিত হল।

যদি প্রদত্ত রাশিগুলোতে সংখ্যাসূচক সহগ থাকে তবে সংখ্যাসূচক সহগগুলোর পাটিগণিতীয় গ.সা.গু নির্ণয়ের নিয়ম অনুসারে গ.সা.গু নির্ণয় করা হয়। তারপর অবশিষ্ট অংশগুলোর সম্ভাব্য সাধারণ উৎপাদক নির্ণয় করে গ.সা.গু নির্ণয় করা হয়। এখন সহগগুলোর গ.সা.গু এবং অবশিষ্ট অংশের গ.সা.গু এর গুণফলই প্রদত্ত রাশিগুলোর নির্ণয় গ.সা.গু।

এখন আসুন আমরা কিছু উদাহরণের মাধ্যমে গ.সা.গু সম্পর্কে পরিষ্কার ধারণা লাভের চেষ্টা করি।

উদাহরণ ১ : $3a^3b^2c$ এবং $6ab^2c^2$ -এর গ.সা.গু নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে 3 ও 6 এর গ.সা.গু = 2 এবং a^3b^2c ও ab^2c^2 এর উচ্চতম সাধারণ ঘাত যথাক্রমে a , b^2 ও c অতএব, a^3b^2c ও ab^2c^2 এর গ.সা.গু ab^2c

∴ নির্ণয় গ.সা.গু = $2ab^2c$

উদাহরণ 2 : $6a^3b^4c^3$, $-6a^3b^2c^4$ এবং $10a^4b^3c^3$ এর গ.সা.গু নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে 6, -6 ও 10 এর গ.সা.গু 2

এবং $a^3b^4c^3$, $a^3b^2c^4$ ও $a^4b^3c^3$ এর উচ্চতম ঘাত a^3 , b^2 ও c^3 । অতএব, $a^3b^4c^3$, $a^3b^2c^4$ ও $a^4b^3c^3$ এর গ.সা.গু $a^3b^2c^3$ ।

নির্ণেয় গ.সা.গু = $2a^3b^2c^3$

বি.দ্র.- গ.সা.গু নির্ণয়ে কোন রাশির ± 1 গুণনীয়ক বিবেচনা করা হয় না। যেমন 6 ও 10 এর গ.সা.গু 2 এবং -6 এবং -10 এর গ.সা.গু ও 2। ল.সা.গু নির্ণয়ের ক্ষেত্রেও একই ফল প্রযোজ্য। (এরূপ ক্ষেত্রে অবশ্য দুইটি সংখ্যার ল.সা.গু ও গ.সা.গু-এর গুণফল সংখ্যা দুইটির গুণফলের পরমমানের সমান)

গ.সা.গু নির্ণয়ে কোন রাশির ± 1 গুণনীয়ক বিবেচনা করা হয় না। ল.সা.গু নির্ণয়ের ক্ষেত্রেও একই নিয়ম প্রযোজ্য।

উদাহরণ 3 : a^3-ab^2 , $ab-bc$ এর গ.সা.গু নির্ণয় করুন।

সমাধান : ১ম রাশি = a^3-ab^2
 $= a(a^2-b^2)$
 $= a(a+b)(a-b)$

২য় রাশি = $ab-bc$
 $= b(a-c)$

নির্ণেয় গ.সা.গু = 1

উদাহরণ 4 : m^3-m , m^2+m , m^2+m^3 - এর গ.সা.গু নির্ণয় করুন।

সমাধান : ১ম রাশি = m^3-m
 $= m(m^2-1)$
 $= m(m^2-1^2)$
 $= m(m+1)(m-1)$

২য় রাশি = m^2+m
 $= m(m+1)$

৩য় রাশি = m^2+m^3
 $= m^2(1+m)$
 $= m^2(m+1)$

\therefore নির্ণেয় গ.সা.গু = $m(m+1)$

এস এস সি প্রোগ্রাম

উদাহরণ 5 : $a^2b(a^3-b^3)$, $a^2b^2(a^4+a^2b^2+b^4)$, $a^3b^2+a^2b^3+ab^4$ এর গ.সা.গু নির্ণয় করুন।

সমাধান : ১ম রাশি = $a^2b(a^3-b^3)$

$$=a^2b(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

২য় রাশি = $a^2b^2(a^4+a^2b^2+b^4)$

$$=a^2b^2(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$$

৩য় রাশি = $a^3b^2+a^2b^3+ab^4$

$$=ab^2(a^2+ab+b^2)$$

∴ নির্ণেয় গ. সা. গু = $ab(a^2+ab+b^2)$

উদাহরণ 6 : x^2-2x-3 , x^2+5x+4 , x^2+7x+6 এর গ.সা.গু নির্ণয় করুন।

সমাধান : ১ম রাশি = x^2-2x-3

$$=x^2-3x+x-3$$

$$=x(x-3)+1(x-3)$$

$$=(x-3)(x+1)$$

২য় রাশি = x^2+5x+4

$$=x^2+4x+x+4$$

$$=x(x+4)+1(x+4)$$

$$=(x+4)(x+1)$$

৩য় রাশি = x^2+7x+6

$$=x^2+6x+x+6$$

$$=x(x+6)+1(x+6)$$

$$=(x+6)(x+1)$$

∴ নির্ণেয় গ. সা. গু = $x+1$

উদাহরণ 7 : $2(a^2+b^2-c^2+2ab)$, $3(a^2-b^2-c^2+2bc)$, $6(a^2-b^2+c^2-2ca)$ - এর গ.সা.গু কত?

সমাধান : ১ম রাশি = $2(a^2+b^2-c^2+2ab)$

$$=2\{(a^2-2ab+b^2)-c^2\}$$

$$=2\{(a+b)^2-c^2\}$$

$$=2(a+b+c)(a+b-c)$$

২য় রাশি = $3(a^2-b^2-c^2+2bc)$

$$=3\{a^2-(b^2-2bc+c^2)\}$$

$$=3\{a^2-(b-c)^2\}$$

$$=3\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$$

$$=3(a+b-c)(a-b+c)$$

৩য় রাশি = $6(a^2-b^2+c^2+2ca)$

$$=3.2\{(a^2-2ca+c^2)-b^2\}$$

$$=3.2\{(a-c)^2-b^2\}$$

$$=3.2(a-c+b)(a-c-b)$$

$$=3.2(a+b-c)(a-b-c)$$

∴ নির্ণেয় গ.সা.গু = $a+b-c$

বীজগণিতিক সূত্রের প্রয়োগ



অনুশীলনী ৫.১

গ.সা.গু নির্ণয় করুন

1. x^2-y^2, x^3-y^3
2. x^2+x, x^2+2x+1
3. $x^2(x+y), x^2(x+y)^2, x^3(x^3+y^3)$
4. $4a^2-1, 2a^2+a-1, 8a^3-1$
5. $6a^3+5a^2b+ab^2, 8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3, 4a^3-4a^2b-3ab^2$
6. $a^2-b^2-c^2-2bc, b^2-c^2-a^2-2ca, c^2-a^2-b^2-2ab$
7. $5(a^4+2a^2+1), 10(a^6+a^4-a^2-1), 15(a^4-1)$
8. $2x^3-16y^3, 4x^2-16xy+16y^2, 2(x^2-4y^2)$

পাঠ ২ লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল.সা.গু)



উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- 1 লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল.সা.গু) সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- 1 ল.সা.গু নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।



লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল.সা.গু)

কোন রাশি অপর একটি রাশি দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হলে, ভাজ্যকে ভাজকের গুণিতক (Multiple)

বলা হয়। যেমন a^2b^2c , ac -এর একটি গুণিতক। যদি কোন একটি রাশি অপর দুই বা ততোধিক রাশি দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হয়, তবে ভাজ্যকে ভাজকগুলোর সাধারণ গুণিতক (Common multiple) বলা হয়। যেমন $a^2b^2c^2$ রাশিটি a , b , c , ab , ac , bc ইত্যাদি দ্বারা বিভাজ্য। সুতরাং $a^2b^2c^2$ রাশিটি a , b , c , ab , ac , bc ইত্যাদি রাশিগুলোর সাধারণ গুণিতক।

দুই বা ততোধিক রাশির যে সাধারণ গুণিতকে রাশিগুলোর ন্যূনতম সংখ্যক সম্ভাব্য সাধারণ উৎপাদক বর্তমান থাকে তাকে ঐ রাশিগুলোর লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (Lest Common multiple) বা সংক্ষেপে ল.সা.গু (L.C.M) বলে।

দুই বা ততোধিক রাশির সাধারণ গুণিতকে রাশিগুলোর ন্যূনতম সংখ্যক যে সম্ভাব্য সাধারণ উৎপাদক বর্তমান থাকে তাকে ঐ রাশিগুলোর লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক বা সংক্ষেপে ল.সা.গু বলে।

ল.সা.গু নির্ণয় প্রণালী

প্রথমে প্রদত্ত রাশিগুলোর সংখ্যাসূচক সহগগুলোর ল.সা.গু নির্ণয় করা হয়। তারপর অবশিষ্টাংশের সম্ভাব্য সাধারণ উৎপাদক বের করে ল.সা.গু নির্ণয় করা হয়। এখন সহগগুলোর ল.সা.গু এবং অবশিষ্টাংশের সম্ভাব্য সাধারণ উৎপাদকের ল.সা.গু-র গুণফলই প্রদত্ত রাশিগুলোর নির্ণয়ে ল.সা.গু।

এখন আসুন আমরা কিছু উদাহরণের মাধ্যমে ল.সা.গু নির্ণয় সম্পর্কে পরিষ্কার ধারণা লাভের চেষ্টা করি।

উদাহরণ 1 : $5a^2b^3c^2$, $10ab^2c^3$, $15ab^3c$ এর ল.সা.গু নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে 5, 10 ও 15 এর ল.সা.গু = 30

প্রদত্ত রাশিগুলোতে a , b এবং c এর সর্বোচ্চ ঘাত যথাক্রমে a^2 , b^3 এবং c^3

\therefore নির্ণয়ে ল.সা.গু = $30a^2b^3c^3$

উদাহরণ ২ : $a^2-ab, ab-b^2$ এর ল.সা.গু কত?

সমাধান: ১ম রাশি $= a^2-ab$

$$= a(a-b)$$

২য় রাশি $= ab+b^2$

$$= b(a+b)$$

\therefore নির্ণেয় ল.সা.গু $= ab(a+b)(a-b)$

$$= ab(a^2-b^2)$$

উদাহরণ ৩ : x^2+3x+2, x^2-1, x^2+x-2 এর ল.সা.গু কত?

সমাধান : ১ম রাশি $= x^2+3x+2$

$$=x^2+2x+x+2$$

$$=x(x+2)+1(x+2)$$

$$=(x+2)(x+1)$$

২য় রাশি $=x^2-1$

$$=(x+1)(x-1)$$

৩য় রাশি $=x^2+x-2$

$$=x^2+2x-x-2$$

$$=x(x+2)-1(x+2)$$

$$=(x+2)(x-1)$$

\therefore নির্ণেয় ল.সা.গু $= (x+2)(x+1)(x-1)$

$$= (x+2)(x^2-1)$$

উদাহরণ ৪ : $2a^2b+4ab^2, 4a^3b-16ab^3$ এবং $5a^3b^2(a^2+4ab+4b^2)$ এর ল.সা.গু কত?

সমাধান : ১ম রাশি $= 2a^2b+4ab^2$

$$=2ab(a+2b)$$

২য় রাশি $=4a^3b-16ab^3$

$$=4ab(a^2-4b^2)$$

$$=4ab\{(a)^2-(2b)^2\}$$

$$=4ab(a+2b)(a-2b)$$

৩য় রাশি $= 5a^3b^2(a^2+4ab+4b^2)$

$$=5a^3b^2(a^2+2ab+2ab+4b^2)$$

$$=5a^3b^2\{a(a+2b)+2b(a+2b)\}$$

$$=5a^3b^2(a+2b)(a+2b)$$

$$=5a^3b^2(a+2b)^2$$

এস এস সি প্রোগ্রাম

এখানে 2, 4 এবং 5 এর ল.সা.গু = 20

প্রদত্ত রাশিগুলোতে a^3 , b^2 , $(a+2b)^2$ এবং $(a-2b)$ যথাক্রমে a, b $(a+2b)$ এবং $a-2b$ উৎপাদকের উচ্চতর ঘাত।

\therefore নির্ণেয় ল.সা.গু = $20a^3b^2(a-2b)(a+2b)^2$

উদাহরণ 5 : a^3-1 , a^3+1 , a^4+a^2+1 এর ল.সা.গু কত?

সমাধান: ১ম রাশি = a^3-1

$$=(a-1)(a^2+a+1)$$

২য় রাশি = a^3+1

$$=(a+1)(a^2-a+1)$$

৩য় রাশি = a^4+a^2+1

$$=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$$

\therefore নির্ণেয় ল.সা.গু = $(a+1)(a-1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

$$=(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)$$

$$=(a^3+1)(a^3-1)$$

$$=(a^6-1)$$

উদাহরণ 6 : $27a^4-12a^2+1$, $27a^4+6a^2-1$, $9a^4-28a^2+3$, a^4-6a^2+9 এর ল.সা.গু কত?

সমাধান: ১ম রাশি = $27a^4-12a^2+1$

$$=27a^4-9a^2-3a^2+1$$

$$=9a^2(3a^2-1)-1(3a^2-1)$$

$$=(3a^2-1)(9a^2-1)$$

$$=(3a^2-1)(3a-1)(3a+1)$$

২য় রাশি = $27a^4+6a^2-1$

$$=27a^4+9a^2-3a^2-1$$

$$=9a(3a^2+1)-1(3a^2+1)$$

$$=(3a^2+1)(9a^2-1)$$

$$=(3a^2+1)(3a+1)(3a-1)$$

৩য় রাশি = $9a^4-28a^2+3$

$$=9a^4-27a^2-a^2+3$$

$$=9a^2(a^2-3)-1(a^2-3)$$

$$=(a^2-3)(9a^2-1)$$

$$=(a^2-3)(3a+1)(3a-1)$$

$$\begin{aligned}
8\text{র্থ রাশি} &= a^4 - 6a^2 + 9 \\
&= a^4 - 3a^2 - 3a^2 + 9 \\
&= a^2(a^2 - 3) - 3(a^2 - 3) \\
&= (a^2 - 3)(a^2 - 3) \\
&= (a^2 - 3)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{নির্ণেয় ল.সা.গু} &= (3a-1)(3a+1)(3a^2-1)(3a^2+1)(a^2-3)^2 \\
&= (9a^2-1)(9a^4-1)(a^2-3)^2
\end{aligned}$$

উদাহরণ 7: $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$, $b^2 - c^2 - a^2 - 2ca$, $c^2 - a^2 - b^2 - 2ab$ এর ল.সা.গু কত?

$$\begin{aligned}
\text{সমাধান : ১ম রাশি} &= a^2 - b^2 - c^2 - 2bc \\
&= a^2 - (b^2 + 2bc + c^2) \\
&= a^2 - (b+c)^2 \\
&= (a+b+c)(a-b-c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\text{য় রাশি} &= b^2 - c^2 - a^2 - 2ca \\
&= b^2 - (c^2 + 2ca + a^2) \\
&= b^2 - (c+a)^2 \\
&= (b+c+a)(b-c-a) \\
&= (a+b+c)(b-c-a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3\text{য় রাশি} &= c^2 - a^2 - b^2 - 2ab \\
&= c^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\
&= c^2 - (a+b)^2 \\
&= (c+a+b)(c-a-b) \\
&= (a+b+c)(c-a-b)
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় ল.সা.গু} = (a+b+c)(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b)$$



অনুশীলনী ৫.২

ল.সা.গু নির্ণয় করুন

1. $2x^2y^3z^4, 5x^3y^2z^4, 6x^5y^2z^3, 4x^4y^3z^2$
2. $-7a^2b^3c, -12a^3b^2c^2, 35a^5bc^7, a^7b^3c^3$
3. $(a+b)^2, a^2-b^2$
4. $2x^2-6x+4, 2x^2+2x-12$
5. x^2-4, x^2+4x+4, x^3-8
6. $a^3-3a^2-10a, a^3+6a^2+8a, a^4-3a^3-10a^2$
7. $x^2y^2(x^2-4x+3), x^2y^3(x^2-3x+2), x^3y(x^2-5x+6)$
8. $x^2-x(a-c)-ac, x^2-x(a+c)+ac, ax^3-a^3x,$
9. $x^3+y^3, x^3-y^3, x^4+x^2y^2+y^4$
10. $2x^2y^2(2x^2-xy-6y^2), 6x^3y^4(6x^2+xy-12y^2),$
 $5x^2y^3(3x^2-10xy+8y^2), 12x^2y^3(x^2-4y^2)$